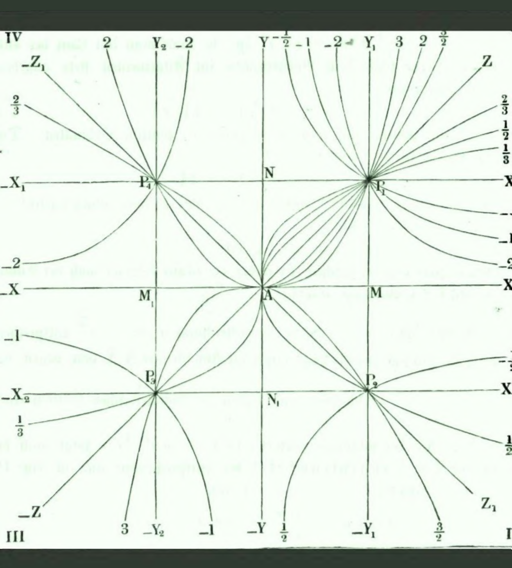



# Lehrbuch der ingenieur-und maschinen-mechanik

Julius Ludwig Weisbach





Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

# Lehrbuch

der

# Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

**Unterricht an technischen Lehranstalten**

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von


Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg; Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.


In drei Theilen.

**Erster Theil: Theoretische Mechanik.**

Mit 902 in den Text eingedruckten Holzstichen.

**Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.**

**Erste Hälfte.**


Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1 8 6 3.

# Lehrbuch

der

# theoretischen Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg; Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

**Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.**

Mit 902 in den Text eingedruckten Holzstichen.

**Erste Hälfte.**

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1863.

# Vorrede zur ersten Auflage.

Nicht ohne Zagen schicke ich hier den ersten Theil meiner elementaren Bearbeitung der Ingenieur- und Maschinenmechanik in die Welt. Obwohl ich mir sagen kann, daß ich bei dieser Schrift mit aller möglichen Sorgfalt und Bedachtsamkeit zu Werke gegangen bin, so befürchte ich dennoch, den Wünschen Aller in ihr nicht entsprechen zu können. Die Ansichten, Wünsche und Ansprüche sind nun einmal so sehr verschieden, daß es nicht möglich ist, sie alle zu befriedigen. Mancher wird das eine Capitel zu ausführlich, Mancher wird es zu kurz finden; Einige werden in der Behandlung gewisser Materien eine höhere Wissenschaftlichkeit vermissen, während Andere vielleicht gerade hierin eine größere Popularität gewünscht hätten. Indeß vieljährige Studien, vielfacher Unterricht und mannigfaltige Beobachtungen und Erfahrungen haben mich nun einmal auf die Methode geführt, nach welcher das vorliegende Werk bearbeitet ist, und welche ich für den beabsichtigten Zweck als die angemessenste halte.

Mein Hauptbestreben bei Bearbeitung dieses Werkes war darauf gerichtet, die größte Einfachheit bei der Entwickelung und Beweisführung zu erzielen und alle in der Anwendung auf die Praxis wichtigen Sätze nur mit Hülfe der niederen Mathematik abzuhandeln. Wenn man berücksichtigt, welche mannigfache Kenntnisse ein Techniker sich anzueignen hat, um in seinem Fache etwas Tüchtiges zu leisten, so muß es uns, als Lehrer und Schriftsteller für Techniker, eine Pflicht sein, das gründliche Studium der Wissenschaft durch Vereinfachung im Vortrage, durch Beseitigung alles Ueberflüssigen und durch die Anwendung der bekanntesten und zugänglichsten

Hülfslehren zu erleichtern. Ich habe deshalb auch in dem vorliegenden Werke die Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung gänzlich vermieden. Wenn auch jetzt die Gelegenheit zur Erlernung dieser Rechnung nicht so selten mehr ist, so ist es doch eine unbestreitbare Thatsache, daß ohne immerwährende Uebung die nöthige Fertigkeit in Handhabung derselben sehr bald verloren geht, und es deshalb manchen übrigens sehr tüchtigen Praktiker giebt, welcher mit der früher erlernten Differenzial- und Integralrechnung nicht mehr umzugehen versteht. Da ich mit manchen Schriftstellern, welche in populären Schriften die schwierigeren Sätze ohne Beweise mittheilen, nicht einerlei Meinung bin, so habe ich es vorgezogen, praktisch wichtige Sätze stets auf elementarem, wenn auch zuweilen etwas weitläufigem Wege abzuleiten oder zu beweisen. Man wird daher in diesem Werke nur selten eine Formel ohne ihre Begründung hingestellt finden. Einige ganz allgemeine Kenntnisse gewisser Lehren aus der Naturlehre, zumal aber eine gründliche Kenntniß der reinen Elementarmathematik, müssen wir allerdings bei dem Studium dieser Schrift voraussetzen. Vorzüglich bin ich bemüht gewesen, bei Bearbeitung dieses Werkes die rechte Mitte zwischen Generalisiren und Specialisiren zu halten. Obwohl ich die Vorzüge des Generalisirens nicht verkenne, so bin ich doch der Meinung, daß man in diesem Werke, wie bei jedem elementaren Vortrage, das allzu große Generalisiren zu vermeiden habe. Das Einfache kommt ja in der Praxis häufiger vor als das Zusammengesetzte. Auch ist nicht zu leugnen, daß in der Betrachtung des allgemeinen Falles oft die tiefere Kenntniß des specielleren Falles verloren geht, und daß es nicht selten leichter ist, aus dem Einfachen das Zusammengesetztere abzuleiten, als aus dem Allgemeineren das Einzelne herauszuziehen.

Man erwarte in der Ingenieur- und Maschinenmechanik keine Maschinenbaulehre oder Maschinenbaukunst, sondern nur die Einleitung oder Vorbereitungswissenschaft zu dieser. Die Mechanik soll sich insofern zur Maschinenbaukunst verhalten, wie die darstellende Geometrie zum Maschinenzeichnen. Nach Erlangung der Kenntnisse der Mechanik und der darstellenden Geometrie scheint es am zweckmäßigsten zu sein, den Unterricht über Maschinenbaukunst und den über Maschinenzeichnen in einem Curse zu vereinigen.

Vielleicht wird noch in Zweifel gezogen, daß es zweckmäßig sei, die Ingenieur- und Maschinenmechanik in zwei Theile, in einen theoretischen und in einen angewandten, zu theilen. Wenn man berücksichtigt, daß dieses Werk Unterricht über alle mechanische Verhältnisse der Bau- und Maschinen-

lehre ertheilen soll, so stellt sich die Nützlichkeit, oder vielmehr die Nothwendigkeit dieser Eintheilung von selbst heraus. Um ein Bauwerk und zumal um eine Maschine vollständig beurtheilen zu können, sind oft die verschiedensten Lehren der Mechanik, z. B. die der Reibung, die der Festigkeit, die der Trägheit, des Stoßes, des Ausflusses u. s. w. in Anspruch zu nehmen, es ist also das Material zum mechanischen Studium eines Bau- oder Maschinenwerkes fast aus allen Theilen der Mechanik zusammenzulesen. Da es nun aber für den praktischen Gebrauch viel zweckmäßiger ist, die mechanischen Lehren über jede Maschine im Zusammenhange studiren zu können, als sie aus fast allen Theilen der Mechanik zusammentragen zu müssen, so möchte die Nützlichkeit der gemachten Theilung außer allem Zweifel sein.

Immer die Anwendung im Praktischen vor Augen habend, bin ich beim Aufsetzen dieses Werkes stets bemüht gewesen, die vorgetragenen Lehren durch passende Beispiele aus dem Leben soviel wie möglich zu erläutern. Mit Recht kann ich aber auch behaupten, daß sich dieses Werk durch die große Anzahl und passende Auswahl durchgerechneter Beispiele vor vielen ähnlichen Werken auszeichnet. Nächstdem hoffe ich auch, daß die große Anzahl der sorgfältig ausgeführten Figuren dem beabsichtigten Zwecke dieser Schrift sehr förderlich sein werde. Endlich muß ich es der Verlagshandlung noch besonders Dank wissen, daß sie dem Werke in aller Hinsicht die vorzüglichste Ausstattung hat zu Theil werden lassen. Auf die Richtigkeit der Rechnungen ist eine besondere Sorgfalt verwendet worden; in der Regel ist jedes Beispiel, und zwar nicht von einer und derselben Person, dreimal durchgerechnet worden. Es möchte daher nicht so leicht sein, wesentliche oder ansehnliche Fehler in denselben aufzufinden. In den Beispielen sowie in den Formeln habe ich immer das preußische Maaß und Gewicht zu Grunde gelegt, in der Erwartung, daß die größere Zahl der Leser mit diesem zu rechnen gewohnt sein werde. Aber auch in Hinsicht auf die Correctheit des hier so schwierigen Druckes möchte wenig zu wünschen übrig bleiben. Die bis jetzt gefundenen Schreib- und Druckfehler sind dem Buche beigefügt. Ich glaube nicht, daß noch eine größere Ergänzung zu diesem Verzeichnisse nöthig sein werde. Eine nähere Prüfung der Zeichnungen wird die Ueberzeugung herbeiführen, daß auch bei Ausführung dieser mit Sorgfalt zu Werke gegangen ist. Größere Zeichnungen, und zumal solche, welche Gegenstände nach allen drei Raumdimensionen abbilden, sind nach der von mir zuerst abgehandelten axonometrischen Projectionsmethode (s. polytechn. Mittheilungen, Band I., Tübin-

gen 1845) ausgeführt. Diese Zeichnungsmethode hat mit der isometrischen Perspective gleiche Vorzüge, zeichnet sich aber von dieser noch dadurch aus, daß sie nicht nur schönere, sondern auch solche Bilder liefert, welche die Vorstellung des abgebildeten Gegenstandes leichter erwecken, als die isometrische Perspective. In der Regel sind die Zeichnungen im Buche so ausgeführt, daß die Breiten- oder Tiefendimensionen bei gleicher Größe im abgebildeten Gegenstande nur halb so groß erscheinen, als die Längen- und Höhendimensionen.

Wesentlich zur Correctheit dieses Werkes haben die Revisionen des Herrn Ernst Röting, Studirenden an der hiesigen Bergakademie, beigetragen, weshalb ich nicht unterlassen kann, meinen Dank hier öffentlich auszusprechen.

Endlich ist es nöthig, dem Leser noch anzuzeigen, daß er in dem Buche viel Neues und manches dem Verfasser Eigenthümliches vorfinden wird. Ohne mich auf viele kleine Artikel, die fast in jedem Capitel vorkommen, einzulassen, will ich den Leser nur auf folgende umfassendere Gegenstände aufmerksam machen. Eine allgemeine und leicht ausführbare Bestimmung der Schwerpunkte ebener Flächen und ebenflächiger Polyeder wird man in den Paragraphen 107, 112 und 113 finden, eine angenäherte Formel für die Kettenlinie in dem Paragraphen 148; Ergänzungen zur Axenreibung in den Paragraphen 167, 168, 169, 172 und 173. Die Lehre vom Stoße wird namentlich durch die Paragraphen 277 und 278 eine wesentliche Ergänzung erhalten haben, da man seither den Stoß unvollkommen elastischer Körper zu wenig berücksichtigt, und den Fall, wenn ein vollkommen elastischer Körper mit einem unvollkommen elastischen Körper zusammenstößt, gar nicht betrachtet hat. Die meisten Ergänzungen und zum Theil ganz neue Gesetze wird man allerdings in der Hydraulik mitgetheilt finden, da ich diesen Theil schon seit einer Reihe von Jahren zu einem Gegenstande meiner speciellen Studien gemacht habe. Die Gesetze der vom Verfasser zuerst beobachteten unvollkommenen Contraction der Wasserstrahlen treten hier zum ersten Male in einem Lehrbuche der Mechanik auf. Ebenso werden die für die Praxis sehr wichtigen Hauptresultate der Versuche des Verfassers über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile mitgetheilt. Endlich führt der Verfasser auch die Hauptergebnisse seiner neuesten Versuche, betreffend den Ausfluß des Wassers durch schiefe Ansatzröhren, gebrochene, krumme und lange gerade Röhren u. s. w. hier auf, obgleich das dritte Heft seiner diese Versuche umfassenden „Untersuchungen im Gebiete der

Mechanik und Hydraulik“ dem Drucke noch nicht hat übergeben werden können. Den Capiteln über die fließenden Wasser, über das Wassermessen und über den Wasserstoß sind ebenfalls durch den Verfasser einige Bereicherungen zu Theil geworden. Die Theorie der Reaction des ausfließenden Wassers, sowie die des Wasserstoßes, nach dem Principe der mechanischen Arbeit, ist ganz neu.

Uebrigens kann ich dem Leser nicht bergen, daß ich jetzt, nach Beendigung des ersten Bandes, auch hin und wieder Einiges anders aufgefaßt oder behandelt zu haben wünsche; doch muß ich hinzufügen, daß sich wesentliche Mängel mir noch nicht herausgestellt haben. Wenn hie und da noch Manches vermißt wird, so muß ich auf den zweiten Band verweisen, welcher nicht bloß zufällig, sondern meist absichtlich Ergänzungen zum ersten Bande nachbringen wird, wie auch schon im ersten Bande an vielen Stellen angedeutet wird. Der Druck des zweiten Bandes wird nun seinen ununterbrochenen Fortgang haben, so daß sich erwarten läßt, daß das ganze Buch am Ende dieses Jahres in den Händen der Leser sein werde. Auch wird nun bald das unter dem Namen „der Ingenieur“ in der Mechanik citirte Hülfsbuch, welches in einer Sammlung von Formeln, Regeln und Tabellen der Arithmetik, Geometrie und Mechanik besteht, erscheinen.

Es sollte mir eine große Beruhigung und Freude gewähren, wenn mit diesem Werke das erreicht wird, was ich damit bezielt habe, nämlich Praktikern ein nützlicher Rathgeber in Fällen der Anwendung, Lehrern der praktischen Mechanik ein brauchbarer Leitfaden beim Unterrichte, und Studirenden des Ingenieur- und Maschinenwesens ein willkommenes Hülfsmittel zur Erlernung der Mechanik zu sein.

Freiberg, den 19. März 1846.

Julius Weisbach.

# Vorrede zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage vom ersten Bande der Ingenieur- und Maschinenmechanik ist in der Methode und Anordnung nicht wesentlich von der ersten Auflage verschieden. Nur der innere Ausbau dieses Werkes hat mit dieser zweiten Auflage manche Veränderungen und Vervollständigungen erlitten, auch ist die Ausdehnung desselben nicht unbedeutend größer geworden. Ueberdies hat sich der Verfasser bemüht, die bemerkten Mängel und Unrichtigkeiten so viel wie möglich in dieser zweiten Bearbeitung zu beseitigen. Die größere Ausdehnung dieser Auflage ist besonders aus drei Zugaben erwachsen. Die erste derselben besteht in einer gedrängten und möglichst populären Darstellung des sogenannten Infinitesimalcalcüls am Kopfe des ganzen Werkes, und ist besonders deshalb hinzugefügt worden, um verwickelte und zu gekünstelte Entwickelungen mittels des niederen Calcüls zu vermeiden, und um zugleich dem Leser mehr Selbstständigkeit in der Mechanik zu verschaffen und ihn auf einen höheren Standpunkt in diesem wichtigen Gebiete zu stellen. Durch Anwendung der in diesem Vorcurs enthaltenen Lehren aus der Analysis ist es möglich geworden, auch solche praktisch wichtige Gegenstände mit in den Vortrag aufzunehmen, welche sich entweder gar nicht oder nur sehr unvollständig mittels der elementaren Algebra und Geometrie behandeln lassen. Um aber Denjenigen, welche sich mit den vorausgeschickten Elementen der Differenzial- und Integralrechnung nicht bekannt gemacht haben, keine Störungen zu bereiten, sind alle diejenigen Paragraphen, in welchen die Anwendung dieses Calcüls vorkommt, durch eine Parenthese ( ) besonders ausgezeichnet worden.

Die zweite Zugabe besteht in einem neuen Capitel in der Hydrostatik, und behandelt die Molecularwirkungen des Wassers. Da die Kenntniß der Molecularkräfte (Capillarität) bei hydraulischen und pneumatischen Beobachtungen und Messungen von Wichtigkeit ist, so hat es der Verfasser für zweckmäßig gehalten, in einem besonderen Capitel die Hauptlehren über diese Kräfte des Wassers hier einzuschalten. Endlich ist dem ganzen Werke noch ein Capitel über die Schwingungen und Wellenbewegungen als Anhang beigegeben worden. Der Verfasser hat sich dazu bewogen gefunden, weil eine nähere Kenntniß der Schwingungen für den Ingenieur von großer Wichtigkeit ist. Der große Einfluß, welchen die Schwingungen auf den Gang und auf die Haltbarkeit und Dauerhaftigkeit der Maschinen und anderer Bauwerke ausüben, ist ein Gegenstand, dem man nicht zu viel Aufmerksamkeit schenken kann! Ueberdies verdanken wir den Schwingungsbeobachtungen die neuesten Bestimmungen der für die Praxis so sehr wichtigen Elasticitätsmodeln. Auch der magnetischen Kraft habe ich in dem Anhange gedacht, vorzüglich weil dieselbe dem Ingenieur beim Orientiren in unterirdischen Räumen und an Orten, welche keine freie Aussicht gewähren, sehr wichtige Dienste leistet. Die Theorie der Wasserwellen, welche den Schluß dieses Bandes ausmacht, gehört ganz in die Hydraulik; ihre Aufnahme in diese Schrift bedarf daher keiner weiteren Rechtfertigung. Leider läßt sie nur noch Vieles zu wünschen übrig!

Was den übrigen Theil dieser Schrift anlangt, so hat vorzüglich das Capitel über die Elasticität und Festigkeit umfänglichere Veränderungen und Ergänzungen erfahren; nächstdem ist aber auch der Hydraulik durch die fortgesetzten Versuche des Verfassers manche Ergänzung und Berichtigung zu Theil geworden.

Möchte auch diese zweite Auflage sich der Beachtung und des Beifalles erfreuen, womit die erste Auflage aufgenommen und der Verfasser in der weiteren Bearbeitung dieses Werkes aufgemuntert worden ist.

Freiberg, den 15. Mai 1850.

**Julius Weisbach.**

# Vorrede zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage von dem ersten Bande meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, hat im Vergleich zu ihren Vorgängerinnen nicht allein mehrfache Verbesserungen, sondern auch vielfache Ergänzungen und Zusätze erhalten. Es sind dieselben vorzüglich aus den Fortschritten der Wissenschaft und zumal aus den Ergebnissen neuerer Forschungen hervorgegangen. Den hier und da ausgesprochenen Wünschen in Betreff dieses Werkes habe ich so viel wie möglich Folge geleistet; wenn es nicht immer geschehen ist, so hatte ich hierzu gewiß hinreichende Gründe. Da ich wegen des außerordentlichen Beifalles, welchen dieses Werk in- und außerhalb Deutschlands, sowie diesseits und jenseits des Oceans gefunden hat, hoffen konnte, daß dasselbe in der Methode und im Umfang den Wünschen des größeren Publicums, für welches es bestimmt ist, entspreche, so mußte bei Bearbeitung dieser neuen Auflage mein Bestreben nur dahin gerichtet sein, die bemerkten Fehler und Mängel aus demselben zu entfernen, und die vollständigeren und sicheren Ergebnisse neuerer Untersuchungen dem Buche, in der demselben eigenthümlichen Behandlungsweise und mit möglichster Einschränkung des Raumes, einzuverleiben. Leid thut mir es, bemerken zu müssen, daß dem Buche auch ganz ungerechte Vorwürfe gemacht worden sind. So zeigt z. B. Herr Professor Wiebe in Berlin, in einer Anmerkung auf Seite 245 und 246 seines Werkes über „die Lehre von der Befestigung der Maschinentheile" (Berlin 1854) an, daß ich die Torsionscoefficienten für quadratische Schäfte sowohl in meiner „Mechanik" (I. Aufl.) als auch im „Ingenieur" 16mal größer als die Morin'schen angegeben habe. Hier-

bei hat aber Herr Wiebe übersehen, daß dafür auch in meinen Formeln wie in beiden Schriften ausdrücklich gesagt wird, die vierten Potenzen der halben Seitenlängen vorkommen, während die Formeln von Morin und Wiebe, sowie auch die der zweiten Auflage meiner „Mechanik“ (von 1850) die vierten Potenzen der ganzen Seitenlänge des quadratischen Querschnittes enthalten. Da nun aber $2^4$ gleich 16 ist, so läuft diese Anzeige des Herrn Wiebe auf einen Irrthum seinerseits hinaus.

Auf den partheiischen, aus einer sehr anspruchsvollen Feder geflossenen Tadel in Grunert's Archiv, erwidere ich hier nichts, um an diesem Orte nicht einen unnützen Streit zu führen. Uebrigens hat der Herr Professor Grunert in seinem Archiv der Mathematik aus der physischen und praktischen Mechanik schon Unsinn genug drucken lassen — wie ich leicht beweisen kann —, um dadurch seine Unfähigkeit zur Beurtheilung praktisch-mechanischer Schriften an den Tag zu legen! Das Buch ist für ein praktisches Publicum geschrieben, und würde sicherlich nicht den Beifall gefunden haben, welchen es gefunden hat, wenn ich ihm, was mir allerdings viel leichter geworden wäre, ein ganz wissenschaftliches Gewand gegeben hätte. Von einem anderen Standpunkte aus läßt sich allerdings das Buch leicht, jedoch eben so sehr auch ungerecht, tadeln. Wer sich nur etwas in der Praxis umgesehen hat, wird wahr genommen haben, wie wenig dieselbe noch von der Theorie Gebrauch macht, und wie nicht selten die Theorie von den Praktikern hinten angesetzt wird und in Mißcredit steht. Daran hat gewiß die sogenannte gelehrte Unterrichtsmethode, welche es als ein Verbrechen ansieht, die Wissenschaft ihrer Anwendung wegen zu studiren, ihren größten Antheil!

Außer vielfachen kleineren Ergänzungen erstrecken sich die Erweiterungen dieser neuen Auflage vorzüglich auf eine ganz neue Bearbeitung der Lehre von der Elasticität und Festigkeit, und auf die Einschaltung der Ergebnisse der neuesten hydraulischen Versuche. Aber nicht allein durch ihren Inhalt, sondern auch durch ihre Ausstattung zeichnet sich diese neue Auflage der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik vor ihren älteren Schwestern aus, zumal da dieselbe lauter neu gestochene und schönere Abbildungen erhalten hat. Der Druck der dritten Auflage des zweiten Bandes geht ohne Unterbrechung fort.

Freiberg, im Juli 1856.

**Julius Weisbach.**

# Vorrede zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage meiner Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, hat weder in der Methode, noch in der Anordnung des Stoffes eine Veränderung erlitten. Der ziemlich schnelle Absatz von drei starken Auflagen des Werkes und das Erscheinen zweier Ausgaben desselben in englischer Sprache, und zwar in England und Nord-Amerika, sowie die Uebersetzungen dieses Werkes in das Schwedische, Polnische und Russische lassen mich wohl hoffen, daß mit dieser Schrift den Wünschen und Bedürfnissen des größeren praktischen Publicums, für welches sie bestimmt ist, entsprochen worden ist. Deshalb habe ich mich bei Bearbeitung dieser neuen Auflage nur darauf beschränkt, die bemerkten Mängel und Fehler aus dem Werke zu entfernen und die neuen praktisch wichtigen Erfahrungsresultate und theoretischen Errungenschaften demselben einzuverleiben. So habe ich z. B. im Capitel über die Reibung die Resultate der neuesten Versuche von Bochet mit aufgenommen, und den Abschnitt über die Elasticität und Festigkeit dem dermaligen Standpunkte der Wissenschaft und Praxis entsprechend neu bearbeitet, und hierbei die neueren Schriften von Lamé, Rankine, Bressé u. s. w. benutzt. Vielfache Ergänzungen, Zusätze und Verbesserungen hat endlich auch der Abschnitt über die Hydraulik erlitten. Hier haben vorzüglich die Ergebnisse der neueren Forschungen des Verfassers einen Platz gefunden. Namentlich sind es die Versuche über den Ausfluß des Wassers unter hohem und sehr hohem Drucke, sowie die über die Steighöhe springender Wasserstrahlen, ferner die Versuche über das Ausströmen der Luft und die vergleichenden Versuche über den Stoß von Luft- und Wasserstrahlen, welche dem Buche zugefügt worden sind. Das Capitel über den Ausfluß der

Luft ist gänzlich umgearbeitet worden, weil der Verfasser die Ueberzeugung hat, daß die gewöhnlichen Formeln über den Ausfluß der Luft bei höherem Drucke das Ausflußgesetz nicht richtig darstellen. Die gewonnenen Formeln sind deshalb sehr einfach ausgefallen, weil ich hier, ohne die Genauigkeit innerhalb ziemlich weiter Grenzen zu beeinträchtigen, in der bekannten Wärmeformel

$$\frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{0,42}$$

den Exponenten 0,42 in 0,50 umgeändert, also

$$\frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}$$ gesetzt habe (s. §. 461).

Es hängt ja die Brauchbarkeit einer Formel nicht davon ab, ob sie in den äußersten Grenzen noch richtig ist, sondern nur davon, ob sie sich innerhalb gegebener Grenzen mit hinreichender Genauigkeit an die Resultate der Erfahrung anschließt.

Mehrere neue Paragraphen sind auch den analytischen Hülfslehren der Phoronomie und Aërostatik zugefügt, auch ist in der Hydraulik der Druck des durch Röhren fließenden Wassers in zwei neuen Paragraphen (§. 439 und §. 440) wegen seiner praktischen Wichtigkeit besonders abgehandelt worden. Ferner habe ich in dem Capitel über die Kraft und den Widerstand des Wassers die Theorie des einfachen Reactionsrades, sowie die Anwendung dieser Maschine als Mittel zur Prüfung der Theorie des Stoßes und der Reaction des Wassers abgehandelt. Auch sind noch die neueren Wasser- und Gasmesser mit aufgenommen worden, weil diese Instrumente durch die Reaction einer ausströmenden Flüssigkeit in Umdrehung gesetzt werden, deren Größe nach der vorausgegangenen Theorie leicht zu beurtheilen ist.

Endlich hat noch der Anhang durch das Referat der neueren Forschungen des Herrn Geh. Oberbaurath Hagen über die Wasserwellen eine kleine Ergänzung erhalten.

Die äußere Ausstattung dieser neuen Auflage möchte wohl kaum Etwas zu wünschen übrig lassen, die Abänderungen in den Ueberschriften und den Marginalien gereichen dem Gebrauch des Buches gewiß nur zum Vortheil; insbesondere wird durch die Angabe der Paragraphennummern in den Ueberschriften das Aufsuchen von citirten Stellen sehr erleichtert.

Wenn sich hier und da eine Stimme vernehmen läßt, welche behauptet, daß es dem Zweck des Buches förderlicher gewesen wäre, wenn es ein

wissenschaftlicheres Gewand und die höhere Analysis zur Grundlage erhalten hätte, so muß ich hierauf entgegnen, daß das Buch insbesondere zum Privatstudium und Nachschlagen für Praktiker geschrieben ist, und daß im Allgemeinen bei denselben die Kenntniß und Fertigkeit in Handhabung der Differenzial- und Integralrechnung nicht vorausgesetzt werden kann. Nachdem ich ein Menschenalter lang als Lehrer an einer technischen Lehranstalt gewirkt und hierbei stets in vielfachem Verkehr mit der Praxis gestanden, sowie auch auf Reisen mannichfaltige Fachstudien gemacht habe, kann ich mir wohl über diesen Gegenstand ein sicheres Urtheil zutrauen! Wenn endlich meine Ingenieur- und Maschinen-Mechanik bis in die neueste Zeit noch in verwandten Schriften vielfach benutzt worden ist, so kann ich mich, da mir literarische Ehre viel höher steht als pecuniärer Vortheil, nur darüber freuen, wenn aber in einigen Schriften von meiner Ingenieur- und Maschinen-Mechanik vielfacher Gebrauch gemacht wird, ohne dieselbe an irgend einer Stelle zu citiren, so kann ich wohl mit Recht deshalb an das Urtheil des Publicums appelliren.

Freiberg, im Mai 1863.

Julius Weisbach.

# Inhalt des ersten Theiles.

## Hülfslehren aus der Analysis.



## Erster Theil.

## Die allgemeinen Lehren der Mechanik.

### Erster Abschnitt.

### Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

#### Erstes Capitel.

#### Die einfache Bewegung.

## Zweites Capitel.

### Zusammengesetzte Bewegung.



# Zweiter Abschnitt.

## Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

### Erstes Capitel.

### Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

### Zweites Capitel.

### Mechanik des materiellen Punktes.



## Dritter Abschnitt.

## Statik fester Körper.

### Erstes Capitel.

### Allgemeine Lehren der Statik fester Körper.



### Zweites Capitel.

### Die Lehre vom Schwerpunkte.

## Drittes Capitel.

### Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper.



## Viertes Capitel.

### Gleichgewicht an den Seilmaschinen.



## Fünftes Capitel.

### Die Widerstände der Reibung und Steifigkeit der Seile.

## Vierter Abschnitt.

## Die Anwendung der Statik auf die Elasticität und Festigkeit.

### Erstes Capitel.

### Die Zug-, Druck- und Schub-Elasticität und Festigkeit.



### Zweites Capitel.

### Die Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

## Drittes Capitel.

### Die Wirkung der Schub-Elasticität bei der Biegung und der Drehung der Körper.



## Viertes Capitel.

### Die Tragkraft langer Säulen oder die Festigkeit des Zerknickens.

### Fünftes Capitel.

### Die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.



## Fünfter Abschnitt.

## Dynamik fester Körper.

### Erstes Capitel.

### Die Lehre von den Trägheitsmomenten.



### Zweites Capitel.

### Die Centrifugalkraft starrer Körper.

## Drittes Capitel.

### Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Wegen.



## Viertes Capitel.

### Die Lehre vom Stoße.

## Sechster Abschnitt.

## Statik flüssiger Körper.

### Erstes Capitel.

### Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen.



### Zweites Capitel.

### Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern.



### Drittes Capitel.

### Von den Molecularwirkungen des Wassers.



### Viertes Capitel.

### Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

## Siebenter Abschnitt.

## Dynamik flüssiger Körper.

### Erstes Capitel.

### Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.



### Zweites Capitel.

### Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

## Drittes Capitel.

### Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren.



## Viertes Capitel.

### Von den Hindernissen des Wassers beim Durchgange durch Verengungen.



## Fünftes Capitel.

### Von dem Ausflusse des Wassers unter veränderlichem Drucke.

## Sechstes Capitel.

### Von dem Ausflusse der Luft und anderer Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.



## Siebentes Capitel.

### Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.



## Achtes Capitel.

### Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen.

## Neuntes Capitel.

### Von der Kraft und dem Widerstande der Flüssigkeiten.



# Anhang.

## Die Theorie der Schwingungen.

# Hülfslehren aus der Analysis.

---

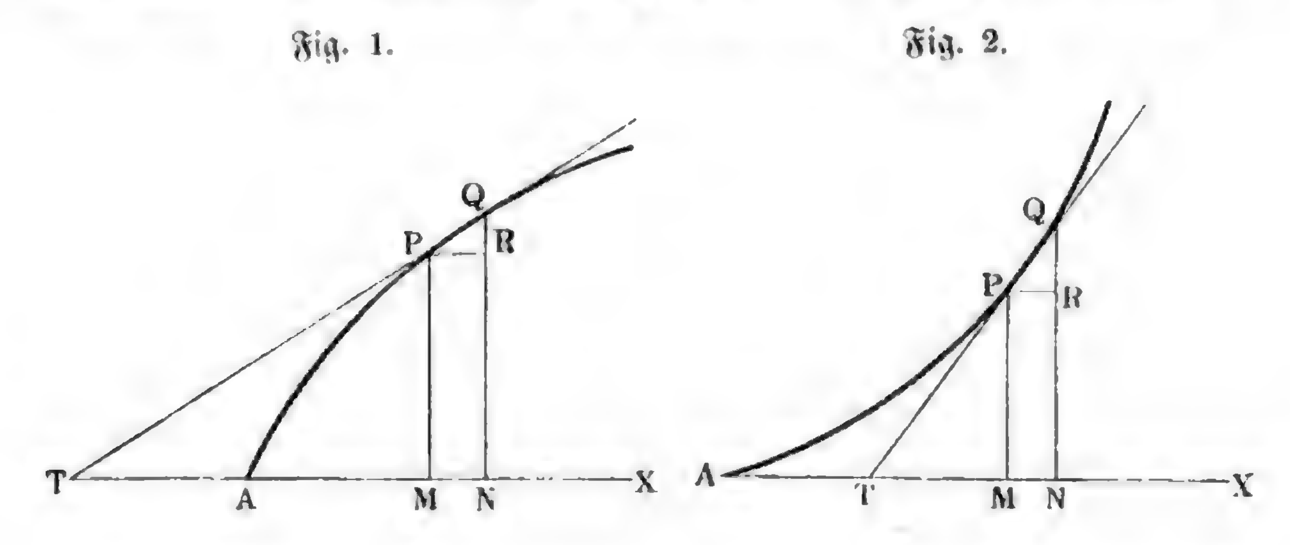
Art. 1. Die Abhängigkeit einer Größe $y$ von einer anderen Größe $x$ wird durch eine mathematische Formel, z. B. $y = 3x^2$, oder $y = ax^m$ u. s. w. angegeben. Man schreibt allgemein $y = f(x)$ oder $z = \varphi(y)$ u. s. w., und nennt $y$ eine *Function* von $x$, sowie $z$ eine *Function* von $y$. Die Zeichen $f$, $\varphi$ u. s. w. deuten nur allgemein an, daß $y$ von $x$, oder $z$ von $y$ abhänge; sie lassen die Abhängigkeit dieser Größen von einander ganz unbestimmt, schreiben also die algebraische Operation, durch welche $y$ aus $x$, oder $z$ aus $y$ hervorgeht, nicht vor.

Eine Function $y = f(x)$ ist eine unbestimmte Gleichung; es giebt unendlich viele Werthe von $x$ und $y$, welche derselben entsprechen, giebt man jedoch die eine ($x$), so ist die andere ($y$) durch die Function bestimmt, und verändert man die eine, so erleidet die andere ebenfalls eine Veränderung. Man nennt deshalb die unbestimmten Größen $x$ und $y$ *Variablen* oder *veränderliche Größen*, dagegen die gegebenen oder als gegeben anzusehenden Größen, welche also die Operation vorschreiben, durch welche $y$ aus $x$ hervorgeht, *Constanten* oder *beständige Größen*. Von den veränderlichen Größen heißt diejenige, welche willkürlich anzunehmen ist, die *Urvariable*, und dagegen diejenige, welche als Function der letzteren durch eine bestimmte Operation aus dieser bestimmt wird, die *Abhängigvariable*. In $y = ax^m$ sind $a$ und $m$ die Constanten und es ist $x$ die Ur-, dagegen $y$ die Abhängigvariable.

Die Abhängigkeit einer Größe $z$ von zwei anderen $x$ und $y$ wird durch

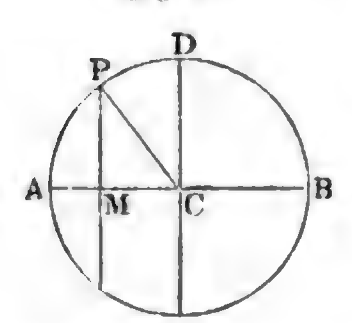
das Zeichen $z = f(x, y)$ ausgedrückt. Es ist in diesem Falle $z$ Function von $x$ und $y$ zugleich, und man hat es daher hier mit zwei Urvariablen zu thun.

Art. 2. Jede durch eine Function oder Formel $y = f(x)$ ausgedrückte Abhängigkeit einer Größe $y$ von einer andern Größe $x$ läßt sich durch eine ebene Curve oder krumme Linie $APQ$, Fig. 1 und Fig. 2, darstellen; den




verschiedenen Werthen der Urvariablen $x$ entsprechen die Abscissen $AM$, $AN$ u. s. w., und den verschiedenen Werthen der Abhängigvariablen $y$ die Ordinaten $MP$, $NQ$ u. s. w. der Curve. Die Coordinaten (Abscissen und Ordinaten) der Curve stellen also die beiden Variablen der Function vor.

Die graphische oder bildliche Darstellung einer Function oder die Zurückführung derselben auf eine Curve vereinigt mehrere Vortheile in sich. Sie liefert uns erstens einen Ueberblick über den Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Größen; sie ersetzt uns zweitens die Stelle einer Tabelle oder eines Inbegriffes von je zwei zusammengehörigen Werthen einer Function, und sie verschafft uns drittens die Kenntniß von den mannigfaltigsten Eigenschaften und Beziehungen der Functionen. Der mit dem Halbmesser $CA = CB = r$ beschriebene Kreis $ADB$, Fig. 3, welcher der Function $y = \sqrt{2rx - x^2}$ entspricht, worin $x$ und $y$ die Coordinaten $AM$ und $MP$ bezeichnen, gewährt uns z. B. nicht allein eine Uebersicht über die verschiedenen Werthe, welche diese Function annehmen kann, sondern macht uns auch mit anderen Eigenthümlichkeiten dieser Function bekannt, da die Eigenschaften des Kreises auch ihre Bedeutung in der Function haben. Wir wissen z. B. hiernach, ohne weitere Untersuchungen, daß $y$ nicht allein für $x = 0$, sondern auch für $x = 2r$ zu Null wird, daß ferner $y$ ein Maximum und zwar $= r$ wird, wenn $x = r$ ist, u. s. w.



Art. 3. Die Naturgesetze lassen sich in der Regel durch Functionen zwischen zwei oder mehreren Größen ausdrücken und sind deshalb auch meist einer graphischen Darstellung fähig.

(1) Beim freien Fallen der Körper im luftleeren Raume hat man z. B. für die Fallgeschwindigkeit $y$, welche der Fallhöhe $x$ entspricht, $y = \sqrt{2\,g\,x}$; diese Formel stimmt aber auch mit der Gleichung $y = \sqrt{p\,x}$ der Parabel überein, wenn man den Parameter ($p$) der letzteren gleichsetzt der doppelten Beschleunigung ($2\,g$) der Schwere; daher läßt sich auch das Fallgesetz durch eine Parabel $A\,P\,Q$, Fig 4, mit dem Parameter $p = 2\,g$ graphisch darstellen. Die Abscissen $A\,M$, $A\,N$ . . dieser Curve sind natürlich die Fallräume, und die entsprechenden Ordinaten $M\,P$, $N\,Q$ . . die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Fig. 4.

(2) Ist $a$ ein gewisses Luftvolumen unter der Pressung von 1 Atmosphäre, so hat man, dem Mariotte'schen Gesetze zufolge, das Volumen derselben Luftmenge unter der Pressung von $x$ Atmosphären: $y = \frac{a}{x}$.

Für $x = 1$, ist $y = a$, für $x = 2$, $y = \frac{a}{2}$, für $x = 4$, $y = \frac{a}{4}$,

für $x = 10$, ist $y = \frac{a}{10}$, für $x = 100$, $y = \frac{a}{100}$, für $x = \infty$, $y = 0$;

man sieht also, daß das Volumen immer kleiner und kleiner wird, je größer die Spannung ist, und daß, wenn das Mariotte'sche Gesetz bei allen Spannungen richtig bliebe, einer unendlich großen Spannung $x$ ein unendlich kleines Volumen $y$ entspräche.

Ferner: $x = 1/2$ giebt $y = 2\,a$, $x = 1/4$ giebt $y = 4\,a$,
$x = 1/10$ „ $y = 10\,a$, $x = 0$ „ $y = \infty\,a$,

je kleiner hiernach die Spannung wird, desto größer fällt dagegen das Volumen aus, und wenn die Spannung unendlich klein ist, so stellt sich das Volumen unendlich groß heraus.

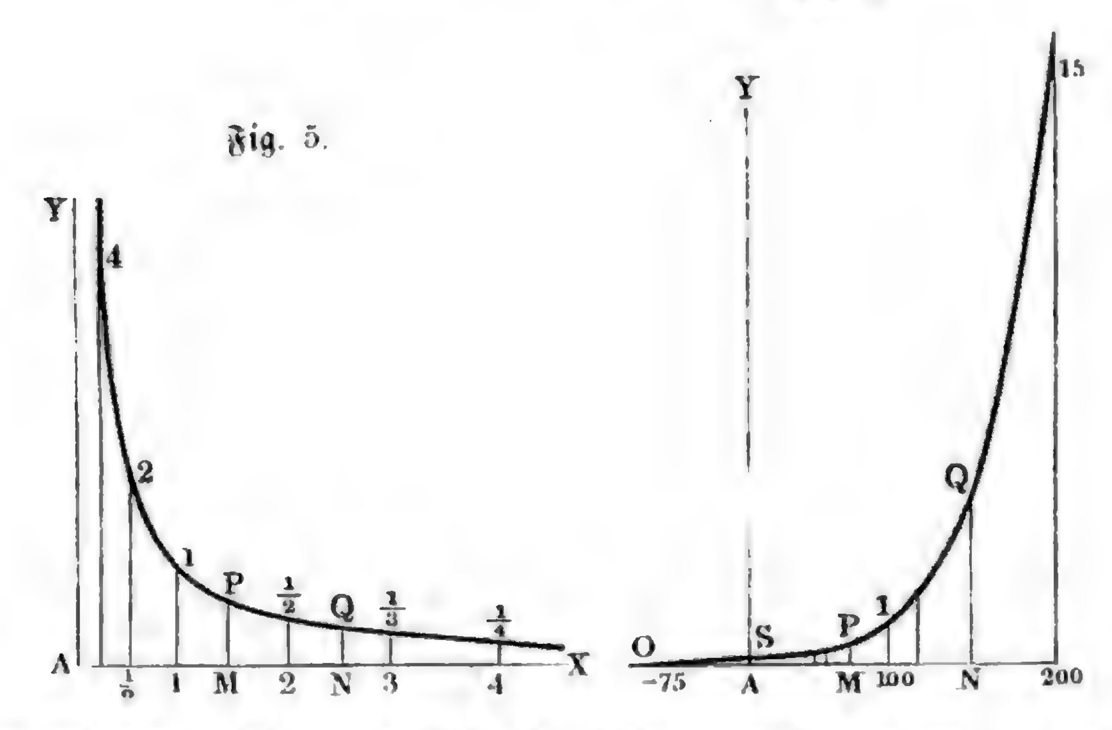
Die Curve, welche diesem Gesetze entspricht, ist in Fig. 5 (a. f. S.) abgebildet; $A\,M$, $A\,N$ . . sind die Spannungen oder Abscissen $x$, $M\,P$, $N\,Q$ . . die entsprechenden Volumina oder Ordinaten $y$. Man sieht, diese Curve nähert sich allmälig den Axen $A\,X$ und $A\,Y$ der Coordinaten, ohne sie je zu erreichen.

(3) Die Abhängigkeit der Expansivkraft $y$ des gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur $x$ läßt sich wenigstens innerhalb gewisser Grenzen durch die Formel:

$$y = \left(\frac{a + x}{b}\right)^m \text{ Atmosphären}$$

ausdrücken, und es ist erfahrungsmäßig, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, $a = 75$, $b = 175$ und $m = 6$. Wenn wir hiernach

$$y = \left(\frac{75 + x}{175}\right)^6$$




setzen und eine unbeschränkte Richtigkeit dieser Formel annehmen, so erhalten wir:

Für $x = 100^0$, $y = \left(\frac{175}{175}\right)^6 = 1{,}000$ Atmosphäre,

" $x = 50^0$, $y = \left(\frac{125}{175}\right)^6 = 0{,}133$ "

" $x = 0^0$, $y = \left(\frac{75}{105}\right)^6 = 0{,}006$ "

" $x = -75^0$, $y = \left(\frac{0}{175}\right)^6 = 0{,}000$ "

ferner für $x = 120^0$, $y = \left(\frac{195}{175}\right)^6 = 1{,}914$ "

" $x = 150^0$, $y = \left(\frac{225}{175}\right)^6 = 4{,}517$ "

" $x = 200^0$, $y = \left(\frac{275}{175}\right)^6 = 15{,}058$ "

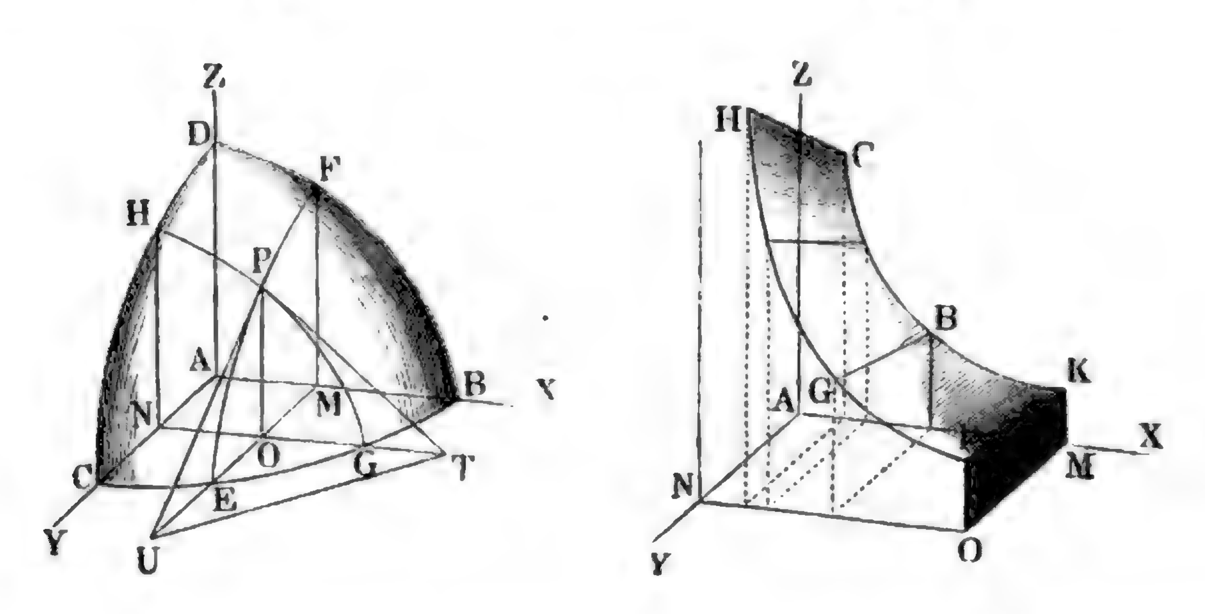
Die entsprechende Curve führt $PQ$, Fig. 6, vor Augen; man sieht, dieselbe geht in einem Abstande $AO = -75$ vom Anfangspunkte $A$ der Coordinaten durch die Abscissenaxe, und in einem Abstande $AS = 0{,}006$

von eben diesem Punkte durch die Ordinatenaxe; ferner einer Abscisse $AM < 100$ entspricht eine Ordinate $MP$ unter 1 und einer Abscisse $AN > 100$ gehört die Ordinate $NQ > 1$ zu; auch ist wahrzunehmen, daß nicht nur $y$ mit $x$ ins Unendliche wächst, sondern auch, daß die Curve immer steiler und steiler ansteigt, je größer $x$ wird.

Art. 4. Eine Function $z = f(x,y)$ mit zwei Urvariablen läßt sich durch eine krumme Fläche $BCD$, Fig. 7, darstellen, in welcher die Urvariablen $x$ und $y$ durch die Abscissen $AM$ und $AN$ auf den Axen $AX$ und $AY$, und die Abhängigvariable $z$ durch die Ordinate $OP$ eines Punktes $P$ in der Fläche $ABC$ repräsentiren. Giebt man bei einem bestimmten Werthe von $x$, $y$ verschiedene Werthe, so erhält man in $z$ die Ordinaten der Punkte einer mit der Coordinatebene $YZ$ parallel laufenden Curve $EPF$; nimmt man dagegen bei einem bestimmten Werthe von $y$ für $x$ verschiedene Werthe an, so ergeben sich in $z$ die Ordinaten der Punkte einer mit der Coordinatebene $XZ$ parallel laufenden Curve $GPH$. Es läßt sich folglich die ganze krumme Fläche $BCD$ als eine stetige Verbindung von mit den Coordinatebenen parallel laufenden Curven ansehen.

Das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz $z = \frac{a(1+\delta y)}{x}$, wonach sich das Volumen $z$ einer Luftmenge aus der Pressung $x$ und Temperatur $y$ desselben berechnen läßt, ist durch die krumme Fläche $CKPH$, Fig. 8, graphisch darzustellen. Es ist $AM$ die Pressung $x$, $ANMO$ die Temperatur

Fig. 7. Fig. 8.




$y$ und $OP$ das entsprechende Volumen $z$, ferner geben die Coordinaten der Curve $PGH$ die Volumina bei einer und derselben Temperatur $AN = y$, sowie die der Geraden $KP$ die Volumina bei einer und derselben Pressung $AM = x$ an.

Art. 5. Wenn man die Urvariable einer Function oder Abscisse $AM = x$, Fig. 9 und Fig. 10, der entsprechenden Curve um eine unendlich kleine, künftig durch $\partial x$ zu bezeichnende Größe $MN$ wachsen läßt, so geht die entsprechende Abhängigvariable oder Ordinate $MP = y$ in $NQ = y_1$ über, und wird um den durch $\partial y$ zu bezeichnenden unendlich kleinen Werth $RQ = NQ - MP$ größer. Beide Wachsthümer $\partial x$ und $\partial y$ von $x$ und $y$ nennt man Differenziale oder Elemente der Veränderlichen oder Coordinaten $x$ und $y$, und es ist nun unsere Hauptaufgabe, für die am häufigsten vorkommenden Functionen die Differenziale, oder vielmehr die Verhältnisse zwischen den zusammengehörigen Elementen ihrer Variablen $x$ und $y$ zu finden. Setzt man in der Function $y = f(x)$, wo $x$ die Abscisse $AM$ und $y$ die Ordinate $MP$ vorstellt,

statt $x$: $x + \partial x = AM + MN = AN$, so erhält man
statt $y$: $y + \partial y = MP + RQ = NQ$, also:

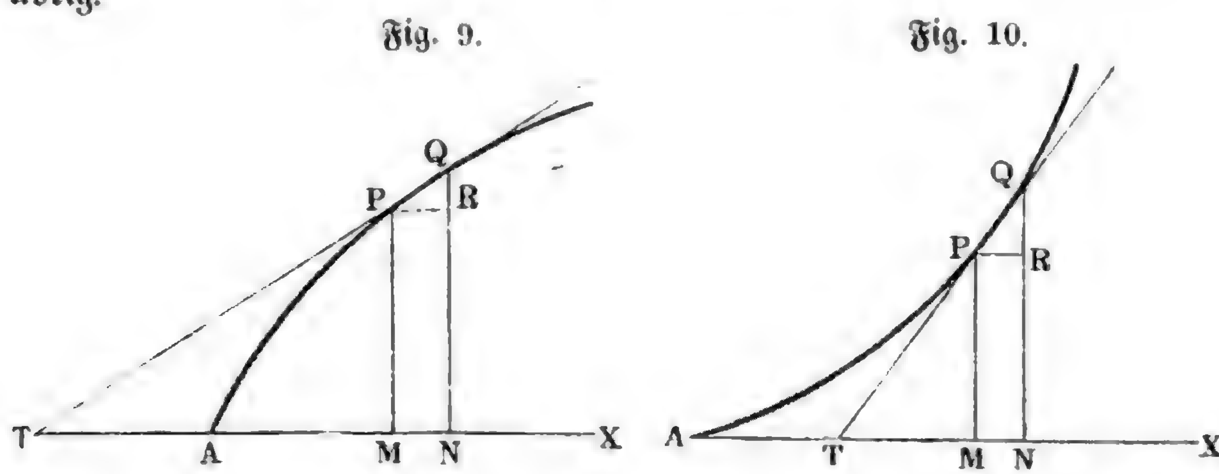
$$y + \partial y = f(x + \partial x),$$

und zieht man hiervon den ersten Werth von $y$ ab, so bleibt das Element oder Differenzial der Variablen $y$, d. i.:

$$\partial y = \partial f(x) = f(x + \partial x) - f(x)$$

übrig.

Fig. 9. Fig. 10.




Dies ist die allgemeinste Regel zur Bestimmung des Differenziales einer Function, aus welcher sich durch Anwendung auf verschiedene Functionen wieder andere mehr oder weniger allgemeine Regeln ableiten lassen.

Ist z. B. $y = x^2$, so hat man:

$$\partial y = (x + \partial x)^2 - x^2,$$

oder, da

$$(x + \partial x)^2 = x^2 + 2x\partial x + \partial x^2$$

zu setzen ist:

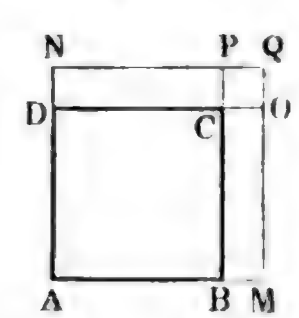
$$\partial y = 2x\partial x + \partial x^2 = (2x + \partial x)\,\partial x;$$

und einfacher, da $\partial x$ als unendlich kleine Größe gegen $2x$ verschwindet, oder $2x$ durch Hinzutritt von $\partial x$ nicht angebbar verändert wird und deshalb unbeachtet gelassen werden kann:

$$\partial y = \partial (x)^2 = 2x\partial x.$$

Es entspricht $y = x^2$ dem Inhalte eines Quadrates $ABCD$, Fig. 11, dessen Seite $AB = AD = x$ ist, und es läßt sich auch aus der Figur entnehmen, daß durch Zunahme der Seite um $BM = DN = \partial x$, das Quadrat um zwei Rechtecke $BO$ und $DP = 2x\partial x$ und um ein Quadrat $OP = (\partial x)^2$ wächst, daß also bei einem unendlich kleinen Wachsthum $\partial x$ von $x$ das Quadrat $y = x^2$ um das Element $2x\partial x$ zunimmt.

Fig. 11.




Art. 6. Die gerade Linie $TPQ$, Fig. 9 und 10, welche durch zwei unendlich nahe liegende Punkte $P$ und $Q$ einer Curve geht, heißt Tangente oder Berührungslinie dieser Curve und bestimmt die Richtung derselben zwischen diesen Punkten. Man giebt die Richtung der Tangente durch den Winkel $PTM = \alpha$ an, unter welchem die Abscissenaxe $AX$ von dieser Linie geschnitten wird. Bei einer concaven Curve wie $APQ$, Fig. 9, liegt die Tangente außerhalb der Curve und Abscissenaxe; bei einer convexen Curve $APQ$, Fig. 10, hingegen befindet sie sich zwischen der Curve und Abscissenaxe.

In dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke $PQR$, Fig. 9 und 10, mit den Katheten $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y$ ist der Winkel $QPR$ gleich dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$, und da

$$tang.\, QPR = \frac{QR}{PR}$$

ist, so hat man auch:

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x};$$

es giebt also das Verhältniß oder der Quotient aus den beiden Elementen $\partial y$ und $\partial x$ die trigonometrische Tangente des Tangentenwinkels an.

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man, wenn man $y^2 = px = z$ setzt:

$$\partial z = (y + \partial y)^2 - y^2 = y^2 + 2y\partial y + \partial y^2 - y^2 = 2y\partial y + \partial y^2,$$

oder, da $\partial y^2$ gegen $2y\partial y$, oder, was auf eins herauskommt, $\partial y$ gegen $2y$ verschwindet:

$$\partial z = 2y\partial y,$$

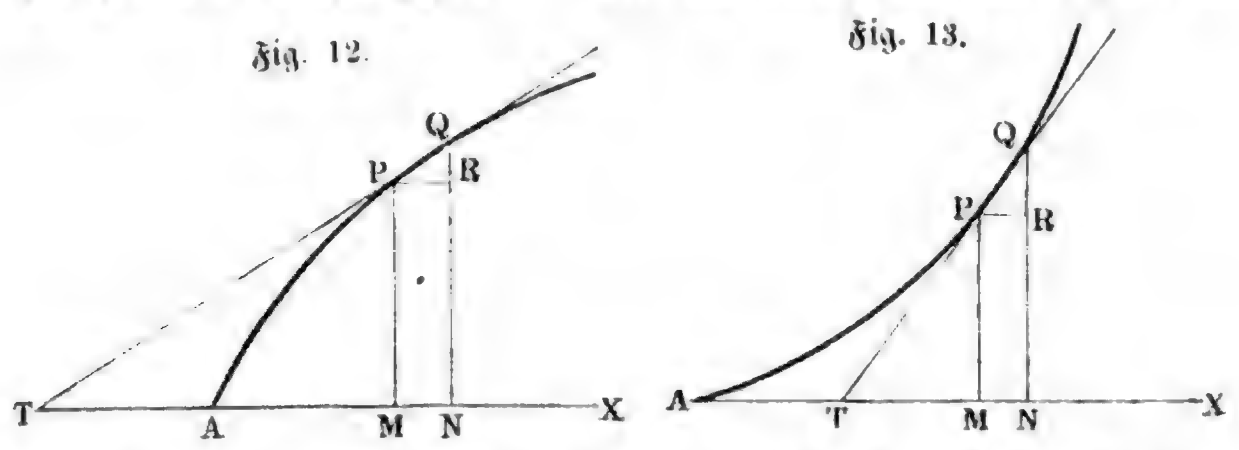
und ebenso:

$$\partial z = p(x + \partial x) - p\partial x.$$

Es ist hiernach $2y\partial y = p\partial x$, und daher für den Tangentenwinkel der Parabel:

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{x}{2y}.$$

In der Regel nennt man das bestimmte Stück $PT$ der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkte $P$ und dem Durchschnittspunkte $T$ mit der




Abscissenaxe Tangente, und die Projection $TM$ desselben in der Abscissenaxe Subtangente, und hat daher:

$$subtang. = PM\ cotang.\ PTM$$
$$= y\ cotang.\ \alpha = y \frac{\partial x}{\partial y},$$

z. B. bei der Parabel:

$$subtang. = y \cdot \frac{2x}{y} = 2x.$$

Es ist also hier die Subtangente der doppelten Abscisse gleich, und hiernach die Lage der Tangente für jeden Punkt $P$ der Parabel leicht anzugeben.

Bei einer krummen Fläche $BCD$, Fig. 7, sind die Neigungswinkel $\alpha$ und $\beta$ von den Tangenten $PT$ und $PU$ an einem Punkte $P$ durch die Formeln

$$tang.\ \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } tang.\ \beta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

bestimmt.

Die durch $PT$ und $PU$ gelegte Ebene $PTU$ ist Tangentialebene der krummen Fläche.

Art. 7. Für eine Function $y = a + mf(x)$ hat man:

$$\partial y = [a + mf(x + \partial x)] - [a + mf(x)]$$
$$= a - a + mf(x + \partial x) - mf(x)$$
$$= m[f(x + \partial x) - f(x)];$$

d. i.:

I.) . . . . . . $\partial[a + mf(x)] = m\partial f(x),$

z. B.:

$$\partial (5 + 3x^2) = 3[(x + \partial x)^2 - x^2] = 3.2x\partial x = 6x\partial x.$$

Es ist ebenso:

$$\partial (4 - \tfrac{1}{2}x^3) = -\tfrac{1}{2}\partial(x)^3 = -\tfrac{1}{2}[(x + \partial x)^3 - x^3]$$
$$= -\tfrac{1}{2}(x^3 + 3x^2\partial x + 3x\partial x^2 + \partial x^3 - x^3)$$
$$= -\tfrac{1}{2}.3x^2\partial x = -\tfrac{3}{2}x^2\partial x.$$

Wir können hiernach folgende wichtige Regel aufstellen: Die constanten Glieder ($a$, 5) einer Function verschwinden beim Differenziiren, und die constanten Factoren ($m$, 3) bleiben hierbei unverändert.

Die Richtigkeit dieser Regel läßt sich auch graphisch darthun. Für die Curve $APQ$, Fig. 14, deren Coordinaten ein Mal $AM = x$ und

Fig. 14.

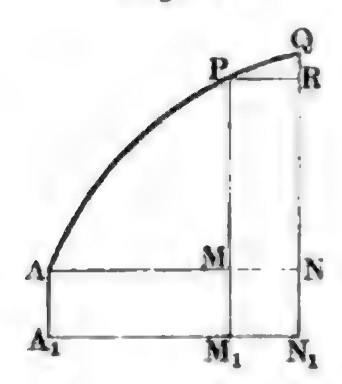
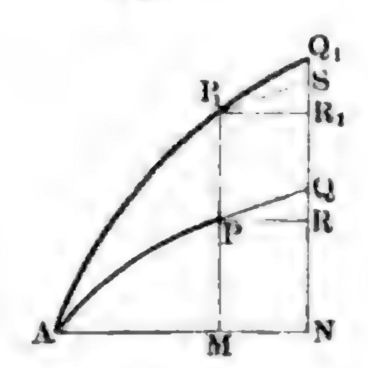



Fig. 15.




$MP = y = f(x)$, und ein anderes Mal $A_1 M_1 = x$ und $M_1 P = a + y = a + f(x)$ sind, ist $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y = \partial f(x)$ und auch $= \partial\,(a + y) = \partial\,[a + f(x)]$; und für die Curven $AP_1 Q_1$ und $APQ$, Fig. 15, deren zusammengehörige Ordinaten $MP_1$ und $MP$, sowie $NQ_1$ und $NQ$ ein gewisses Verhältniß zu einander haben, ist auch das Verhältniß zwischen den Differenzialien

$R_1 Q_1 = NQ_1 - MP_1$ und $RQ = NQ - MP$ beständig dasselbe; denn setzt man $MP_1 = m \,.\, MP$ und $NQ_1 = m \,.\, NQ$, so folgt:

$$R_1 Q_1 = NQ_1 - MP_1 = m(NQ - MP) = m \,.\, QR,$$

d. i.:

$$\partial\,[mf(x)] = m\,\partial f(x).$$

Ist ferner $y = u + v$, also die Summe von zwei Variablen $u$ und $v$, so hat man

$$\partial y = u + \partial u + v + \partial v - (u + v), \text{ d. i. nach Art. 5:}$$

II.) . . . $\partial(u + v) = \partial u + \partial v$; ebenso:

$$\partial\,[f(x) + \varphi(x)] = \partial f(x) + \partial\,\varphi(x).$$

Es ist also das Differenzial von der Summe aus mehreren Functionen gleich der Summe von den Differenzialien der einzelnen Functionen; z. B.:

$$\partial(2x + 3x^2 - {}^1/_2 x^3) = 2\,\partial x + 6x\partial x - {}^3/_2 x^2 \partial x = (2 + 6x - {}^3/_2 x^2)\partial x.$$

Die Richtigkeit dieser Regel ist auch aus der Betrachtung einer Curve $APQ$, Fig. 15, abzuleiten. Ist $MP = f(x)$ und $PP_1 = \varphi(x)$, so hat man:

$$MP_1 = y = f(x) + \varphi(x), \quad \text{und:}$$

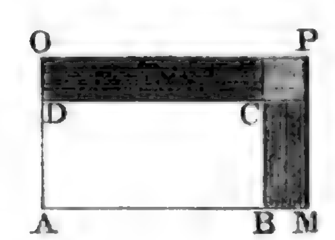
$$\partial y = R_1 Q_1 = R_1 S + SQ_1 = RQ + SQ_1 = \partial f(x) + \partial\,\varphi(x),$$

da $P_1 S$ parallel zu $PQ$ gelegt und deshalb $R_1 S = RQ$ und $QS = PP_1$ gesetzt werden kann.

Art. 8. Ist $y = uv$, also das **Product zweier Variablen**, z. B. der Inhalt eines Rechteckes $ABCD$, Fig. 16, mit den variablen Seiten $AB = u$ und $BC = v$, so hat man:

$$\partial y = (u + \partial u)(v + \partial v) - uv = uv + u\partial v + v\partial u + \partial u \partial v - uv$$
$$= u\partial v + v\partial u + \partial u\partial v = u\partial v + (v + \partial v)u.$$

Fig. 16.




Nun ist aber in $v + \partial v$, $\partial v$ unendlich klein gegen $v$, daher läßt sich

$$v + \partial v = v, \quad \text{und} \quad (v + \partial v)\partial u = v\partial u,$$

sowie

$$u\partial v + (v + \partial v)\partial u = u\partial v + v\partial u$$

setzen, so daß

III.) . . . $\partial(uv) = u\partial v + v\partial u,$

sowie

$$\partial[f(x) \,.\, \varphi(x)] = f(x)\partial\varphi(x) + \varphi(x)\partial f(x)$$

folgt.

Es ist also das **Differenzial eines Productes zweier Variablen gleich der Summe aus den Producten von je einer und dem Differenziale der anderen Variablen.**

Wenn die Seiten des Rechteckes $ABCD$, Fig. 16, um $BM = \partial u$ und $DO = \partial v$ wachsen, so nimmt der Inhalt $y = AB\,.\,AD = uv$ desselben um die Rechtecke $CO = u\partial v$, $CM = v\partial u$ und $CP = \partial u\partial v$ zu, wovon das letztere als unendlich klein gegen die ersteren verschwindet, und es ist daher das Differenzial dieses Flächenraumes nur gleich der Summe $u\partial v + v\partial u$ der Inhalte der beiden Rechtecke $CO$ und $CM$ zu setzen.

Dieser Regel zu Folge ist z. B. für $y = x(3x^2 + 1)$:

$$\partial y = x\partial(3x^2 + 1) + (3x^2 + 1)\partial x = 3x\partial(x^2) + (3x^2 + 1)\partial x$$
$$= 3x \,.\, 2x\partial x + 3x^2\partial x + \partial x = (9x^2 + 1)\partial x.$$

Ferner ist, wenn $w$ einen dritten variablen Factor bezeichnet:

$$\partial(uvw) = u\partial(vw) + vw\partial u,$$

oder, da $\partial(vw) = v\partial w + w\partial v$ ist,

$$\partial(uvw) = uv\partial w + uw\partial v + vw\partial u; \quad \text{ebenso}$$
$$\partial(uvwz) = uvw\partial z + uvz\partial w + uwz\partial v + vwz\partial u.$$

Ist $u = v = w = z$, so folgt $\partial(u^4) = 4u^3\partial u$, sowie allgemein:

IV.) . . . . $\partial(x^m) = mx^{m-1}\partial x,$

wenn der Exponent $m$ eine **ganze positive Zahl** ist.

Z. B.: $\partial(x^7) = 7x^6\partial x$, sowie $\partial(^3/_4\, x^8) = 6x^7\partial x$.

Ist in $y = x^{-m}$, $m$ wieder eine ganze positive Zahl, so hat man auch:

$$yx^m = 1, \text{ und } \partial(yx^m) = 0, \text{ d. i.}$$
$$y\partial(x^m) + x^m\partial y = 0, \text{ und daher}$$

$$\partial y = -\frac{y\partial(x^m)}{x^m} = -\frac{x^{-m}\,.\,mx^{m-1}\partial x}{x^m} = -mx^{-m-1}\partial x,$$

oder, wenn man $-m = n$ setzt:

$$\partial(x^n) = n x^{n-1} \partial x.$$

Es gilt also die Regel (IV) auch für Potenzen mit ganzen negativen Exponenten. Z. B.:

$$\partial(x^{-3}) = -3x^{-4}\partial x = -\frac{3\partial x}{x^4},$$

ebenso:

$$\partial(3x^2 + 1)^{-2} = -2(3x^2 + 1)^{-3}\partial(3x^2) = -\frac{12x\partial x}{(3x + 1)^3}.$$

Ist in $y = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ irgend ein Bruch, dessen Nenner $n$ und Zähler $m$ ganze Zahlen sind, so hat man auch $y^n = x^m$, und $\partial(y^n) = \partial(x^m)$, d. i.:

$$n y^{n-1}\partial y = m x^{m-1}\partial x, \text{ daher}$$

$$\partial y = \frac{m}{n}\,\frac{x^{m-1}\partial x}{y^{n-1}} = \frac{m}{n}\,\frac{x^{m-1}\partial x}{x^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}\,\partial x.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = p$, so folgt:

$\partial y = \partial(x^p) = p x^{p-1}\partial x$, also ebenfalls entsprechend der nun allgemein als richtig anzusehenden Regel IV.

Auch ist $\partial(u^p) = p u^{p-1}\partial u$, wenn $u$ irgend eine abhängige Function von $x$ bezeichnet.

Hiernach ist z. B. $\partial(\sqrt{x^3}) = \partial(x^{3/2}) = {}^3/_2 x^{1/2}\,\partial x = {}^3/_2\sqrt{x}\,\partial x$,

$$\partial\sqrt{2rx - x^2} = \partial\sqrt{u} = \partial(u^{1/2}) = {}^1/_2\, u^{-1/2}\partial u$$

$$= {}^1/_2\,\frac{\partial(2rx - x^2)}{u^{1/2}} = \frac{2r\partial x - 2x\partial x}{2\sqrt{u}} = \frac{(r - x)\partial x}{\sqrt{2rx - x^2}}.$$

Um das Differenzial eines Quotienten $y = \frac{u}{v}$ zu finden, setze man $u = vy$, wonach dann $\partial u = v\partial y + y\partial v$, folglich

$$\partial y = \frac{\partial u - y\partial v}{v} = \frac{\partial u - \frac{u}{v}\partial v}{v}, \text{ d. i.}$$

V.) $$\partial\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\partial u - u\partial v}{v^2} \text{ folgt.}$$

Hiernach ist z. B.

$$\partial\left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right) = \frac{(x + 2)\partial(x^2 - 1) - (x^2 - 1)\partial(x + 2)}{(x + 2)^2}$$

$$= \frac{(x + 2)\,.\,2x\partial x - (x^2 - 1)\,.\,\partial x}{(x + 2)^2} = \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}\right)\partial x.$$

Auch ist

$$\partial\left(\frac{a}{v}\right) = -\frac{a\partial v}{v^2},\ \text{z. B. } \partial\left(\frac{4}{x^2}\right) = -\frac{4\partial(x^2)}{x^4} = -\frac{8\partial x}{x^3}.$$

Art. 9. Die Function $y = x^n$ ist die wichtigste der ganzen Analysis, weil man fast bei allen Untersuchungen auf dieselbe stößt. Wenn man dem Exponenten $n$ alle möglichen Werthe, positive und negative, ganze und gebrochene u. s. w., beilegt, so liefert sie auch die verschiedenartigsten Curven, wie durch Fig. 17 veranschaulicht wird. Es ist hier $A$ der Null- oder Anfangspunkt der Coordinaten-, $X\overline{X}$ die Abscissen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinatenaxe.

Trägt man zu beiden Seiten der Coordinataxen in den Abständen $x = \pm 1$ und $y = \pm 1$ von $A$ die zu diesen Axen Parallelen $X_1\overline{X}_1$, $X_2\overline{X}_2$, $Y_1\overline{Y}_1$ und $Y_2\overline{Y}_2$ auf, und verbindet man die Durchschnittspunkte $P_1, P_2, P_3$ und $P_4$ derselben noch durch die Transversalen $Z\overline{Z}$, $Z_1\overline{Z}_1$, so erhält man dadurch ein Diagramm, an welches sich sämmtliche der Gleichung $y = x^n$ entsprechende Curven mehr oder weniger anschließen. Uebrigens ist für jeden Punkt der Abscissenaxe $X\overline{X}$, $y = 0$, sowie für jeden Punkt der Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$, $x = 0$; ferner für die Punkte in den Axen $X_1\overline{X}_1$ und $X_2\overline{X}_2$, $y = \pm 1$, und für die Punkte in den Axen $Y_1\overline{Y}_1$ und $Y_2\overline{Y}_2$, $x = \pm 1$.

Setzt man in der Gleichung $y = x^n$, $x = 1$, so erhält man, was auch der Exponent $n$ für eine Zahl sein möge, stets $y = 1$, und nur für gewisse Werthe von $n$, überdies noch $y = -1$; es gehen folglich auch alle der Gleichung $y = x^n$ angehörige Curven durch den Punkt $P_1$, dessen Coordinaten $AM = 1$ und $AN = 1$ sind.

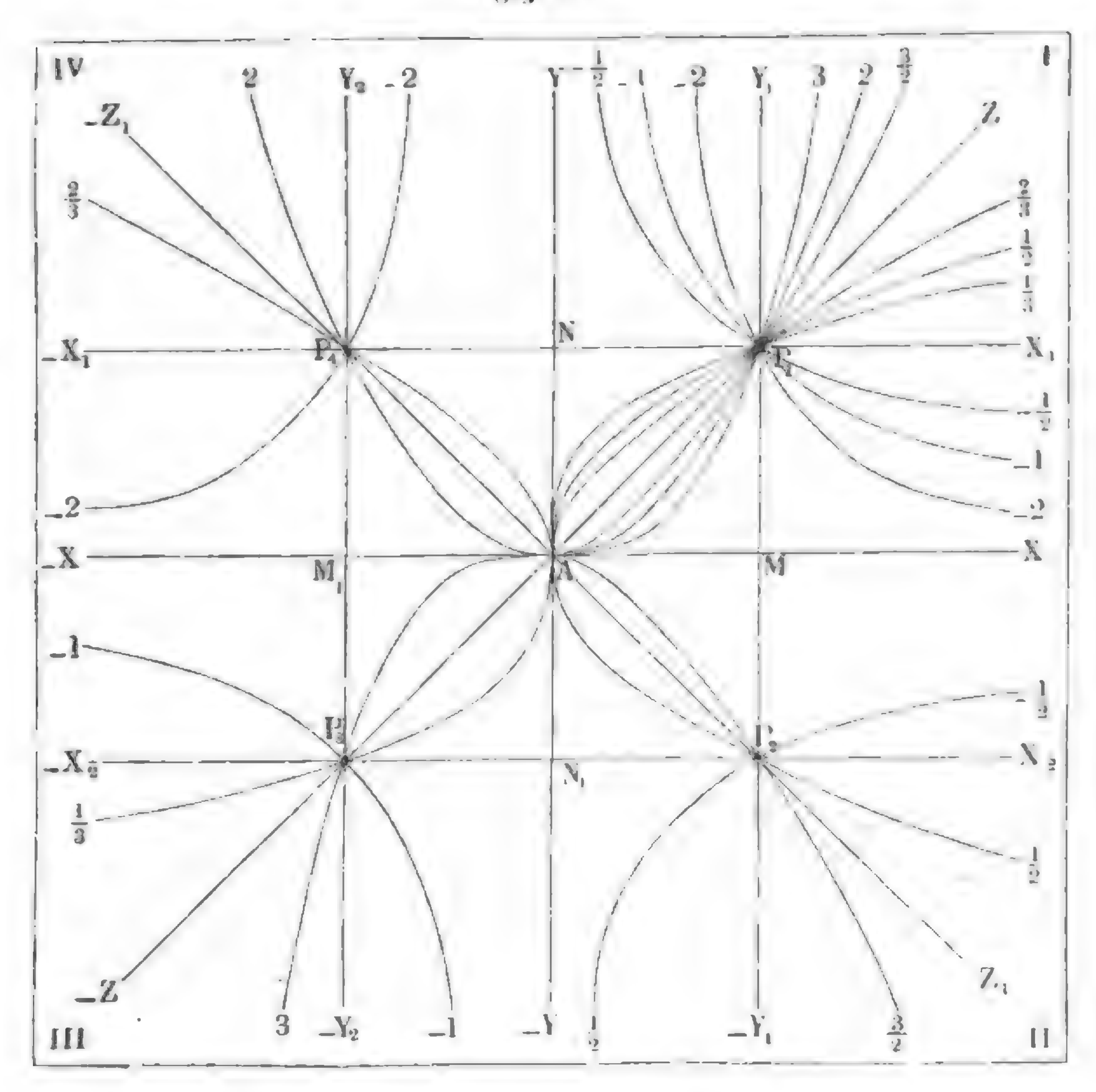
Nimmt man $n = 1$ an, setzt man also $y = x$, so bekommt man die von beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ gleichviel abweichende Gerade ($ZA\overline{Z}$), welche auf der einen Seite von $A$ unter dem Winkel von 45 Grad $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ auf-, und auf der anderen Seite unter demselben Winkel absteigt. Dagegen erhält man für $y = -x$ die unter dem Winkel von 45 Grad auf der einen Seite von $A$ nieder-, und auf der andern Seite aufsteigende Gerade $Z_1A\overline{Z}_1$.

Ist dagegen $n > 1$, so fällt $y = x^n$ für $x < 1$, kleiner und dagegen für $x > 1$, größer als $x$ aus, und ist $n < 1$, so stellt sich $y = x^n$ für $x < 1$, größer und dagegen für $x > 1$, kleiner als $x$ heraus; dem ersteren Falle ($n > 1$) entsprechen convexe Curven, welche anfangs unter, von $P_1$ aus aber über der geraden Linie ($ZA\overline{Z}$) hinlaufen, und dem zweiten Falle ($n < 1$) concave Curven, bei welchen das Umgekehrte stattfindet.

Wenn im ersten Falle der Exponent $n$ immer kleiner und kleiner und endlich verschwindend klein oder nahe Null angenommen wird, so nähern sich

die Ordinaten dem constanten Werthe $y = x^0 = 1$. und die entsprechenden Curven über $AX$ der gebrochenen Linie $ANP_1X_1$ immer mehr und mehr;

Fig. 17.




wenn dagegen im zweiten Falle der Exponent $n$ immer größer und größer wird, so nähern sich die Ordinaten allmälig dem Grenzwerthe $y = x^{\infty} = x^{\frac{1}{0}} = \infty$, dagegen die Abscissen nach und nach der Grenze $x = y^0 = 1$, und es rücken deshalb die entsprechenden Curven der gebrochenen Linie $AMP_1Y_1$ immer näher und näher.

Nimmt man $n = -1$ an, setzt man also $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, so ist für $x = 0$, $y = \infty$ und für $x = \infty$, $y = 0$, und man hat es mit einer aus Art. 3 bekannten und in Fig. 5 abgebildeten Curve ($\overline{1}P_1\overline{1}$) zu thun, welche sich einerseits immer mehr und mehr der Ordinaten- und andererseits immer mehr und mehr der Abscissenaxe nähert, jedoch diese Axen nie wirklich erreicht.

Ist der Exponent $(-n)$ der Function $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ein ächter Bruch, so fällt für $x < 1$, $y < \frac{1}{x}$ und dagegen für $x > 1$, $y > \frac{1}{x}$ aus, und ist dieser Exponent größer als die Einheit, so hat man umgekehrt, für $x < 1$, $y > \frac{1}{x}$ und für $x > 1$, $y < \frac{1}{x}$. Die der Function $y = x^{-n}$ entsprechenden Curven laufen also, je nachdem $n$ kleiner oder größer als Eins ist, anfangs unter oder über, und später vom Punkte $P$ aus, über oder unter der Curve $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ hin. Während überhaupt die Curven, welche positiven Werthen von $n$ entsprechen, sich anfangs unter, und von $P_1$ aus über der Geraden $(X_1 \overline{X}_1)$ hinziehen, laufen die Curven, welche aus negativen Exponenten $(-n)$ hervorgehen, erst über und von jenseits $P_1$ unter $(X_1 \overline{X}_1)$ hin. Bei jenen Curven ist für $x = 0$, auch $y = 0$, und für $x = \infty$ auch $y = \infty$, bei diesen hingegen für $x = 0$, $y = \infty$, und für $x = \infty$, $y = 0$. Wenn sich jene immer mehr und mehr von den Coordinatenaxen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ entfernen, je weiter man sie von dem Anfangspunkte $A$ aus verfolgt, nähern sich diese immer mehr und mehr einerseits der Axe $X\overline{X}$ und andererseits der Axe $Y\overline{Y}$, ohne diese Geraden jedoch wirklich zu erreichen.

Uebrigens rücken die letzten Curvensysteme entweder der gebrochenen Linie $Y N P_1 X_1$, oder der gebrochenen Linie $Y_1 P_1 M X$ immer näher und näher, je nachdem sich der Exponent der Grenze $n = o$ oder $n = \infty$ immer mehr und mehr nähert.

Ist in $y = x^{\pm m}$, $m$ eine ganze ungerade Zahl (1, 3, 5, 7 . . .), so hat $y$ mit $x$ dasselbe Zeichen; positiven Werthen von $x$ entsprechen auch positive Werthe von $y$ und negativen Werthen von $x$ auch negative Werthe von $y$. Ist hingegen $m$ eine ganze gerade Zahl (2, 4, 6 . . .), so fällt sowohl für positive als auch für negative $x$, $y$ positiv aus. Die Curven im ersten Falle, wie z. B. $(3 P_1 A P_3 3)$ oder $(\overline{1} P_1 \overline{1}, \overline{1} P_3 \overline{1})$, laufen folglich auf der einen Seite der Ordinatenaxe über und auf der anderen unter der Absciffenaxe $X A \overline{X}$ hin; die Curven im zweiten Falle, wie z. B. $(2 P_1 A P_4 2)$ oder $(\overline{2} P_1 \overline{2}, \overline{2} P_4 \overline{2})$, ziehen sich dagegen nur über der Absciffenaxe hin und nehmen folglich auch nur den ersten und vierten Quadranten ein. Jene entsprechen für $m = \pm \infty$ den Grenzlinien $Y_1 M A M_1 \overline{Y}_2$ und $X M Y_1$, $\overline{X} M_1 \overline{Y}_2$, diese hingegen den Grenzlinien $Y_1 M A M_1 Y_2$ und $X M Y_1$, $\overline{X} M Y_2$.

Ist in $y = x^{\pm\frac{1}{n}}$, $n$ eine ganze ungerade Zahl, so hat $y$ mit $x$ einerlei Zeichen, und ist $n$ eine ganze gerade Zahl, so giebt jedes positive $x$ für $y$ zwei Werthe einen positiven und einen gleich großen negativen, und es ist dagegen für jedes negative $x$, $y$ imaginär oder unmöglich. Die Curven, wie z. B. ($^1/_3\, P_1\, A\, P_3\, ^1/_3$), welche dem ersten Falle entsprechen, befinden sich daher auch nur im ersten und dritten Quadranten, und die Curven für den zweiten Fall, z. B. ($^1/_2\, P_1\, A\, P_2\, ^1/_2$), nur im ersten und zweiten Quadranten; jene haben für $m = \infty$ die Grenzlinien $X_1\, N\, A\, N_1\, \overline{X}_2$ und $X_1\, N\, Y$, $\overline{X}_2\, N_1\, \overline{Y}$, diese die Grenzlinien $X_1\, N\, A\, N_1\, X_2$ und $X_1\, N\, Y$, $X_2\, N_1\, \overline{Y}$.

Da $y = x^{\pm\frac{1}{n}}$, $x = y^{\pm n}$ bedingt, so folgt, daß das letzte Curvensystem $\left(y = x^{\pm\frac{1}{n}}\right)$ von dem vorhergehenden $\left(y = x^{\pm m}\right)$ nur in der Lage gegen das Axenkreuz abweicht, und daß durch Drehen und Wenden die Curven des einen Systems mit denen des anderen zum Zusammenfallen gebracht werden können.

Da $y = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ ist, so kann man den Lauf der entsprechenden Curve nach dem Vorstehenden im Allgemeinen stets angeben. Z. B. die Curve für

$$y = x^{2/3} = (x^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{x})^2$$

hat sowohl für positive als auch für negative $x$, positive Ordinaten. Dagegen die Curve für

$$y = x^{3/2} = (x^{1/2})^3 = (\sqrt{x})^3$$

hat nur für positive $x$, reelle Ordinaten, und zwar je zwei entgegengesetzte.

Ferner bei der Curve für

$$y = x^{3/5} = (\sqrt[5]{x})^3$$

hat $y$ mit $x$ stets einerlei Zeichen, da weder die fünfte Wurzel noch der Cubus das Zeichen der Grundzahl ändert.

Endlich sind die Curven, welche der Gleichung $y = -x^{\frac{m}{n}}$ entsprechen, nur durch die entgegengesetzte Lage gegen die Abscissenaxe $X\,\overline{X}$ von denen der Gleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ verschieden, und bilden die symmetrischen Hälften eines Ganzen.

Art. 10. Aus der wichtigen Formel $\partial(x^n) = n\,x^{n-1}\,\partial x$ folgt auch die Formel für den Tangentenwinkel der entsprechenden und in Fig. 18 (a. f. S.) abgebildeten Curven; es ist nämlich:

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = n\,x^{n-1},$$

und daher die Subtangente dieser Curven

$$= y \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x^n}{n x^{n-1}} = \frac{x}{n}.$$

Hiernach hat man z. B. für die sogenannte Neil'sche Parabel, deren Gleichung $a y^2 = x^3$, oder $y = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$ ist:

$$tang.\, \alpha = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial (x^{3/2})}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot {}^3/_2\, x^{1/2} = {}^3/_2 \sqrt{\frac{x}{a}},$$

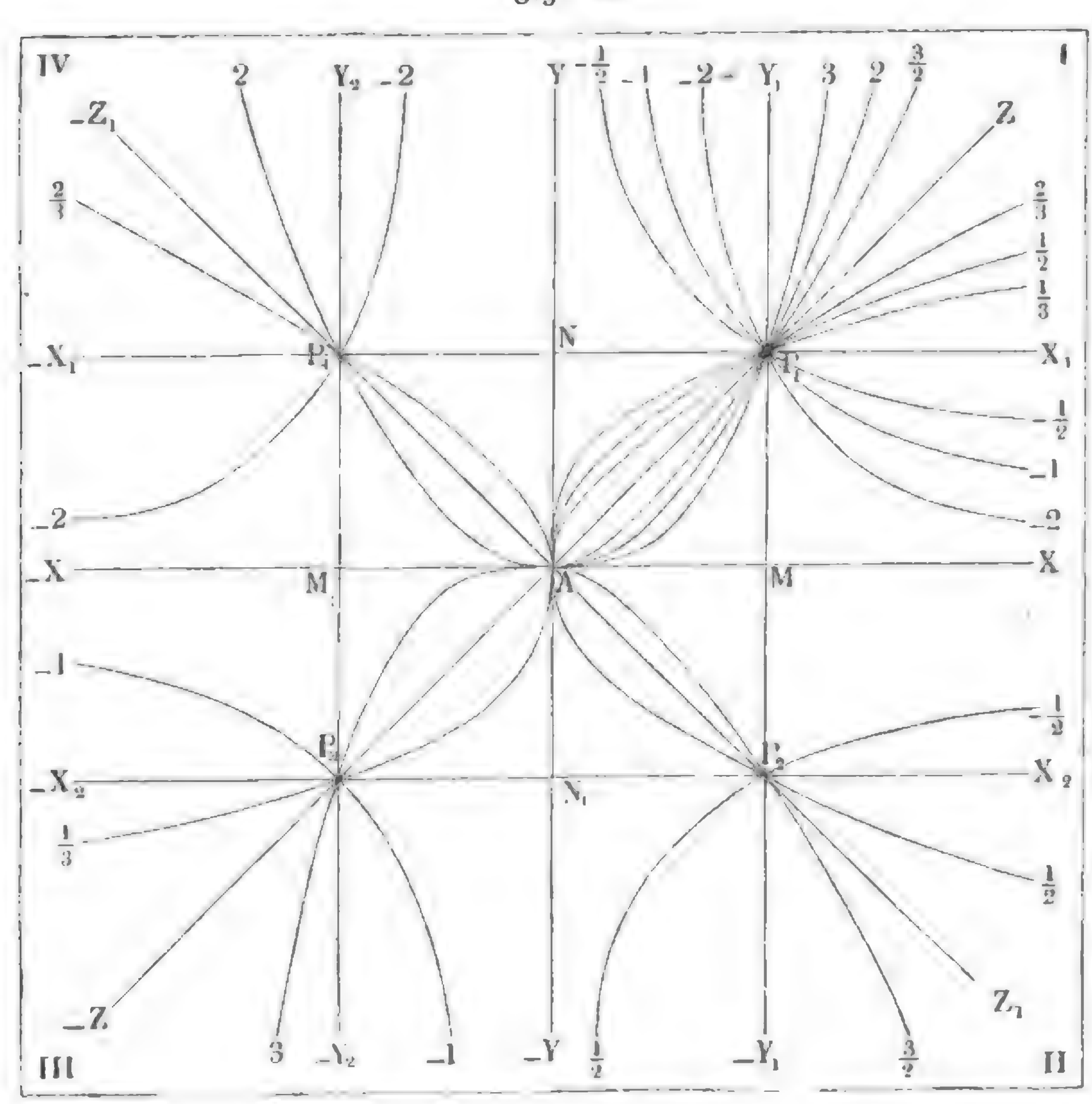
und die Subtangente $= {}^2/_3\, x$.

Ferner ist für die schon aus dem Obigen bekannte Curve $y = \frac{a^2}{x} = a^2 x^{-1}$,

$$tang.\, \alpha = a^2 \frac{\partial (x^{-1})}{\partial x} = - \frac{a^2}{x^2} = - \left(\frac{a}{x}\right)^2,$$

und die Subtangente $= \frac{x}{-1} = - x$. (Vergl. Fig. 5.)

Fig. 18.



Folglich wird für $x = 0$, $tang.\,\alpha = -\infty$, also $\alpha = 90^0$,
ferner für $x = a$, $tang.\,\alpha = -1$, also $\alpha = 135^0$
und für $x = \infty$, $tang.\,\alpha = 0$, also $\alpha = 0^0$, u. s. w.

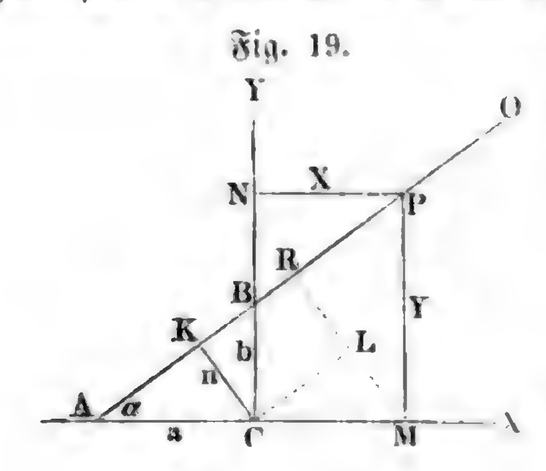
Art. 11. Wenn eine gerade Linie $AO$, Fig. 19, die Abscissenaxe unter dem Winkel $OAX = \alpha$ schneidet, und vom Coordinatenanfangspunkt $C$ um $CK = n$ absteht, so ist die Gleichung zwischen den Coordinaten $CM = NP = x$ und $CN = MP = y$ eines Punktes $P$ in derselben, da $n = MR - ML$, und $MR = y\,cos.\,\alpha$, sowie $ML = x\,sin.\,\alpha$ ist,

$$y\,cos.\,\alpha - x\,sin.\,\alpha = n.$$

Für $x = o$ nimmt $y$ den Werth $CB = b = \frac{n}{cos.\,\alpha}$ an; daher ist auch $n = b\,cos.\,\alpha$, und $y\,cos.\,\alpha - x\,sin.\,\alpha = b\,cos.\,\alpha$, oder $y = b + x\,tang.\,\alpha$.

Gewöhnlich nennt man die Linien $CA$ und $CB$, um welche die Durchschnittspunkte $A$ und $B$ der Geraden mit den Coordinatenaxen $CX$ und $CY$ von dem Anfangspunkte $C$ abstehen, die Parameter der Geraden, und bezeichnet sie durch die Buchstaben $a$ und $b$. Der Figur entsprechend ist $CA = -a$, daher:

Fig. 19.




$$tang.\,\alpha = \frac{CB}{CA} = -\frac{b}{a}$$

und folglich die Gleichung der Geraden: $y = b - \frac{b}{a}x$, oder:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ (s. Ingenieur Seite 164).}$$

Wenn sich eine Curve einer Geraden, welche um eine endliche Größe vom Coordinatenanfangspunkt absteht, bis ins Unendliche immer mehr und mehr nähert, ohne daß sie dieselbe je wirklich ganz erreicht, so heißt diese Gerade die Asymptote der Curve.

Die Asymptote läßt sich als Tangente oder Berührungslinie für einen unendlich entfernten Punkt der Curve ansehen. Ihr Neigungswinkel $\alpha$ gegen die Abscissenaxe ist daher bestimmt durch

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x},$$

und ihr Abstand $n$ von dem Nullpunkt der Coordinaten, durch die Gleichung

$$n = y\,cos.\,\alpha - x\,sin.\,\alpha = (y - x\,tang.\,\alpha)\,cos.\,\alpha$$

$$= \frac{y - x\,tang.\,\alpha}{\sqrt{1 + (tang.\,\alpha)^2}} = \left(y - x\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) : \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

sowie durch $n = (y \, cotg.\, \alpha - x) \sin.\alpha = \dfrac{y \, cotg.\, \alpha - x}{\sqrt{1 + (cotg.\, \alpha)^2}}$

$$= \left(y \frac{\partial x}{\partial y} - x\right) : \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2},$$

wenn man darin $x$ und $y = \infty$ setzt.

Damit eine Tangente für einen unendlich entfernten Berührungspunkt eine Asymptote sei, ist nöthig, daß für $x$ oder $y = \infty$, $y - x \, tang.\, \alpha$ oder $y \, cotg.\, \alpha - x$ nicht unendlich groß ausfalle.

Für eine Curve von der Gleichung $y = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$ ist

$tang.\, \alpha = - \dfrac{m}{x^{m+1}}$ und $y - x \, tang.\, \alpha = x^{-m} + \dfrac{m}{x^m} = \dfrac{m+1}{x^m}$,

sowie $y \, cotg.\, \alpha - x = - \dfrac{x}{m} - x = - (m+1) \dfrac{x}{m}$, daher

1) für $x = \infty$, $y = 0$, $tang.\, \alpha = 0$, $y - x \, tang.\, \alpha = 0$ und $n = 0$, und

2) für $y = \infty$, $x = 0$, $tang.\, \alpha = \infty$, $y \, cotg. - x = 0$ und $n = 0$.

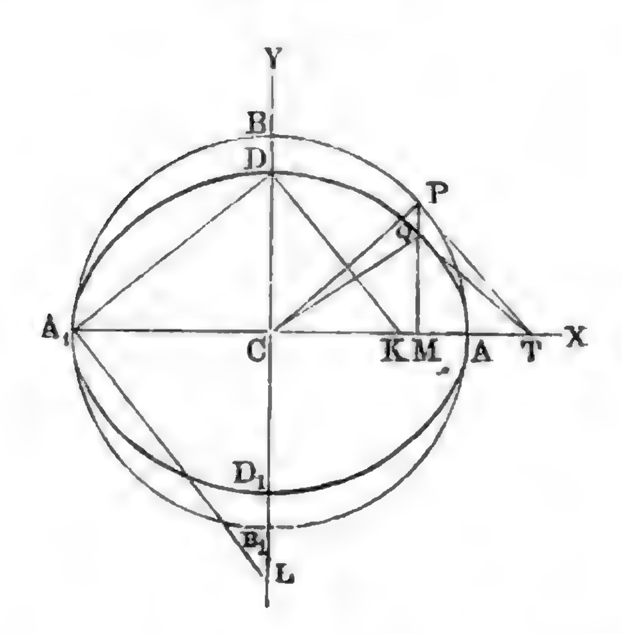
Den Bedingungen $\alpha = 0$ und $n = 0$ entspricht aber die Abscissenaxe $X\overline{X}$, und den Bedingungen $\alpha = \infty$ und $n = 0$ die Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$, daher sind diese Axen zugleich Asymptoten von den Curven, welche der Gleichung $y = x^{-m}$ entsprechen. (Vergl. die Curven $\overline{1} P_1 \overline{1}$, $\overline{2} P_1 \overline{2}$ und $\overline{^1/_2} P_1 \overline{^1/_2}$ in Fig. 18, Seite 16.)

Art. 12. Die Gleichung einer **Ellipse** $A D A_1 D_1$, Fig. 20, läßt sich aus der Gleichung:

$$x^2 + y_1^2 = a^2$$

des Kreises $A B A_1 B_1$, dessen Halbmesser $CA = CB = CP = a$ und Coordinaten $CM = x$ und $MP = y_1$ sind, sogleich ableiten, wenn man in Betracht zieht, daß die Ordinate $MQ = y$ der Ellipse in demselben Verhältnisse zur Ordinate $MP = y_1$ des Kreises (bei gleicher Abscisse) steht, wie die kleine Halbaxe $CD = b$ der Ellipse zu dem der großen Halbaxe derselben gleichen Kreishalbmesser $CB = a$. Es ist also:

Fig. 20.




$\dfrac{y}{y_1} = \dfrac{b}{a}$, daher $y_1 = \dfrac{a}{b} y$ und $x^2 + \dfrac{a^2}{b^2} y^2 = a^2$, d. i.:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ die Gleichung der Ellipse.}$$

Setzt man in dieser Gleichung statt $+ b^2$, $- b^2$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der aus zwei Zweigen $PAQ$ und $P_1 A_1 Q_1$, Fig. 21, bestehenden Hyperbel.

Wenn wir in der hieraus folgenden Formel:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

$x$ unendlich groß nehmen, so verschwindet $a^2$ gegen $x^2$, und es ist:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \pm \frac{bx}{a} = \pm x \; tang. \, \alpha$$

die Gleichung von zwei durch den Coordinatenanfangspunkt $C$ gehenden geraden Linien $CU$ und $CV$. Da sich die Ordinaten:

$$\pm \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \sqrt{x^2} \text{ und } \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Fig. 21.

immer mehr und mehr der Gleichheit nähern, je größer $x$ genommen wird, so folgt, daß die geraden Linien $CU$ und $CV$ Asymptoten der Hyperbel sind.

Nimmt man $CA = a$, sowie die Perpendikel $AB = + b$ und $AD = - b$, so bestimmt man dadurch die beiden Asymptoten; denn es ist für die Winkel $\pm \alpha$, unter welchen die Abscissenaxe von den Asymptoten geschnitten wird:

$$tang. \, ACB = \frac{AB}{CA}, \text{ d. i. } tang. \, \alpha = \frac{b}{a}, \text{ und ebenso:}$$

$$tang. \, ACD = \frac{AD}{CA}, \text{ d. i. } tang. \, (-\alpha) = -\frac{b}{a}.$$

Nimmt man die Asymptoten $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ als Coordinatenaxen an;

setzt man die Abscisse oder Coordinate $CN$ in der einen Axenrichtung $= u$, und die Ordinate oder Coordinate $NP$ in der anderen Axenrichtung $= v$, so hat man, da die Richtung von $u$ um den Winkel $\alpha$. und von $v$ die um den Winkel $-\alpha$ von der Abscissenaxe $CX$ abweicht, die Abscisse:

$$CM = x = CN \cos.\alpha + NP \cos.\alpha = (u + v) \cos.\alpha,$$

und die Ordinate:

$$MP = y = CN \sin.\alpha - NP \sin.\alpha = (u - v) \sin.\alpha;$$

bezeichnet man nun noch die Hypotenuse $CB = \sqrt{a^2 + b^2}$ durch $e$, so hat man:

$$\cos.\alpha = \frac{a}{e} \text{ und } \sin.\alpha = \frac{b}{e},$$

folglich: $$\frac{\cos.\alpha}{a} = \frac{\sin.\alpha}{b} = \frac{1}{e} \text{ und}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(u^2 + 2uv + v^2)}{a^2} \cos.\alpha^2 - \frac{(u^2 - 2uv + v^2)}{b^2} \sin.\alpha^2$$

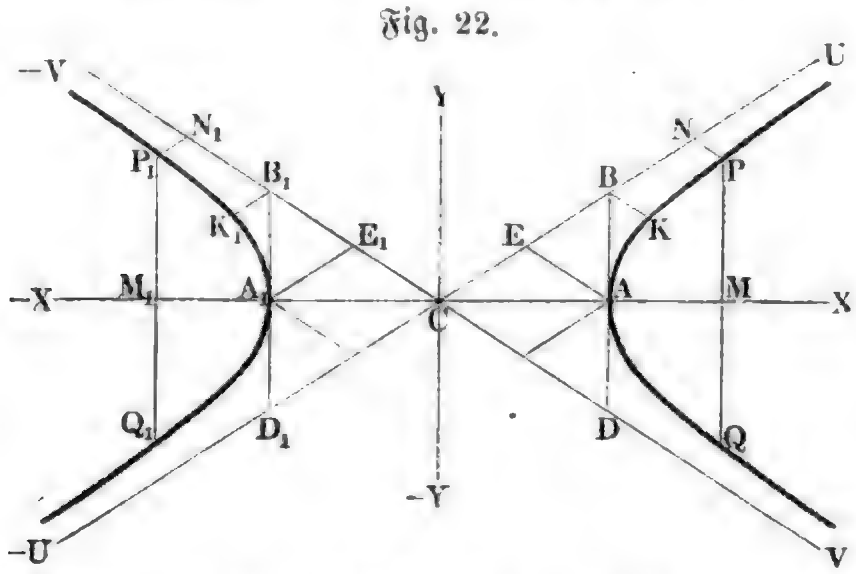
$$= \frac{u^2 + 2uv + v^2}{e^2} - \frac{u^2 - 2uv + v^2}{e^2} = \frac{4uv}{e^2} = 1,$$

woraus die sogenannte Asymptotengleichung der Hyperbel:

$$uv = \frac{e^2}{4}, \text{ oder } v = \frac{e^2}{4u}, \quad \text{hervorgeht.}$$

Hiernach ist die Hyperbel zwischen den gegebenen Asymptoten leicht zu zeichnen. Die Coordinaten für den Scheitel $A$ sind $CE = EA = \frac{e}{2}$,

Fig. 22.




dagegen die Coordinaten für den Punkt $K$ sind $CB = e$ und $BK = \frac{e}{4}$, ferner sind für die Abscissen $2e$, $3e$, $4e$ u. s. w. die Ordinaten $\frac{1}{2}\,\frac{e}{4}$, $\frac{1}{3}\,\frac{e}{4}$, $\frac{1}{4}\,\frac{e}{4}$ u. s. w.

Art. 13. Wenn man in dem Elementenverhältniß $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder in der Formel für die Tangente $tang. \alpha$ des Tangentenwinkels, für $x$ nach und nach verschiedene Werthe setzt, so erhält man durch dieselbe die verschiedenen Lagen von der Berührungslinie der zugehörigen Curve. Nimmt man $x = 0$, so erhält man die Tangente des Tangentenwinkels im Coordinatenanfangspunkte, nimmt man dagegen $x = \infty$, so ergiebt sich dieselbe für einen unendlich entfernten Punkt der Curve. Am wichtigsten sind die Punkte, wo die Tangente einer Curve mit der einen oder der anderen Coordinatenaxe parallel läuft, weil hier in der Regel die eine oder die andere der Coordinaten $x$ und $y$ ihren größten oder kleinsten Werth hat, oder, wie man sagt, ein Maximum oder Minimum ist. Für den Parallelismus mit der Abscissenaxe hat man $\alpha = 0$, also auch $tang. \alpha = 0$, und für den mit der Ordinatenaxe $\alpha = 90^0$, also $tang. \alpha = \infty$; und hiernach folgt die Regel: Man findet diejenigen Werthe der Abscisse oder Urvariablen $x$, welchen die Maximal- oder Minimalwerthe der Ordinate oder Abhängigvariablen $y$ entsprechen, wenn man das Differenzialverhältniß $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, und $= \infty$ setzt, und die erhaltenen Gleichungen in Hinsicht auf $x$ auflöst.

Fig. 23.

Z. B. für die Gleichung $x = 6x - {}^9/_2\, x^2 + x^3$, welche der Curve $APQR$ in Fig. 23 entspricht, ist:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6 - 9x + 3x^2 = 3\,(2 - 3x + x^2) = 3\,(1 - x)\,(2 - x),$$

und es erfolgt durch Nullsetzen von $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$1 - x = 0 \text{ und } 2 - x = 0,$$

d. i. $x = 1$ und $x = 2$.

Diese Werthe in die Formel: $y = 6x - {}^9/_2\, x^2 + x^3$ gesetzt, ergiebt sich der Maximalwerth von $y$: $MP = 6 - {}^9/_2 + 1 = {}^5/_2$, und der Minimalwerth: $NQ = 12 - 18 + 8 = 2$.

Ferner für die Curve $KOPQR$, Fig. 24 (a. f. S.), deren Gleichung

$$y = x + \sqrt[3]{(x-1)^2} \text{ ist, hat man}$$

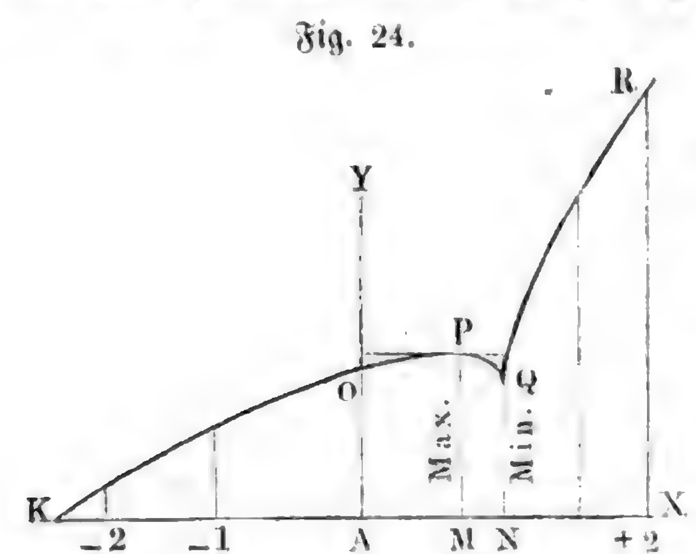
$$\frac{\partial y}{\partial x} = tang.\ \alpha = 1 + {}^2/_3\,(x - 1)^{-{}^1/_3} = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}};$$

und zwar $= 0$, für $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = -1$, d. i. für $AM = x = 1 - ({}^2/_3)^3 = {}^{19}/_{27} = 0{,}7037$, dagegen $= \infty$, für $AN = x = 1$. Dem ersteren Falle entspricht der Maximalwerth:

$$MP = y_m = 1 - (^2/_3)^3 + (^2/_3)^2 = ^{31}/_{27} = 1,148,$$

und dem letzteren der Minimalwerth: $NQ = y_n = 1$.

Fig. 24.




Auch ist noch für $x = 0$, $AO = y = 1$, dagegen $y = 0$ für die Abscisse $AK = x$, welche der cubischen Gleichung $x^3 + x^2 - 2x + 1$ entspricht und den Werth $x = -2,148$ hat.

Art. 14. Sowie bei einer vom Anfangspunkte $A$ aus aufsteigenden Curve $y$ mit $x$ wächst, und deshalb $\partial y$ positiv ist, bei einer niedersteigenden hingegen $y$ abnimmt, wenn $x$ größer wird, und deßhalb $\partial y$ negativ ausfällt, und endlich an der Stelle, wo die Curve mit der Coordinatenaxe $AX$ parallel läuft, $\partial y$ Null ist, ebenso sind die gleichen Abscissen-Elementen $\partial x = MN = NO = PS = QT \ldots$ entsprechenden Ordinaten-Elemente:

$$SQ = PS \; tang. \; QPS, \text{ d. i. } \partial y_1 = \partial x \; . \; tang. \, \alpha_1,$$

$$TR = QT \; tang. \; RQT, \text{ d. i. } \partial y_2 = \partial x \; . \; tang. \, \alpha_2 \text{ u. s. w.}$$

und also auch die Tangentenwinkel $\alpha_1$, $\alpha_2$ u. s. w. bei einer convexen Curve $APR$, Fig. 25, im Wachsen und bei einer concaven Curve

Fig. 25.

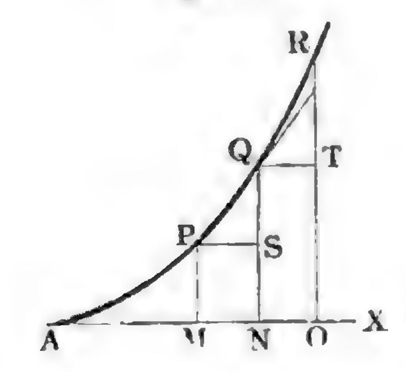



Fig. 26.

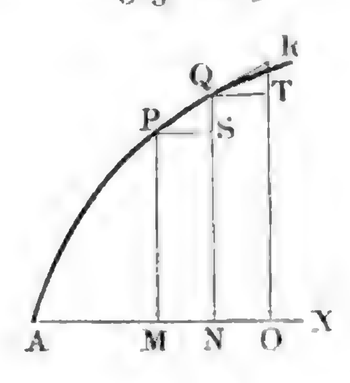
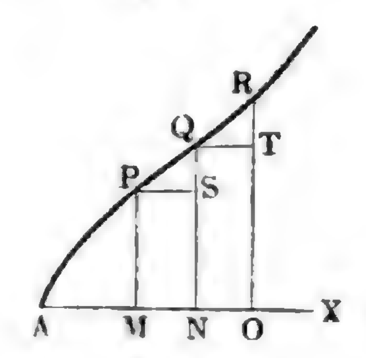



Fig. 27.




$APR$, Fig. 26, im Abnehmen begriffen; es ist folglich im ersten Falle:

$$\partial \, (tang. \, \alpha) = \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \text{ positiv}$$

und im zweiten $\partial \, (tang. \, \alpha) = \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ negativ, und man hat endlich auch für den Inflexions- oder Wendepunkt $Q$, Fig. 27, d. i. für die Stelle $Q$ der Curve, wo Convexität in Concavität übergeht, oder das Umgekehrte stattfindet, auch $SQ = TR$, und daher:

$$\partial \, (tang. \, \alpha) = \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \text{Null}.$$

Es gilt also die Regel: Ist das Differenzial der Tangente des Tangentenwinkels positiv, so besitzt die Curve Convexität, ist es negativ, so hat dieselbe Concavität, und ist es Null, so hat man es mit einem Wendepunkte der Curve zu thun.

Auch ist hiernach leicht Folgendes zu ermessen. Die Stelle, wo die Curve parallel mit der Abscissenaxe läuft, für welche also $tang.\,\alpha = 0$ ist, entspricht entweder einem Minimo, oder Maximo, oder Wendepunkte der Curve, je nachdem diese Curve convex, oder concav, oder keines von beiden, also

$\partial\,(tang.\,\alpha)$ positiv, oder negativ, oder Null ist.

Dagegen die Stelle, wo eine Curve mit der Ordinatenaxe parallel läuft, also $tang.\,\alpha = \infty$ ist, entspricht entweder einem Minimo, oder Maximo, oder Wendepunkte der Curve, je nachdem dieselbe concav oder convex oder theils concav, theils convex, also $d\,(tang.\,\alpha)$ vor und nach dieser Stelle negativ oder positiv ist, oder vor dieser Stelle ein anderes Zeichen hat als nach derselben.

Ein Curvenstück mit Wendepunkt $Q$ der ersten Art führt Fig. 28, und ein solches mit einem Wendepunkt der zweiten Art Fig. 29 vor Augen. Man sieht, die entsprechende Ordinate $NQ$ ist weder ein Maximum, noch ein Minimum; denn es sind in keinem Falle beide benachbarten Ordinaten $MP$ und $OR$ größer oder kleiner als $NQ$.

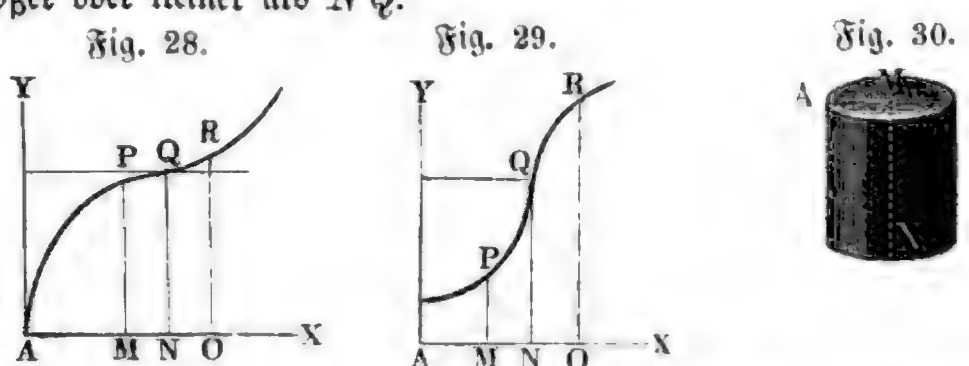


Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30.

In der Geometrie, Physik, Mechanik u. s. w. ist die Ausmittelung von Maximal- und Minimal- oder sogenannten eminenten Werthen einer Function oft von großer Wichtigkeit. Da in der Folge vielfache Bestimmungen solcher Functionswerthe vorkommen werden, so möge hier nur noch folgende geometrische Aufgabe dieser Art zur Lösung gebracht werden.

Es sind die Dimensionen eines geraden Kreiscylinders $AN$, Fig. 30, anzugeben, welcher bei einem gegebenen Inhalte $V$ die kleinste Oberfläche $O$ hat. Bezeichnen wir den Durchmesser der Basis dieses Cylinders durch $x$, und die Höhe desselben durch $y$, so haben wir:

$$V = \frac{\pi}{4}\,x^2 y \text{ und}$$

die Oberfläche oder den Inhalt der beiden Grundflächen plus den Inhalt des Mantels:

$$O = \frac{2\pi x^2}{4} + \pi x y,$$

oder da der ersten Gleichung zufolge,

$$\pi y = \frac{4V}{x^2}, \text{ also } \pi x y = 4 V x^{-1} \text{ gesetzt werden kann:}$$

$$O = \frac{\pi x^2}{2} + 4 V x^{-1},$$

und folglich, da wir $O$ und $x$ als Coordinaten einer Curve behandenl können:

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial O}{\partial x} = \pi x - 4 V x^{-2}.$$

Setzen wir nun diesen Quotienten Null, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$\pi x = \frac{4V}{x^2}, \text{ oder } \pi x^3 = 4V,$$

deren Auflösung auf:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \text{ und}$$

$$y = \frac{4V}{\pi x^2} = \sqrt[3]{\frac{64 V^3}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{16 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = x$$

führt.

Da noch $\partial\,(tang.\,\alpha) = \left(\pi + \frac{8V}{x^3}\right) \partial x$ positiv ist, so führt diese Bestimmung auf das gesuchte Minimum.

Diese Bestimmung findet auch ihre Anwendung, wenn es darauf ankommt, die Dimensionen eines cylindrischen Gefäßes zu finden, welches bei einem gegebenen Fassungsraume die kleinste Menge an Material erfordert. Sie entspricht diesem Falle unmittelbar, wenn das Gefäß außer seinem kreisförmigen Boden auch noch einen solchen Deckel erhalten soll; wenn aber der letztere nicht gefordert wird, so hat man:

$$O = \frac{\pi x^2}{4} + 4 V x^{-1}, \text{ folglich:}$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{4V}{x^2}, \text{ woraus nun:}$$

$$x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \text{ und } y = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = \tfrac{1}{2} x$$

folgt.

Während also im ersten Falle die Höhe gleich der Weite des Cylinders zu nehmen ist, hat man im zweiten Falle dieselbe nur der halben Cylinderweite gleich zu machen.

Art. 15. Durch successives Differenziiren einer Function $y = f(x)$, findet man eine ganze Reihe neuer Functionen der Urvariablen $x$, und zwar

$$f_1(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

$$f_2(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x},\ f_3(x) = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

Z. B. für $y = f(x) = x^{5/3}$, folgt

$$f_1(x) = {}^5/_3\, x^{2/3},\ f_2(x) = {}^{10}/_9\, x^{-1/3},\ f_3(x) = -\ {}^{10}/_{27}\, x^{-4/3} \text{ u. s. w.}$$

Für eine Function, welche in einer nach Potenzen von $x$ mit positiven ganzen Exponenten fortschreitenden convergenten Reihe

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots$$

dargestellt ist, erhält man

$$f_1(x) = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + \cdots$$
$$f_2(x) = 2 A_2 + 2\,.\,3 A_3 x + 3\,.\,4\, A_4 x^2 + \cdots$$
$$f_3(x) = 2\,.\,3 A_3 + 2\,.\,3\,.\,4 A_4 x^2 + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun in diesen Reihen $x$ = Null, so erhält man dadurch lauter zur Bestimmung der constanten Coefficienten $A_0$, $A_1$, $A_2$ ... geeignete Ausdrücke, nämlich:

$f(0) = A_0, f_1(0) = 1 A_1, f_2(0) = 2 A_2, f_3(0) = 2\,.\,3\,.\,A_3$ u. s. w.

und es folgen daher diese Coefficienten selbst:

$$A_0 = f(0),\ A_1 = f_1(0),\ A_2 = {}^1/_2 f_2(0),\ A_3 = \frac{1}{2\,.\,3} f_3(0),$$

$$A_4 = \frac{1}{2.3.4} f_4(0) \text{ u. s. w.}$$

Es ist hiernach eine Function in folgende, nach Mac Laurin benannte Reihe:

$$f(x) = f(0) + f_1(0) \cdot \frac{x}{1} + f_2(0) \cdot \frac{x^2}{1\,.\,2} + f_3(0) \cdot \frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+ f_4(0) \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots \text{ zu verwandeln.}$$

Für die Binomialfunction $y = f(x) = (1 + x)^n$ ist

$$f_1(x) = n\ (1 + x)^{n-1},\ f_2(x) = n\ (n - 1)\ (1 + x)^{n-2},$$
$$f_3(x) = n\ (n - 1)\ (n - 2)\ (1 + x)^{n-3} \text{ u. s. w.,}$$

wenn man daher $x$ = Null setzt, so erhält man:

$$f(0) = 1,\ f_1(0) = n,\ f_2(0) = n\ (n - 1)$$
$$f_3(0) = n\ (n - 1)\ (n - 2) \text{ u. s. w.}$$

und es folgt die binomische Reihe:

$$\text{I.)} \quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Auch ergiebt sich:

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots,$$

sowie:

$$(1+x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots$$

Ferner $1 + x = (1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z}$ gesetzt, folgt $z = \frac{x}{1+x}$ und

$$(1+x)^n = (1-z)^{-n} = 1 + nz + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}z^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \cdots, \text{ d. i.}$$

$$\text{II.)} \quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

Die Reihe unter I. ist eine endliche für ganze positive, und die unter II. für ganze negative Werthe von $n$. Z. B.

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^4, \text{ und}$$

$$(1+x)^{-5} = 1 - 5\left(\frac{x}{1+x}\right) + 10\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^5.$$

Da $a + x = a\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ ist, so folgt auch

$$(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n\left[1 + \frac{n}{1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots\right], \text{ d. i.}$$

$$\text{III.)} \quad (a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}x^3 + \cdots$$

z. B. $\sqrt[3]{1009^2} = (1000 + 9)^{2/3} = 100\,(1 + 0{,}009)^{2/3}$

$$= 100\left(1 + {}^2/_3 \,.\, 0{,}009 + \frac{{}^2/_3\,({}^2/_3 - 1)}{2} \cdot (0{,}009)^2 + \cdots\right)$$

$$= 100\,(1 + 0{,}006 - 0{,}000009) = 100{,}5991.$$

Auch ist:

$$(x+1)^n = x^n + n x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\, x^{n-2} + \cdots;$$

daher für sehr große Werthe von $x$ annähernd:

$$(x+1)^n = x^n + n x^{n-1}.$$

Hiernach folgt $x^{n-1} = \dfrac{(x+1)^n - x^n}{n}$, ferner:

$$(x-1)^{n-1} = \frac{x^n - (x-1)^n}{n},$$

$$(x-2)^{n-1} = \frac{(x-1)^n - (x-2)^n}{n},$$

$$(x-3)^{n-1} = \frac{(x-2)^n - (x-3)^n}{n},$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots$$

und zuletzt:

$$1^{n-1} = \frac{2^n - 1^n}{n}.$$

Durch Addition zu beiden Seiten der Gleichheitszeichen folgt nun:

$$x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1} + \cdots + 1 = \frac{(x+1)^n - 1^n}{n},$$

oder $n - 1 = m$, also $n = m + 1$ gesetzt und die Reihe in umgekehrter Ordnung geschrieben:

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (x-1)^m + x^m = \frac{(x+1)^{m+1} - 1}{m+1}.$$

Noch kann man, da $x$ sehr groß, eigentlich unendlich groß sein soll, $(x+1)^{m+1} = x^{m+1}$ setzen, weshalb die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlenreihe folgt:

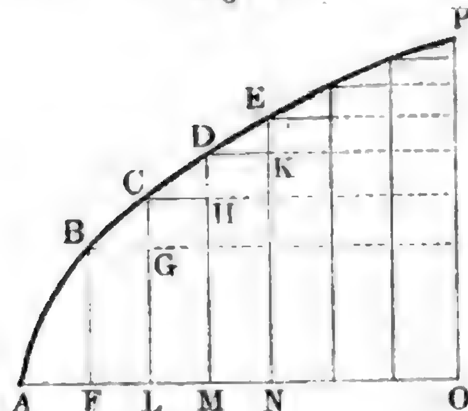
IV.) $$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$ z. B.

$$\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{4^2} + \cdots + \sqrt[3]{1000^2} \text{ annähernd}$$

$$= \frac{1000^{5/3}}{{}^5/_3} = {}^3/_5\,\sqrt[3]{1000^5} = 60000.$$

Art. 16. Die der Abscisse $AO = x$, Fig. 31, entsprechende Ordinate $OP = y$ läßt sich aus unendlich vielen ungleichen Elementen $\partial y$ wie $FB$, $GC$, $HD$, $KE$ ... zusammensetzen, die lauter gleichen Elementen $\partial x = AF = FL = LM = MN$ ... der Abscisse entsprechen. Wäre daher $\partial y = \varphi(x) . \partial x$ gegeben, so würde man $y$ durch Summation aller derjenigen Werthe von $\partial y$ finden, die sich herausstellen, wenn man in $\varphi(x) . \partial x$ statt $x$ nach und nach $\partial x$, $2 \partial x$, $3 \partial x$, $4 \partial x$ ... bis $n \partial x = x$ einsetzt. Diese Summation deutet man durch das sogenannte Integralzeichen $\int$ an, welches man vor den allgemeinen Ausdruck für die zu summirenden Elemente setzt, schreibt also statt:

Fig. 31.




$$y = [\varphi(\partial x) + \varphi(2 \partial x) + \varphi(3 \partial x) + \cdots + \varphi(x)] \partial x,$$

$$y = \int \varphi(x) \partial x.$$

Auch nennt man in diesem Falle $y$ das Integral von $\varphi(x) \partial x$, sowie $\varphi(x) \partial x$ das Differenzial von $y$.

Zuweilen kann man das Integral $\int \varphi(x) \partial x$ durch wirkliches Summiren der Reihe $\varphi(\partial x)$, $\varphi(2 \partial x)$, $\varphi(3 \partial x)$ u. s. w. bestimmen; viel einfacher ist es jedoch, bei Ausmittelung eines Integrals eine der im Folgenden entwickelten Regeln der sogenannten Integralrechnung in Anwendung zu bringen.

Ist $n$ die Anzahl der Elemente $\partial x$ von $x$, also $x = n \partial x$, oder $\partial x = \frac{x}{n}$, so kann man setzen:

$$\int \varphi(x) \partial x = \left[\varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{3x}{n}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{nx}{n}\right)\right] \frac{x}{n}.$$

Für das Differenzial $\partial y = a x \partial x$ hat man z. B. das Integral:

$$y = \int a x \partial x = a \partial x (\partial x + 2 \partial x + 3 \partial x + \cdots + n \partial x)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n) a \partial x^2,$$

oder, da nach Art. 15, IV, für $n = \infty$, die Summe der natürlichen Zahlenreihe $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n^2$ und $\partial x^2 = \frac{x^2}{n^2}$ ist,

$$y = \int a x \partial x = \frac{1}{2} n^2 a \frac{x^2}{n^2} = \frac{1}{2} a x^2.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$y = \int \varphi(x) \partial x = \int \frac{x^2 \partial x}{a} = [(\partial x)^2 + (2 \partial x)^2 + 3 \partial x)^2 + \cdots + (n \partial x)^2] \frac{\partial x}{a}$$
$$= (1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \frac{\partial x^3}{a},$$

wenn $x = n \partial x$ gesetzt, oder aus $n$ Elementen $\partial x$ bestehend angenommen wird. Nun ist aber nach §. 15, IV, für $n = \infty$,

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3}, \text{ daher folgt:}$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{a} = \frac{n^3}{3} \cdot \frac{\partial x^3}{a} = \frac{(n \partial x)^3}{3a} = \frac{x^3}{3a}.$$

Art. 17. Aus der Formel $\partial [a + m f(x)] = m \partial f(x)$ ergiebt sich durch Umkehrung $\int m \partial f(x) = a + m f(x) = a + m \int \partial f(x)$,

oder $\partial f(x) = \varphi(x) \cdot \partial x$ gesetzt,

$$\text{I.)} \quad \int m \, \varphi(x) \partial x = a + m \int \varphi(x) \partial x,$$

und hieraus folgt, daß der constante Factor $m$ beim Integriren sowie beim Differenziiren unverändert bleibt, und daß durch bloßes Integriren ein etwa vorhandenes constantes Glied $a$ nicht bestimmt werden kann; daß also das Integriren allein ein noch unbestimmtes Integral liefert.

Um das constante Glied zu finden, müssen zwei zusammengehörige Werthe von $x$ und $y = \int \varphi(x) \partial x$ bekannt sein. Ist für $x = c$, $y = k$, und hat man $y = \int \varphi(x) \partial x = a + f(x)$ gefunden, so muß auch:

$$k = a + f(c)$$

sein, und es giebt daher die Subtraction: $y - k = f(x) - f(c)$, also in diesem Falle:

$$y = \int \varphi(x) \partial x = k + f(x) - f(c) = f(x) + k - f(c);$$

und man hat hiernach die Constante $a = k - f(c)$.

Wenn man z. B. weiß, daß das unbestimmte Integral:

$$y = \int x \partial x = \frac{x^2}{2} \text{ für } x = 1, \; y = 3 \text{ giebt,}$$

so hat man die nöthige Constante $a = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, und daher das Integral:

$$y = \int x \partial x = a + \frac{x^2}{2} = \frac{5 + x^2}{2}.$$

Selbst die Constantenbestimmung läßt das Integral noch unbestimmt, weil noch für $x$ als Urvariable, jeder beliebige Werth angenommen werden kann; will man aber einen ganz bestimmten Werth $k_1$ des Integrals haben, der einem bestimmten Werth $c_1$ von $x$ entspricht, so muß man noch diesen in das gefundene Integral ein-, also $k_1 = k + f(c_1) - f(c)$ setzen.

So giebt z. B. $y = \int x \partial x = \frac{5 + x^2}{2}$, für $x = 5$, $y = 15$.

Meist ist derjenige Werth von $x$ bekannt, bei welchem $y = 0$ ausfällt; in diesem Falle hat man also $k = 0$, und es führt daher das unbestimmte

Integral $\int \varphi(x) \partial x = f(x)$ auf das bestimmte $k_1 = f(c_1) - (c)$, das also gefunden wird, wenn man in den Ausdruck $f(x)$ für das unbestimmte Integral die beiden gegebenen Grenzwerthe $c_1$ und $c$ von $x$ einsetzt, und die erhaltenen Werthe von einander subtrahirt. Um dies anzudeuten, schreibt man statt $\int \varphi(x) \partial x$, $\int_c^{c_1} \varphi(x) \partial x$, wenn also z. B. $\int \varphi(x) \partial x = \frac{x^2}{2}$ ist, $\int_c^{c_1} \varphi(x) \partial x = \frac{c_1^2 - c^2}{2}$.

Die Umkehrung der Differenzialformel $\partial [f(x) + \varphi(x)] = \partial f(x) + \partial \varphi(x)$ giebt die Integralformel: $\int [\partial f(x) + \partial \varphi(x)] = f(x) + \varphi(x)$, oder wenn man $\partial f(x) = \psi(x) \partial x$ und $\partial \varphi(x) = \chi(x) \partial x$ setzt:

$$\text{II.)} \quad \int [\psi(x) \partial x + \chi(x) \partial x] = \int \psi(x) \partial x + \int \chi(x) \partial x.$$

Es ist also hiernach das Integral von einer Summe mehrerer Differenzialien gleich der Summe von den Integralen der einzelnen Differenzialien.

Z. B. $\int (3 + 5x) \partial x = \int 3 \partial x + \int 5x \partial x = 3x + {}^5/_2 x^2$.

Art. 18. Die wichtigste Differenzialformel IV des Artikels 8:

$$\partial (x^n) = n x^{n-1} \partial x,$$

führt durch Umkehrung auf die ebenfalls sehr wichtige Integralformel. Es ist hiernach $\int n x^{n-1} \partial x = x^n$, oder $n \int x^{n-1} \partial x = x^n$, daher

$$\int x^{n-1} \partial x = \frac{x^n}{n};$$

setzt man also $n - 1 = m$, und hiernach $n = m + 1$, so erhält man folgendes wichtige Integral:

$$\int x^m \partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

welches in Anwendung mindestens ebenso oft vorkommt, als alle übrigen zusammen.

Die Form dieses Integrales weist auch darauf hin, daß es dem in Art. 9 abgehandelten und in Fig. 17 abgebildeten Curvensysteme entspricht.

Hiernach ist z. B. $\int 5 x^3 \partial x = 5 \int x^3 \partial x = {}^5/_4 x^4$; ferner:

$$\int \sqrt[3]{x^4} \partial x = \int x^{4/3} \partial x = {}^3/_7 x^{7/3} = {}^3/_7 \sqrt[3]{x^7};$$

$$\int \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} = {}^1/_2 \int x^{-1/2} \partial x = {}^1/_2 \frac{x^{1/2}}{1/2} = \sqrt{x};$$

$$\int (4 - 6x^2 + 5x^4) \partial x = \int 4 \partial x - \int 6 x^2 \partial x + \int 5 x^4 \partial x$$
$$= 4 \int \partial x - 6 \int x^2 \partial x + 5 \int x^4 \partial x = 4x - 2x^3 + x^5;$$

ferner, wenn man $3x - 2 = u$, also $3\partial x = \partial u$, oder $\partial x = \frac{\partial u}{3}$ einsetzt:

$$\int \sqrt{3x - 2} \,.\, \partial x = \int u^{1/2} \frac{\partial u}{3} = 1/3 \; \frac{u^{3/2}}{3/2} = 2/9 \sqrt{u^3}$$
$$= 2/9 \sqrt{(3x-2)^3};$$

endlich, wenn $2x^2 - 1 = u$, also $4x\partial x = \partial u$, d. i. $x\partial x = \frac{\partial u}{4}$ gesetzt wird:

$$\int \frac{5x\partial x}{\sqrt[3]{2x^2-1}} = \int \frac{5\partial u}{4\sqrt[3]{u}} = \frac{5}{4}\int u^{-1/3}\partial u = \frac{5}{4}\;\frac{u^{2/3}}{2/3}$$
$$= \frac{15}{8}\sqrt[3]{u^2} = \frac{15}{8}\sqrt[3]{(2x^2 - 1)^2}.$$

Durch Hinzufügung der Grenzwerthe lassen sich die unbestimmten Integrale sogleich in bestimmte verwandeln, z. B.:

$$\int_1^2 5x^3\partial x = 5/4\,(2^4 - 1^4) = 5/4 \,.\, (16 - 1) = 18^3/_4.$$

$$\int_4^9 \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$$

$$\int_1^{16}\sqrt{3x - 2} \,.\, \partial x = 2/9\,(\sqrt{16^3} - \sqrt{1^3}) = 2/9\,(64-1) = 14.$$

Wäre z. B. $\int(4 - 6x^2 + 5x^4)\partial x = 7$ für $x = 0$, so hätte man allgemein: $\int(4 - 6x^2 + 5x^4)\,\partial x = 7 + 4x - 2x^3 + x^5$.

Art. 19. Die sogenannte Exponentialfunction $y = a^x$, welche in einer Potenz mit variablen Exponenten besteht, läßt sich mittels Mac Laurin's Theorem wie folgt in eine Reihe verwandeln, wobei auch zugleich das Differenzial derselben mit gefunden wird.

Setzt man $a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$, oder, da für $x = 0$, $a^x$ den Werth $a^0 = 1$ annimmt, also $A_0 = 1$ ausfällt,

$a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$, so hat man auch:

$a^{\partial x} = 1 + A_1\partial x + A_2\partial x^2 + A_3\partial x^3 + \cdots$, und daher

$$\partial(a^x) = a^{x+\partial x} - a^x = a^x a^{\partial x} - a^x = a^x(a^{\partial x} - 1)$$
$$= a^x(A_1\partial x + A_2\partial x^2 + A_3\partial x^3 + \cdots)$$
$$= a^x(A_1 + A_2\partial x + \cdots)\partial x = A_1 a^x \partial x.$$

Nun folgt durch successives Differenziiren der Reihe

$$f(x) = a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

$$f_1(x) = \frac{\partial(a^x)}{\partial x} = A_1 a^x = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \cdots,$$

$$f_2(x) = \frac{\partial(A_1 a^x)}{\partial x} = A_1^2 a^x = 2 A_2 + 2 \,.\, 3 \,.\, A_3 x + \cdots,$$

$$f_3(x) = \frac{\partial(A_1^2 a^x)}{\partial x} = A_1^3 a^x = 2 \,.\, 3 \,.\, A_3 + \cdots.$$

setzt man daher $x = 0$, so folgt:

$$A_1 = A_1,\; 2 A_2 = A_1^2,\; 2 \,.\, 3 \,.\, A_3 = A_1^3 + \cdots,$$

daher

$$A_2 = \frac{1}{1 \,.\, 2} A_1^2,\; A_3 = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} A_1^3,\; A_4 = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} A_1^4 \text{ u. s. w.},$$

und es nimmt die Exponentialreihe die Form

$$\text{I.)} \quad a^x = 1 + A_1 \frac{x}{1} + A_1^2 \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + A_1^3 \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + A_1^4 \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \cdots \text{ an.}$$

Der constante Coefficient $A_1$ ist natürlich eine bestimmte Function der constanten Grundzahl, sowie letztere eine Function des ersteren; giebt man daher die eine von beiden Zahlen, so ist dadurch die andere auch bestimmt. Die einfachste oder sogenannte natürliche Potenzenreihe erhält man für $A_1 = 1$, deren Grundzahl ($a$) in der Folge mit $e$ bezeichnet wird. Es ist also:

$$\text{II.)} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \cdots$$

und setzt man $x = 1$, so ergiebt sich die Grundzahl der natürlichen Potenzenreihe:

$$e^1 = e = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + \cdots = 2{,}7182828 \ldots$$

Setzt man $e = a^m$, oder $a = e^{1/m}$, so ist $1/m = Log.\ nat.\ a$, der sogenannte natürliche oder hyperbolische Logarithme von $a$, und

$$\text{III.)} \quad a^x = (e^{1/m})^x = e^{\frac{x}{m}} = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1 \,.\, 2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \cdots$$

Da diese Reihe der Form nach mit der unter I. übereinstimmt, so ist auch $A_1 = \frac{1}{m}$, und

IV.) $\partial (a^x) = A_1 a^x \partial x = \frac{a^x \partial x}{m} = Log.\, nat.\, a \,.\, a^x \partial x$, sowie

V.) $\partial (e^x) = e^x \partial x$.

Z. B. $\partial (e^{3x+1}) = e^{3x+1} \partial (3x + 1) = 3 e^{3x+1} \partial x$.

Setzt man $y = a^x = e^{\frac{x}{m}}$, so hat man umgekehrt:

$$x = Log._a\, y \text{ und } \frac{x}{m} = Log.\, nat.\, y, \text{ daher}$$

$$Log._a\, y = m\, Log.\, nat.\, y, \text{ sowie umgekehrt}$$

$$Log.\, nat.\, y \text{ oder } Log._e\, y = \frac{1}{m}\, Log._a\, y.$$

Die Zahl $m$ heißt der Modul des der Grundzahl $a$ entsprechenden Logarithmensystemes. Es läßt sich also mit Hülfe desselben der natürliche Logarithme in jeden künstlichen, und umgekehrt, ein solcher in den natürlichen verwandeln. Für das Brigg'sche Logarithmensystem ist die Basis $a = 10$, daher $^1/_m = Log.\, nat.\, 10 = 2{,}30258\ldots$, und umgekehrt, der Modul

$$m = \frac{1}{Log.\, nat.\, 10} = 0{,}43429\ldots$$

Es ist also:

$$Log.\, y = 0{,}43429\; Log.\, nat.\, y, \text{ und}$$

$$Log.\, nat.\, y = 2{,}30258\; Log.\, y.$$

(Vergl. Ingenieur, S. 81 u. s. w.)

Art. 20. Der Lauf der Curven, welche den Exponentialfunctionen $y = e^x$ und $y = 10^x$ entsprechen, wird durch Fig. 32 (a. f. S.) veranschaulicht. Für $x = 0$ ist in beiden Fällen $y = e^0 = a^0 = 1$; deshalb gehen denn auch beide Curven $OQS$ und $OQ_1S_1$ durch denselben Punkt $(O)$ in der Ordinatenaxe $AY$. Für $x = 1$, ist:

$$y = e^x = 2{,}718\ldots, \text{ und}$$

$$y = 10^x = 10,$$

für $x = 2$, giebt:

$$y = e^x = 2{,}718^2 = 7{,}389 \text{ und}$$

$$y = 10^x = 10^2 = 100 \text{ u. s. w.};$$

es steigen also auf der positiven Seite der Abscissenaxe beide Curven, zumal aber die letztere, sehr stark an; dagegen ist für $x = -1$:

$$e^x = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718\ldots} = 0{,}368\ldots, \text{ und}$$

$$10^x = 10^{-1} = 0{,}1;$$

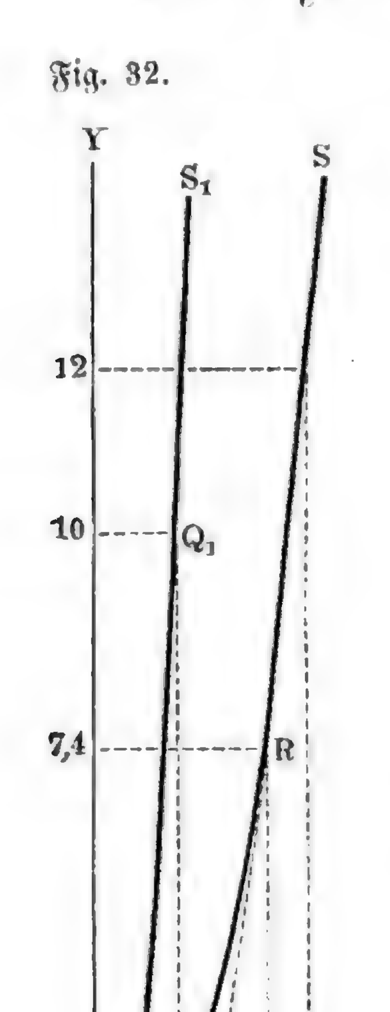
ferner für $x = -2$:

$$e^x = e^{-2} = \frac{1}{2{,}718^2} = 0{,}135 \text{ und } 10^x = 10^{-2} = 0{,}01;$$

endlich für $x = -\infty$ geben beide Gleichungen:

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0.$$

Fig. 32.




Es nähern sich also beide Curven auf der negativen Seite der Abscissenaxe dieser Axe immer mehr und mehr, und zwar die letztere stärker als die erstere; jedoch findet ein wirkliches Zusammentreffen mit dieser Axe nie statt.

Da aus

$$y = e^x,\ x = Log.nat.\,y$$

und ebenso aus

$$y = a^x,\ x = Log._a\,y$$

folgt, so geben diese Curven auch eine Scala der natürlichen und Brigg'schen Logarithmen ab; es sind nämlich die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten; so ist z. B.

$$AM = Log.nat.\,MP$$
$$= Log._a\,MP_1$$

u. s. w.

Nach der Differenzialformel IV. des letzten Artikels ist der Tangentenwinkel $\alpha$ der Exponentialcurve durch die einfache Formel:

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^x \partial x}{m \partial x}$$
$$= \frac{a^x}{m} = \frac{y}{m} = y\ Log.nat.\,a$$

bestimmt.

Bei der Curve $O P_1 Q_1 S_1$, Fig. 32, ist folglich die Subtangente $= y\, cotg.\,\alpha = m$, also constant, und bei der Curve $O P Q S$ ist sie stets $= 1$, z. B. für den Punkt $Q$, $\overline{A1} = 1$, für den Punkt $R$, $\overline{12} = 1$ u. s. w.

Art. 21. Ist $x = a^y$, so hat man auch

$$\partial x = \partial(a^y) = \frac{a^y \partial y}{m},$$

und umgekehrt,

$$\partial y = \frac{m \partial x}{a^y} = \frac{m \partial x}{x}.$$

Nun ist aber auch $y = Log._a x$, d. i. der Logarithme der variablen Potenz $x$ bei der constanten Grundzahl $a$, daher hat man auch folgende Differenzialformeln der logarithmischen Functionen

$$y = Log._a x \text{ und } y = Log. nat. x:$$

$$\text{I.)} \quad \partial (Log._a x) = \frac{m \partial x}{x} = \frac{1}{Log. nat. a} \cdot \frac{\partial x}{x}, \text{ sowie}$$

$$\text{II.)} \quad \partial (Log. nat. x) = \frac{\partial x}{x}.$$

Ist $\alpha$ der Tangentenwinkel der Curve, welche der Gleichung $y = Log._a x$ entspricht, so hat man $tang. \alpha = \frac{m}{x}$, und die Subtangente

$$= y \, cotg. \alpha = \frac{x y}{m},$$

also proportional dem Inhalte $x y$ eines aus den Seiten $x$ und $y$ zu construirenden Rechteckes.

Mittels der gefundenen Differenzialformeln I. und II. erhält man:

$$1) \quad \partial (Log. nat. \sqrt[2]{x}) = \frac{\partial \sqrt[2]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\partial (x^{1/2})}{x^{1/2}} = {}^1/_2 \frac{x^{-1/2} \partial x}{x^{1/2}} = \frac{\partial x}{2 x},$$

$$\text{oder auch} = \partial ({}^1/_2 \, Log. nat. x) = {}^1/_2 \, \partial (Log. nat. x) = {}^1/_2 \cdot \frac{\partial x}{x}.$$

$$2) \quad \partial \, Log. nat. \left(\frac{2 + x}{x^2}\right) = \partial \, [Log. (2 + x) - Log. x^2]$$

$$= \partial \, Log. (2 + x) - \partial \, Log. (x^2)$$

$$= \frac{\partial x}{2 + x} - 2 \frac{\partial x}{x} = - \frac{(4 + x) \partial x}{x (2 + x)}.$$

$$3) \quad \partial \left(Log. nat. \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = \partial \, [Log. nat. (e^x - 1)] - \partial \, [Log. nat. (e^x + 1)]$$

$$= \frac{\partial (e^x)}{e^x - 1} - \frac{\partial (e^x)}{e^x + 1} = \frac{e^x \, d x}{e^x - 1} - \frac{e^x \partial x}{e^x + 1} = \frac{2 e^x \, d x}{e^{2x} - 1}.$$

Art. 22. Wenn man die Differenzialformeln des vorigen Artikels umkehrt, so stößt man, wie folgt, auf andere wichtige Integralformeln.

Aus $\partial (a^x) = \frac{a^x \partial x}{m}$, folgt $\int \frac{a^x \partial x}{m} = a^x$, d. i.:

I.) $\int a^x \partial x = m a^x = a^x : Log. nat. a$, und daher:

II.) $\int e^x \partial x = e^x$.

Ferner aus $\partial(Log._a x) = \frac{m\,dx}{x}$, folgt $\int \frac{m\,\partial x}{x} = Log._a x$, d. i.:

III.) $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{m} Log._a x = Log.nat.x$, und dasselbe giebt auch die Formel $\partial(Log.nat.x) = \frac{\partial x}{x}$.

Hiernach lassen sich leicht folgende Beispiele berechnen:

$$\int e^{5x-1}\partial x = {}^1/_5 \int e^{5x-1}\partial(5x-1) = {}^1/_5\, e^{5x-1}.$$

$$\int \frac{3\,\partial x}{7x+2} = {}^3/_7 \int \frac{\partial(7x+2)}{7x+2} = {}^3/_7\, Log.nat.(7x+2).$$

$$\int \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)\partial x = \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)\partial x$$

$$= \int x\,\partial x + \int \partial x + 2\int \frac{\partial(x-1)}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\,Log.nat.(x-1).$$

Art. 23. Die erste Integralformel $\int x^m\,\partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ läßt das letzte Integral unbestimmt; denn $m = -1$ gesetzt, folgt:

$\int \frac{\partial x}{x} = \int x^{-1}\,\partial x = \frac{x^0}{0} +$ eine Constante $= \infty +$ Constante; setzen wir aber $x = 1 + u$, und $dx = du$, so erhalten wir:

$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots)\,du$, und daher

$$\int \frac{\partial x}{x} = \int \frac{\partial u}{1+u} = \int (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots)\,du$$

$$= \int \partial u - \int u\,\partial u + \int u^2\,\partial u - \int u^3\,\partial u + \cdots$$

$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots;$$

es läßt sich also auch $Log.nat.(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$, oder

IV.) $Log.nat.x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$

setzen.

Mit Hülfe dieser Reihe lassen sich die Logarithmen solcher Zahlen berechnen, welche wenig von 1 abweichen; hat man aber von größeren Zahlen die Logarithmen zu finden, so schlage man folgenden Weg ein.

Nimmt man $u$ negativ, so giebt die vorletzte Reihe:

$$Log.nat.(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \cdots;$$

und es folgt nun durch die Subtraction beider Reihen von einander:

$$Log.nat.(1+u) - Log.nat.(1-u) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots\right), \text{ d. i.}$$

$$Log.\ nat.\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots\right), \text{ oder}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = x, \text{ also } u = \frac{x-1}{x+1} \text{ gesetzt,}$$

$$\text{V.)} \quad Log.nat.\ x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + {}^1/_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + {}^1/_5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right].$$

Diese Reihe ist auch zur Bestimmung der Logarithmen von solchen Zahlen zu gebrauchen, welche bedeutend von 1 abweichen, da $\frac{x-1}{x+1}$ stets unter 1 ausfällt.

Es ist auch $Log.(x+y) - Log.x = Log.\left(\frac{x+y}{x}\right) = Log.\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

$$= \frac{y}{x} - {}^1/_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + {}^1/_3\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \text{ꝛc.}$$

$$= 2\left[\frac{y}{2x+y} + {}^1/_3\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + {}^1/_5\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$

und daher:

$$\text{VI.)} \quad Log.(x+y) = Log.x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + {}^1/_3\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \cdots\right].$$

Diese Formel ist anzuwenden, um aus einem Logarithmen einen nächst größeren zu berechnen.

Z. B. $Log.\ nat.\ 2 = 2\left[\frac{2-1}{2+1} + {}^1/_3 \cdot \left(\frac{2-1}{2+1}\right)^3 + \cdots\right]$

$$= 2\left({}^1/_3 + {}^1/_3 \cdot {}^1/_{27} + {}^1/_5 \cdot {}^1/_{243} + \cdots\right)$$

$$= 2\left\{\begin{matrix} 0{,}33333 \\ 0{,}01234 \\ 0{,}00082 \\ 0{,}00007 \end{matrix}\right\} = 2 \cdot 0{,}34656 = 0{,}69312,$$

genauer $= 0{,}69314718.$

$Log.\ nat.\ 8 = Log.\ nat.\ 2^3 = 3\ Log.\ nat.\ 2$ ist hiernach $= 2{,}0794415,$ und endlich nach der letzten Formel:

$$Log.nat.\ 10 = Log.nat.(8+2)$$

$$= Log.nat.\ 8 + 2\left[\frac{2}{16+2} + {}^1/_3\left(\frac{2}{16+2}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2{,}0794415 + 0{,}2231436 = 2{,}302585.$$

Man kann auch

$$Log.\,nat.\,2 = Log.\,nat.\,1 + 2\left[\frac{1}{4+1} + {}^1\!/_3\left(\frac{1}{4+1}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2\left({}^1\!/_5 + {}^1\!/_3 \cdot \frac{1}{5^3} + {}^1\!/_5 \cdot \frac{1}{5^5} + \cdots\right) = 0{,}693147, \text{ ferner}$$

$$Log.\,nat.\,5 = Log.\,nat.\,(4+1) = 2\;Log.\,nat.\,2 + 2\left({}^1\!/_9 + {}^1\!/_3 \cdot \frac{1}{9^3} + \cdots\right),$$

und zuletzt $Log.\,nat.\,10 = Log.\,nat.\,2 + Log.\,nat.\,5$ setzen.
(Vergl. Artikel 19.)

Art. 24. Von praktischer Wichtigkeit sind endlich noch die trigonometrischen und Kreisfunctionen, deren Differenziale und Integrale ebenfalls im Folgenden ermittelt werden.

Die Sinusfunction $y = sin.\,x$ giebt für $x = 0$, $y = 0$;

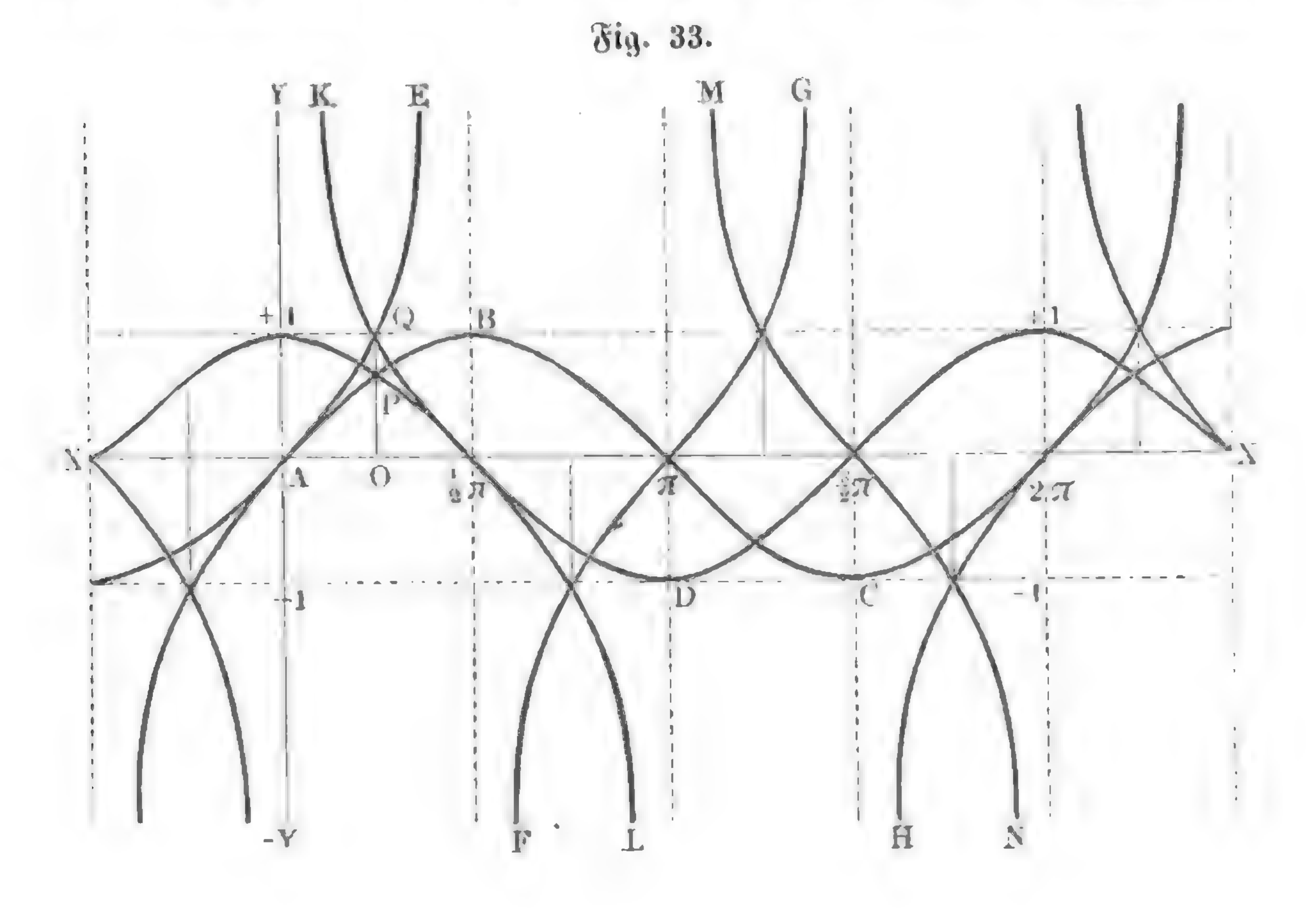
für $x = \frac{\pi}{4} = \frac{3{,}1416}{4} = 0{,}7854\ldots$, $y = \sqrt{{}^1\!/_2} = 0{,}7071$,

für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, für $x = \pi$, $y = 0$;

für $x = {}^3\!/_2\,\pi$, $y = -1$, für $x = 2\pi$, $y = 0$ u. s. w.;

trägt man daher $x$ als Abscissen $AO$ und $y$ als die entsprechenden Ordinaten $OP$ auf, so erhält man die schlangenförmige Curve ($APB\pi C\overline{2\pi}$), Fig. 33, welche sich nach beiden Seiten von $A$ ins Unendliche fortsetzen läßt.

Fig. 33.



Die Cosinusfunction $y = cos. x$ giebt für $x = 0$, $y = 1$, für $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \sqrt{1/2}$, für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, für $x = \pi$, $y = -1$, für $x = 3/2\,\pi$, $y = 0$, für $x = 2\pi$, $y = 1$ u. s. w.; ihr entspricht daher genau dieselbe Schlangenlinie $\left(+1\,P\frac{\pi}{2}\,D\frac{3\pi}{2}+1\right)$ wie der Sinusfunction, nur ist dieselbe auf der Abscissenaxe um $1/2\,\pi = 1{,}5708$.. weiter vor oder hinter der Sinuscurve.

Ganz anders sind aber die Curven gestaltet, welche den Tangens- und Cotangensfunctionen $y = tang. x$ und $y = cotang. x$ entsprechen. Setzt man in $y = tang. x$, $x = 0$, $1/4\,\pi$, $1/2\,\pi$, so erhält man $y = 0$, $1$, $\infty$, und daher eine Curve $(A\,Q\,E)$, welche sich einer durch den Theilpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ der Abscissenaxe $A\,X$ gehenden Parallele zur Ordinatenaxe $A\,Y$ immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen. Nimmt man ferner $x = \frac{\pi}{2}$, $\pi$, $3/2\,\pi$, so erhält man $y = -\infty$, $0$, $+\infty$, und daher eine Curve $(F\pi G)$, die sich den Parallelen durch $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $(3/2\,\pi)$ bis ins Unendliche nähert, oder wie man sagt, diese Parallelen zu Asymptoten (s. Art. 11) hat.

Bei ferneren Annahmen für $x$ wiederholen sich dieselben Werthe von $y$, und deshalb wird also auch der Function $y = tang. x$ durch lauter Curven, wie $(F\pi G)$, welche um $\pi = 3{,}1416$ in der Richtung der Abscissenaxe von einander abstehen, entsprochen.

Die Function

$y = cotang. x$, giebt dagegen für $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$; $y = \infty$; $1$, $0$, $-\infty$,

daher entspricht derselben eine Curve $\left(K\,Q\frac{\pi}{2}\,L\right)$, welche von der Tangentencurve nur der Lage nach verschieden ist; auch läßt sich leicht einsehen, daß noch unendlich viele Curvenzweige, wie z. B. $\left(M\frac{3\pi}{2}\,N\right)$ u. s. w. dieser Function angehören.

Während sowohl die Curve für Sinus und auch die für Cosinus (die sogenannte Sinusoide und Cosinusoide) ein stetig zusammenhängendes Ganzes bildet, besteht die Curve für die Tangenten, sowie auch die für die Cotangenten (die sogenannte Tangentoide und Cotangentoide) aus lauter getrennten Zweigen, indem ihre Ordinaten für gewisse Werthe von $x$ aus dem positiven Unendlichen in das negative Unendliche überspringen, wobei natürlich die Curve ihre Continuität verliert.

Art. 25. Die Differenziale der trigonometrischen Linien oder Functionen ergeben sich durch Betrachtung der Fig. 34, in welcher $CA = CP = CQ = 1$, Bog. $AP = x$, $PQ = \partial x$, ferner: $PM = sin.\, x$, $CM = cos.\, x$, $AS = tang.\, x$, endlich: $OQ = NQ - MP = sin.\,(x + \partial x) - sin.\, x = \partial\, sin.\, x$, $OP = -(CN - CM) = -cos.\,(x + \partial x) - cos.\, x = -\partial\, cos.\, x$, und $ST = AT - AS = tang.\,(x + \partial x) - tang.\, x = \partial\, tang.\, x$ ist.

Da das Bogenelement $PQ$ rechtwinkelig auf dem Halbmesser $CP$ steht, und der Winkel $PCA$ zwischen zwei Linien $CP$ und $CA$ dem Winkel $PQO$ zwischen ihren Perpendikeln $PQ$ und $OQ$ gleich ist, so sind die Dreiecke $CPM$ und $QPO$ einander ähnlich, und es ist:

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{CM}{CP}, \text{ d. i. } \frac{\partial\, sin.\, x}{\partial x} = \frac{cos.\, x}{1}, \text{ daher}$$

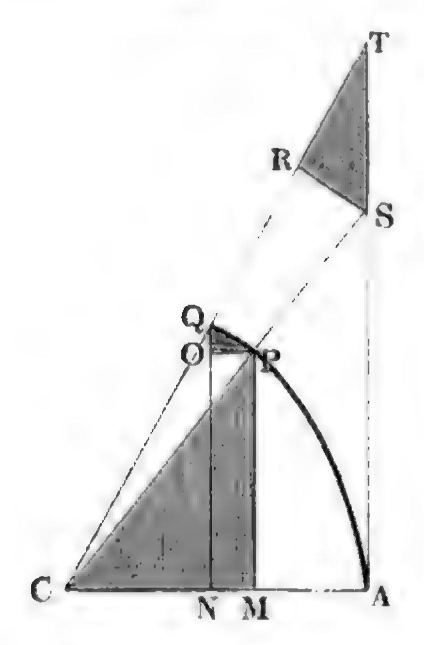
I.) $\partial\,(sin.\, x) = cos.\, x \cdot \partial x$; ebenso auch:

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{PM}{CP}, \text{ d. i. } \frac{-\partial\, cos.\, x}{\partial x} = \frac{sin.\, x}{1}, \text{ daher}$$

II.) $\partial\,(cos.\, x) = -sin.\, x\, \partial x$.

Man ersieht hieraus, daß kleine Fehler im Bogen oder Winkel auf den Sinus um so mehr Einfluß haben, je größer $cos.\, x$, je kleiner also der Bogen oder Winkel ist, daß dagegen dieselben den Cosinus um so mehr verändern, je größer $sin.\, x$ ist, je mehr also der Bogen sich $\frac{\pi}{2}$ nähert, und daß endlich das Differenzial des Cosinus das entgegengesetzte Zeichen von dem des Bogens hat, also, wie bekannt, eine Zunahme von $x$ eine Abnahme von $cos.\, x$ liefert, und umgekehrt, eine Abnahme von $x$ ein Wachsen von $cos.\, x$ giebt.

Fig. 34.




Legt man $SR$ rechtwinkelig auf $CT$ so erhält man ein Dreieck $SRT$, welches wegen der Gleichheit der Winkel $RTS$ und $CQN$ oder $CPM$ dem Dreiecke $CPM$ ähnlich ist, und weshalb man hat:

$$\frac{ST}{SR} = \frac{CP}{CM}, \text{ d. i. } \frac{\partial\, tang.\, x}{SR} = \frac{1}{cos.\, x}.$$

Nun ist aber auch: $\frac{SR}{CS} = \frac{PQ}{CP}$, d. i. $SR = \frac{CS.\partial x}{1}$ und

$$CS = secans.\, x = \frac{1}{cos.\, x}, \text{ daher } SR = \frac{\partial x}{cos.\, x} \text{ und}$$

III.) $\partial\,(tang.\,x) = \dfrac{\partial\,x}{(cos.\,x)^2}$.

Führt man statt $x$, $\frac{\pi}{2} - x$, also statt $\partial\,x$, $\partial\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,\partial\,x$ ein, so erhält man:

$$\partial\,tang.\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,\frac{\partial\,x}{\left[cos.\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2},\ \text{d. i.}$$

IV.) $\partial\,(cotang.\,x) = -\,\dfrac{\partial\,x}{(sin.\,x)^2}$.

Durch Umkehrung geben diese Formeln für das Differenzial des Bogens:

$$\partial\,x = \frac{\partial\,sin.\,x}{cos.\,x} = -\,\frac{\partial\,cos.\,x}{sin.\,x} = (cos.\,x)^2\,\partial\,tang.\,x$$
$$= -\,(sin.\,x)^2\,\partial\,cotang.\,x,\ \text{oder:}$$

$$\partial\,x = \frac{\partial\,sin.\,x}{\sqrt{1 - (sin.\,x)^2}} = \frac{\partial\,tang.\,x}{1 + (tang.\,x)^2}$$

sowie $\quad \partial\,x = -\,\dfrac{\partial\,cos.\,x}{\sqrt{1 - (cos.\,x)^2}} = -\,\dfrac{\partial\,cotang.\,x}{1 + (cotang.\,x)^2}$.

Bezeichnet man nun $sin.\,x$ durch $y$, und $x$ durch $arc.\,(sin. = y)$, so erhält man:

V.) $\partial\,arc.\,(sin. = y) = \dfrac{\partial\,y}{\sqrt{1 - y^2}}$,

und auf gleiche Weise findet man:

VI.) $\partial\,arc.\,(cos. = y) = -\,\dfrac{\partial\,y}{\sqrt{1 - y^2}}$, sowie:

VII.) $\partial\,arc.\,(tang. = y) = \dfrac{\partial\,y}{1 + y^2}$, und

VIII.) $\partial\,arc.\,(cotang. = y) = -\,\dfrac{\partial\,y}{1 + y^2}$.

Art. 26. Die letzten Differenzialformeln geben durch Umkehrung folgende Integralformeln:

I.) $\int cos.\,x\,\partial\,x = sin.\,x$,

II.) $\int sin.\,x\,\partial\,x = -\,cos.\,x$,

III.) $\displaystyle\int \frac{\partial\,x}{cos.\,x^2} = tang.\,x$,

IV.) $\displaystyle\int \frac{\partial\,x}{sin.\,x^2} = -\,cotang.\,x$, ferner:

V.) $\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = arc.(sin. = x) = - arc.(cos. = x),$

VI.) $\int \frac{\partial x}{1+x^2} = arc.(tang. = x) = - arc.(cotang. = x),$

und hierzu lassen sich leicht noch folgende finden.

Es ist $\partial (Log.\, nat.\, sin.\, x) = \frac{\partial\, sin.\, x}{sin.\, x} = \frac{cos.\, x \,.\, \partial x}{sin.\, x} = cotang.\, x \,.\, \partial x,$

folglich:

VII.) $\int cotg.\, x\, \partial x = Log.\, nat.\, sin.\, x,$ ebenso:

VIII.) $\int tang.\, x\, \partial x = - Log.\, nat.\, cos.\, x;$ ferner:

$$\partial\, (Log.\, nat.\, tang.\, x) = \frac{\partial\, tang.\, x}{tang.\, x} = \frac{\partial x}{cos.\, x^2\, tang.\, x}$$

$$= \frac{\partial x}{sin.\, x\, cos.\, x} = \frac{\partial\, (2\, x)}{sin.\, 2\, x},$$ daher:

$$\partial\, (Log.\, nat.\, tang.\, {}^1/_2\, x) = \frac{\partial x}{sin.\, x},$$ und

IX.) $\int \frac{\partial x}{sin.\, x} = Log.\, nat.\, tang.\, \frac{x}{2},$ ebenso:

X.) $\int \frac{\partial x}{cos.\, x} = Log.\, nat.\, tang. \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$$= Log.\, nat.\, cotg. \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Ferner $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a\,(1-x) + b\,(1+x)}{(1+x)\,(1-x)}$ gesetzt, folgt $1 = a\,(1-x) + b\,(1+x)$. Nimmt man $1 + x = 0$, also $x = -1$ an, so erhält man hiernach $1 = a\,(1+1)$, daher $a = {}^1/_2$, und setzt man $1 - x = 0$, also $x = 1$, so ergiebt sich $1 = 2\,b$, daher:

$$b = {}^1/_2 \text{ und } \frac{1}{1-x^2} = \frac{{}^1/_2}{1+x} + \frac{{}^1/_2}{1-x},$$

endlich aber:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = {}^1/_2 \int \frac{\partial x}{1+x} + {}^1/_2 \int \frac{\partial x}{1-x}$$
$$= {}^1/_2\, Log.\, nat.\, (1+x) - {}^1/_2\, Log.\, nat.\, (1-x),$$

d. i.:

XI.) $\int \frac{\partial x}{1-x^2} = {}^1/_2\, Log.\, nat. \left(\frac{1+x}{1-x}\right),$ und ebenso:

XII.) $\int \frac{\partial x}{x^2-1} = {}^1/_2\, Log.\, nat. \left(\frac{x-1}{x+1}\right).$

Setzt man $\sqrt{1+x^2} = xy$, so erhält man $1 + x^2 = x^2y^2$, und $\partial x\,(1-y^2) = xy\,\partial y$, daher:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial y}{1-y^2} = {}^1/_2\,\partial\,Log.\,nat.\left(\frac{1+y}{1-y}\right),\ \text{wonach:}$$

$$\text{XIII.)}\quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = Log.\,nat.\,(x + \sqrt{1+x^2}),\ \text{sowie:}$$

$$\text{XIV.)}\quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}} = Log.\,nat.\,(x + \sqrt{x^2-1})\ \text{folgt.}$$

Art. 27. Um $arc.\,(tang. = x) = \int \frac{\partial x}{1+x^2}$ zu finden, darf man nur $\frac{1}{1+x^2}$ durch Division in eine Reihe verwandeln und dann Glied für Glied integriren. Man erhält so:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots,\ \text{und}$$

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} = \int \partial x - \int x^2 \partial x + \int x^4 \partial x - \int x^6 \partial x + \cdots,$$

folglich:

$$\text{I.)}\quad arc.\,(tang. = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \cdots,\ \text{z. B.:}$$

$$\frac{\pi}{4} = arc.\,(tang. = 1) = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + {}^1/_9 - \cdots,$$

also den Halbkreis $\pi = 4\,(1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + {}^1/_9 - \cdots)$, oder:

$$\frac{\pi}{6} = arc.\,(tang. = \sqrt{{}^1/_3}) = \sqrt{{}^1/_3}\,[1 - {}^1/_3 \cdot {}^1/_3 + {}^1/_5\,({}^1/_3)^2 - {}^1/_7\,({}^1/_3)^3 + \cdots],$$

folglich $\pi = 6\sqrt{{}^1/_3}\,(1 - {}^1/_9 + {}^1/_{45} - {}^1/_{189} + \cdots) = 3{,}1415926\cdots$

Auf gleiche Weise erhält man aus:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + {}^1/_2\,x^2 + {}^3/_8\,x^4 + {}^5/_{16}\,x^6 + \cdots$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \partial x + {}^1/_2 \int x^2 \partial x + {}^3/_8 \int x^4 \partial x + {}^5/_{16} \int x^6 \partial x + \cdots,$$

d. i.:

$$\text{II.)}\quad arc.\,(sin. = x) = x + \frac{1\,x^3}{2\,.\,3} + \frac{1\,.\,3\,x^5}{2\,.\,4\,.\,5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,x^7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7} + \cdots,$$

z. B.:

$$\frac{\pi}{6} = arc.\,(sin. = {}^1/_2) = {}^1/_2\,(1 + {}^1/_{24} + {}^3/_{640} + {}^5/_{7168} + \cdots),$$

also:

$$\pi = 3 \cdot \begin{Bmatrix} 1{,}04167 \\ 0{,}00469 \\ 0{,}00070 \\ 0{,}00012 \end{Bmatrix} = 3{,}1416..$$

Ferner folgt durch successives Differenziiren, wenn man

$sin.\, x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots$ setzt:

$$\frac{\partial (sin.\, x)}{\partial x} = cos.\, x = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + \cdots$$

$$\frac{\partial (cos.\, x)}{\partial x} = - sin.\, x = 2 A_2 + 2 . 3 A_3 x + 3 . 4 A_4 x^2 + \cdots$$

$$- \frac{\partial (sin.\, x)}{\partial x} = - cos.\, x = 2 . 3 . A_3 + 2 . 3 . 4 . A_4 x + \cdots$$

$$- \frac{\partial (cos.\, x)}{\partial x} = sin.\, x = 2 . 3 . 4 . A_4 + \cdots$$

Nun ist aber für $x = 0$, $sin.\, x = 0$, und $cos.\, x = 1$, daher folgt aus der ersten Reihe $A_0 = 0$, aus der zweiten $A_1 = cos.\ 0 = 1$, aus der dritten $A_2 = 0$, aus der vierten $A_3 = -\frac{1}{2 . 3}$, aus der fünften $A_4 = 0$ u. s. w., und wenn man diese Werthe in die fingirte Reihe einsetzt, die Sinusreihe:

III.) $sin.\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ rc.

Auf gleiche Weise ergiebt sich:

IV.) $cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} +$ rc., ferner

V.) $tang. x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 x^5}{3.5} + \frac{17 x^7}{3.5.7.3} + \cdots$ und

VI.) $cotang.\, x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2 x^5}{3.5.7.9} -$ rc.

(Vergl. „Ingenieur“, Seite 159).

Art. 28. Wenn man die Differenzialformel $\partial (u v) = u \partial v + v \partial u$, aus Artikel 8, integrirt, so erhält man den Ausdruck $u v = \int u \partial v + \int v \partial u$, und folgendes unter dem Namen „die Reductionsformel“ bekannte Integral:

$$\int v \partial u = u v - \int u \partial v, \text{ oder}$$

$$\int \varphi (x) \partial f(x) = \varphi (x) f(x) - \int f(x) \partial \varphi (x).$$

Diese Regel kommt stets zur Anwendung, wenn das Integral $\int v \partial u = \int \varphi (x) \partial f(x)$ nicht, dagegen aber das Integral $\int u \partial v = \int f(x) \partial \varphi (x)$ bekannt ist.

Mittels der Reductionsformel läßt sich z. B. das Integral von folgendem Differenzial:

$$\partial y = \sqrt{1 + x^2} \,.\, \partial x$$

auf ein anderes bekanntes Integral zurückführen. Es ist

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}, \text{ also } \partial \varphi(x) = \frac{x \partial x}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ und}$$

$$f(x) = x, \text{ also } \partial f(x) = \partial x$$

zu setzen; folglich hat man:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x = x\sqrt{1 + x^2} - \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

aber:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

daher folgt:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x = x\sqrt{1 + x^2} - \int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x + \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

oder:

$$2\int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x = x\sqrt{1 + x^2} + \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

und folglich:

$$\text{I.)} \quad \int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x = {}^1/_2\, x\sqrt{1 + x^2} + {}^1/_2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$= {}^1/_2 [x\sqrt{1 + x^2} + Ln.(x + \sqrt{1 + x^2})].$$

Ebenso:

$$\text{II.)} \quad \int \sqrt{1 - x^2}\, \partial x = {}^1/_2\, x\sqrt{1 - x^2} + {}^1/_2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= {}^1/_2 [x\sqrt{1 - x^2} + arc.(sin. = x)]$$

und

$$\text{III.)} \quad \int \sqrt{x^2 - 1}\, \partial x = {}^1/_2\, x\sqrt{x^2 - 1} - {}^1/_2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$= {}^1/_2 [x\sqrt{x^2 - 1} - Ln.(x + \sqrt{x^2 - 1})].$$

Auch ist

$$\int (sin.x)^2 \partial x = \int sin.x\, sin.x\, \partial x = -\int sin.x\, \partial(cos.x) = -sin.x\, cos.x$$
$$+ \int cos.x\, \partial(sin.x) = -sin.x\, cos.x + \int (cos.x)^2 \partial x$$
$$= -sin.x\, cos.x + \int [1 - (sin.x)^2]\, \partial x,$$

daher folgt:

$$2\int (sin.x)^2 \partial x = \int \partial x - sin.x\, cos.x, \text{ und}$$

IV.) $\int (sin.x)^2 \partial x = \frac{1}{2}(x - sin.x\,cos.x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} sin.2x)$.

Ebenso ist

V.) $\int (cos.x)^2 \partial x = \frac{1}{2}(x + sin.x\,cos.x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} sin.2x)$.

Ferner hat man

VI.) $\int sin.x\,cos.x\,\partial x = \frac{1}{4}\int sin.2x\,\partial(2x) = -\frac{1}{4} cos.2x$,

VII.) $\int (tang.x)^2 \partial x = tang.x - x$, und

VIII.) $\int (cotg.x)^2 \partial x = -(cotg.x + x)$.

Endlich ist

IX.) $\int x\,sin.x\,\partial x = -x\,cos.x + \int cos.x\,\partial x = -x\,cos.x + sin.x$,

X.) $\int x e^x \partial x = \int x \partial(e^x) = x e^x - \int e^x \partial x = (x-1)e^x$,

XI.) $\int Log.nat.x.\partial x = x\,Log.nat.x - \int x\frac{\partial x}{x} = x(Log.nat.x - 1)$

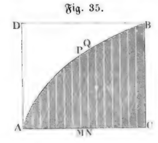
und

XII.) $\int (x\,Log.nat.x\,\partial x) = \frac{x^2}{2} Log.nat.x - \int \frac{x^2}{2}\frac{\partial x}{x}$

$$= (Log.nat.x - \tfrac{1}{2})\frac{x^2}{2}.$$

Art. 29. Kommt es darauf an, eine Curve $APB$, Fig. 35, zu quadriren, d. i. den Inhalt der Fläche $ABC$, welche von dieser Curve $APB$ und von ihren Coordinaten $AC$ und $BC$ begrenzt wird, zu bestimmen oder durch eine Function der Abscisse dieser Curve auszudrücken, so denken wir uns diesen Flächenraum durch unendlich viele Ordinaten $MP$, $NQ$ u. s. w. in lauter streifenförmige Elemente, wie $MNQP$ von der constanten Breite $MN = \partial x$ und der veränderlichen Länge $MP = y$ zerlegt. Da sich nun der Inhalt eines solchen Flächenelementes

Fig. 35.




$$\partial F = \left(\frac{MP + NQ}{2}\right).MN = (y + \tfrac{1}{2}\partial y)\partial x = y\,\partial x$$

setzen läßt, so findet man den Inhalt der ganzen Fläche $F$, indem man das Differenzial $y\,\partial x$ integrirt, also

$$F = \int y\,\partial x$$

setzt.

Z. B. für eine **Parabel** mit dem Parameter $p$ ist $y^2 = p\,x$, und daher folgt die Fläche derselben:

$$F = \int \sqrt{p\,x}\,\partial x = \sqrt{p} \int x^{1/2}\,\partial x = \frac{\sqrt{p} \cdot x^{3/2}}{3/2} = {}^2/_3\,x\sqrt{p\,x} = {}^2/_3\,x\,y.$$

Die Parabelfläche $A\,B\,C$ ist also zwei Drittel von dem sie umschließenden Rechtecke $A\,C\,B\,D$.

Diese Formel gilt auch für **schiefwinkelige**, unter einem Winkel $X\,A\,Y = \alpha$ zusammenstoßende Coordinaten, z. B. für die Fläche $A\,B\,C$, Fig. 36, wenn nur statt $B\,C = y$, der Normalabstand $B\,N = y\,sin.\,\alpha$ eingesetzt wird; man hat also hier:

$$F = sin.\,\alpha \int y\,\partial x,$$

z. B. bei der Parabelfläche, wenn die Abscissenaxe $A\,X$ einen Durchmesser und die Ordinatenaxe $A\,Y$ eine Tangente der Parabel bildet, also $y^2 = p_1\,x = \frac{p\,x}{sin.\,\alpha^2}$ ist (s. „Ingenieur" Seite 177):

$$F = {}^2/_3\,x\,y\,sin.\,\alpha,$$

d. i.:

Fläche $A\,B\,C$ = $^2/_3$ Parallelogramm $A\,C\,B\,D$.

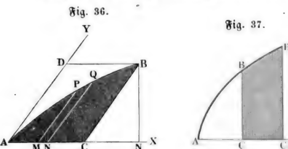


Fig. 36. Fig. 37.

Für eine Fläche $B\,C\,C_1\,B_1 = F$, zwischen den Abscissen $A\,C_1 = c_1$ und $A\,C = c$, Fig. 37, ist nach Artikel 17:

$$F = \int_c^{c_1} y\,\partial x.$$

Z. B. für $y = \frac{a^2}{x}$ ist:

$$F = \int_c^{c_1} \frac{a^2\,\partial x}{x} = a^2\,(Log.\,nat.\,c_1 - Log.\,nat.\,c),\ \text{d. i.:}$$

$$F = a^2\,Log.\,nat.\left(\frac{c_1}{c}\right).$$

Der Gleichung $\frac{a^2}{x}$ entspricht die oben in Artikel 3 kennen gelernte Curve $PQ$, Fig. 38, und wenn daher $AM = c$ und $AN = c_1$ ist, so giebt

Fig. 38.

$$F = a^2\, Log.\, nat. \left(\frac{c_1}{c}\right)$$

den Flächenraum von $MNQP$ an. Nimmt man noch der Einfachheit wegen, $a = c = 1$ und $c_1 = x$ an, so hat man:

$$F = Log.\, nat.\, x;$$

es sind hiernach die Flächenräume $(1\, MP\, 1)$, $(1\, NQ\, 1)$ u. s. w. die natürlichen Logarithmen der Abscissen $AM$, $AN$ u. s. w. Die Curve selbst ist eine sogenannte **gleichseitige Hyperbel**, in welcher die beiden Halbaxen $a$ und $b$ einander gleich sind, folglich der Asymptotenwinkel $\alpha = 45^0$ ist, und die Geraden $AX$ und $AY$, welchen sich die Curve immer mehr und mehr nähert, ohne sie zu erreichen, sind die **Asymptoten** derselben. Wegen dieses Zusammenhanges zwischen den Abscissen und den Flächenräumen werden die **natürlichen Logarithmen** sehr oft **hyperbolische Logarithmen** genannt.

Art. 30. Man kann auch jedes Integral $\int y\, \partial x = \int \varphi(x)\, \partial x$ gleich dem Inhalte einer Fläche $F$ setzen, und wenn sich nun die Integration durch eine der bekannten Regeln nicht vollziehen läßt, so kann man es wenigstens annähernd finden, wenn man durch Anwendung der bekannten geometrischen Hülfsmittel den Inhalt des entsprechenden Flächenraumes ausmittelt.

Fig. 39.




Für eine Fläche $ABPQN$, Fig. 39, die durch die Grundlinie $AN = x$ und durch die drei gleich weit von einander abstehenden Ordinaten $AB = y_0$, $MP = y_1$ und $NQ = y_2$ bestimmt ist, hat man den trapezoidalen Theil:

$$ABQN = F_1 = (y_0 + y_2)\,\frac{x}{2}$$

und den segmentförmigen Theil $BPQSB$, wenn man $BPQ$ als Parabel ansieht:

$$F_2 = {}^2/_3\, PS.BR = {}^2/_3\,(MP - MS).AN = {}^2/_3 \left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right) x,$$

daher die ganze Fläche:

$$F = F_1 + F_2 = \left[{}^1/_2 (y_0 + y_2) + {}^2/_3 \left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right] x$$

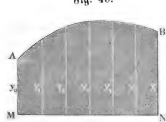
$$= [{}^1/_6 (y_0 + y_2) + {}^2/_3 y_1] x = (y_0 + 4 y_1 + y_2) \cdot \frac{x}{6}.$$

Führt man eine mittlere Ordinate $y$ ein, und setzt $F = xy$, so erhält man daher für dieselbe:

$$y = \frac{y_0 + 4 y_1 + y_2}{6}.$$

Um nun hiernach den Inhalt einer Fläche $MABN$, Fig. 40, zu finden, welche über einer gegebenen Grundlinie $MN = x$ steht, und durch eine ungerade Anzahl von Ordinaten $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ bestimmt ist, durch diese also in eine gerade Anzahl von gleich breiten Streifen zerlegt wird, bedarf es nur einer wiederholten Anwendung der letzten Regel. Es ist die Breite eines Streifens $= \frac{x}{n}$ und hiernach die Fläche des ersten Streifenpaares:

Fig. 40.




$$= \frac{y_0 + 4 y_1 + y_2}{6} \cdot \frac{2x}{n},$$

des zweiten Streifenpaares:

$$= \frac{y_2 + 4 y_3 + y_4}{6} \cdot \frac{2x}{n},$$

des dritten Streifenpaares:

$$= \frac{y_4 + 4 y_5 + y_6}{6} \cdot \frac{2x}{n}, \text{ u. s. w.};$$

also der Inhalt der ersten sechs Streifen oder ersten drei Streifenpaare, da hier $n = 6$ beträgt:

$$F = (y_0 + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + 2 y_4 + 4 y_5 + y_6) \frac{x}{3.6}$$

$$= [y_0 + y_6 + 4 (y_1 + y_3 + y_5) + 2 (y_2 + y_4)] \frac{x}{18};$$

und es läßt sich nun leicht ermessen, daß der Inhalt einer in vier Streifenpaare zerlegten Fläche:

$$F = [y_0 + y_8 + 4 (y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2 (y_2 + y_4 + y_6)] \frac{x}{3.8},$$

und daß allgemein, der einer Fläche von $n$ Streifen:

$$F = [y_0 + y_n + 4 (y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2 (y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})] \frac{x}{3n}$$

gesetzt werden kann.

Auch ist die mittlere Höhe einer solchen Fläche

$$y = \frac{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})}{3n},$$

wobei $n$ stets eine gerade Zahl sein muß.

Diese unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannte Formel (s. „Ingenieur" S. 190) findet ihre Anwendung bei der Bestimmung eines Integrales $\int_c^{c_1} y \partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x) \partial x$, wenn man $x = c_1 - c$ in eine gerade Anzahl $n$ gleicher Theile theilt, die Ordinaten

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right) \ldots \text{ bis } y_n = \varphi(x)$$

berechnet und diese Werthe in die Formel:

$$\int_c^{c_1} y \partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x) \partial x$$

$$= [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})] \frac{c_1 - c}{3n}$$

einsetzt.

Z. B. $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ giebt, da hier $c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist, wenn man $n = 6$, also $\frac{x}{n} = \frac{c_1 - c}{6} = {}^1/_6$ annimmt:

$$y_0 = \frac{1}{1} = 1{,}0000, y_1 = \frac{1}{{}^7/_6} = {}^6/_7 = 0{,}8571, y_2 = \frac{1}{{}^8/_6} = {}^3/_4 = 0{,}7500,$$

$$y_3 = \frac{1}{{}^9/_6} = {}^6/_9 = 0{,}6666,\ y_4 = \frac{1}{{}^{10}/_6} = 0{,}6000,\ y_5 = \frac{6}{11} = 0{,}5454 \text{ und}$$

$y_6 = 0{,}5000$, daher:

$$y_0 + y_6 = 1{,}5000, y_1 + y_3 + y_5 = 2{,}0692 \text{ und } y_2 + y_4 = 1{,}3500,$$

und das gesuchte Integral:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = (1{,}5000 + 4 . 2{,}0692 + 2 . 1{,}3500) . {}^1/_{18} = \frac{12{,}4768}{18} = 0{,}69315.$$

Nach Artikel 22, III, ist:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = Log. nat. 2 - Log. nat. 1 = 0{,}693147,$$

also die Uebereinstimmung die erwünschte.

Art. 31. Im Folgenden soll noch eine andere Regel mitgetheilt werden, welche auch bei einer ungeraden Anzahl $n$ von Streifen angewendet werden kann. Behandelt man ein sehr gedrücktes Segment $AMB$, Fig. 41, als ein Parabelsegment, so hat man nach Art. 29 für den Inhalt desselben:

Fig. 41.




$$F = {}^2/_3\, AB \,.\, MD,$$

oder, wenn $AT$ und $BT$ Tangenten an den Enden $A$ und $B$ sind, und deshalb $CT = 2\,CM$ ist: $F = {}^2/_3 \,.\, \frac{AB\,.\,TE}{2} = {}^2/_3$ des Dreiecks $ATB = {}^2/_3$ des gleich hohen gleichschenkligen Dreiecks $ASB$, und also auch $= {}^2/_3\, AC \,.\, CS = {}^2/_3\, \overline{AC^2}\,.\, tang.\, SAC$. Der Winkel $SAC = SBC$ ist $= TAC + TAS = TBC - TBS$; setzt man daher die kleinen Winkel $TAS$ und $TBS$ einander gleich, so erhält man für dieselben:

$$TAS = TBS = \frac{TBC - TAC}{2} \text{ und}$$

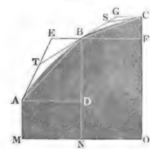
$$SAC = TAC + \frac{TBC - TAC}{2} = \frac{TAC + TBC}{2} = \frac{\delta + \varepsilon}{2},$$

wenn man die Tangentenwinkel $TAC$ und $TBC$ durch $\delta$ und $\varepsilon$ bezeichnet. Da nun noch $AC = BC = {}^1/_2\, AB = {}^1/_2$ Sehne $s$ ist, so hat man:

$$F = {}^1/_6\, s^2\, tang. \left(\frac{\delta + \varepsilon}{2}\right).$$

Diese Formel läßt sich nun auch auf das Flächenstück $MABN$, Fig. 42, anwenden, dessen Tangentenwinkel $TAD = \alpha$ und $TBE = \beta$ gegeben sind; setzt man nämlich noch den Sehnenwinkel $BAD = ABE = \sigma$, so hat man:

Fig. 42.




$$TAB = \delta = TAD - BAD$$
$$= \alpha - \sigma \text{ und}$$
$$TBE = \varepsilon = ABE - TBE$$
$$= \sigma - \beta,$$

daher:

$$\delta + \varepsilon = \alpha - \beta,$$

und das Segment über $AB$:

$$F = {}^1/_6\, s^2\, tang. \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

oder, wegen der Kleinheit von $\alpha - \beta$:

$$F = \frac{s^2}{12}\, tang.\,(\alpha - \beta) = \frac{s^2}{12} \left(\frac{tang.\,\alpha - tang.\,\beta}{1 + tang.\,\alpha\; tang.\,\beta}\right),$$

oder, da $\alpha$ und $\beta$ nicht bedeutend von einander abweichen und deshalb in $tang. \alpha \, tang. \beta$ statt $\alpha$ und $\beta$ der Mittelwerth $\sigma$ eingesetzt werden kann:

$$F = {}^1/_{12}\, s^2 \,.\, \frac{tang.\,\alpha - tang.\,\beta}{1 + tang.\,\sigma^2} = {}^1/_{12}\, s^2 \cos.\,\sigma^2 (tang.\,\alpha - tang.\,\beta),$$

und also statt $s \cos.\,\sigma$ die Grundlinie $MN = x$ substituirt:

$$F = \frac{x^2}{12} (tang.\,\alpha - tang.\,\beta),$$

und daher das ganze Flächenstück $MABN$, wenn $y_0$ und $y_1$ dessen Ordinaten $MA$ und $NB$ bezeichnen:

$$F_1 = (y_0 + y_1) \frac{x}{2} + (tang.\,\alpha - tang.\,\beta) \frac{x^2}{12}.$$

Stößt an das vorige Flächenstück noch ein anderes $NBCO$ mit einer gleichen Grundlinie $NO = x$, den Ordinaten $BN$ und $CO = y_1$ und $y_2$ und den Tangentenwinkeln $SBF = \beta$ und $SCG = \gamma$, so hat man für dasselbe den Inhalt:

$$F_2 = (y_1 + y_2) \frac{x}{2} + (tang.\,\beta - tang.\,\gamma) \frac{x^2}{12},$$

und daher für das Ganze, da sich hier $-\, tang.\,\beta$ gegen $+\, tang.\,\beta$ hebt:

$$F = F_1 + F_2 = ({}^1/_2\, y_0 + y_1 + {}^1/_2\, y_2)\, x + (tang.\,\alpha - tang.\,\gamma) \frac{x^2}{12}.$$

Für eine Fläche aus drei gleichbreiten Streifen ist ebenso, wenn $\alpha$ den Tangentenwinkel des Anfangs- und $\delta$ den des Endpunktes bezeichnet:

$$F = ({}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + {}^1/_2\, y_3)\, x + (tang.\,\alpha - tang.\,\delta) \frac{x^2}{12},$$

und allgemein für ein durch die Abscissen $\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \frac{3x}{n} \ldots x$, die Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ und die Tangentenwinkel $\alpha_0$ und $\alpha_n$ der Endpunkte bestimmtes Flächenstück:

$$F = ({}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + {}^1/_2\, y_n) \frac{x}{n}$$
$$+ {}^1/_{12} (tang.\,\alpha - tang.\,\alpha_n) \left(\frac{x}{n}\right)^2.$$

Ein Integral:

$$\int_c^{c_1} y \,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x) \,\partial x$$
$$= ({}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + {}^1/_2\, y_n) \frac{x}{n}$$
$$+ {}^1/_{12} (tang.\,\alpha - tang.\,\alpha_n) \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

wird hiernach gefunden, wenn man $x = c_1 - c$ setzt:

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\ \ y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$
$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right) \ldots,\ y_n = \varphi\left(c + \frac{nx}{n}\right) = \varphi(c_1),$$

sowie $tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \psi(x) = \psi(c)$ und $tang.\,\alpha_n = \psi(c_1)$ berechnet, und diese Werthe in diese Gleichung einführt.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ hat man, wenn $n = 6$ angenommen wird, da hier $x = c_1 - c = 2 - 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist:

$$y_0 = \frac{1}{c} = 1,\ y_1 = \frac{1}{1 + {}^1\!/_6} = {}^6\!/_7,\ y_2 = {}^6\!/_8,\ y_3 = {}^6\!/_9,$$
$$y_4 = {}^6\!/_{10},\ y_5 = {}^6\!/_{11} \text{ und } y_6 = {}^6\!/_{12};$$

ferner, da sich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(x^{-1})}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ herausstellt:

$$tang.\,\alpha = -{}^1\!/_1 = -1 \text{ und } tang.\,\beta = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -{}^1\!/_4,$$

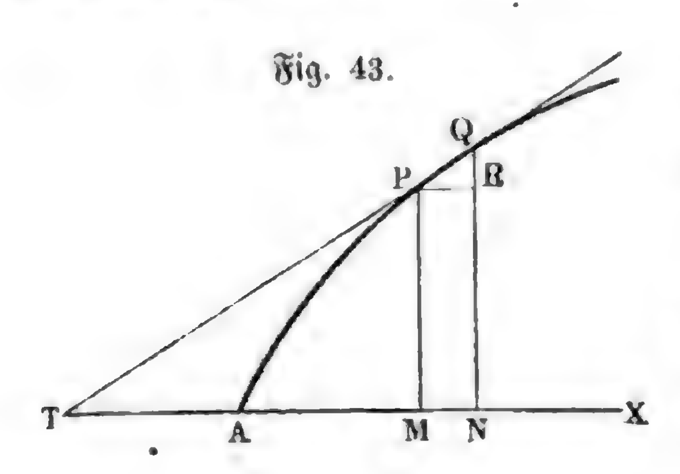
und daher ist:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = ({}^1\!/_2 + {}^6\!/_7 + {}^6\!/_8 + {}^6\!/_9 + {}^6\!/_{10} + {}^6\!/_{11} + {}^1\!/_4) . {}^1\!/_6 + (-1 + {}^1\!/_4) . {}^1\!/_{12} . {}^1\!/_{36}$$
$$= \frac{4{,}1692}{6} - {}^3\!/_4 . {}^1\!/_{12} . {}^1\!/_{36} = 0{,}69487 - 0{,}00173 = 0{,}69314.$$

(Vergleiche das Beispiel des vorigen Artikels.)

Art. 32. Um eine Curve zu rectificiren, oder aus ihrer Gleichung $y = f(x)$ zwischen den Coordinaten $AM = x$ und $MP = y$, Fig. 43, eine Gleichung zwischen dem Bogen $AP = s$ und der einen oder der anderen der beiden Coordinaten abzuleiten, bestimmt man zunächst das Differenzial des Curvenbogens $AP$, und sucht dann hierzu das Integral. Läßt man $x$ um $MN = PR = \partial x$ wachsen, so nimmt $y$ um $RQ = \partial y$ und $s$ um das Element $PQ = \partial s$ zu, und es ist, dem Pythagoräischen Lehrsatze zufolge:

Fig. 43.




$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2,$$

d. i.:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2,$$

also:

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2},$$

und hiernach der Curvenbogen selbst:

$$s = \int \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

z. B. für die Neil'sche Parabel (siehe Art. 9 und Fig. 17), deren Gleichung $a y^2 = x^3$ ist, hat man: $2 a y \partial y = 3 x^2 \partial x$, daher:

$$\partial y = \frac{3 x^2 \partial x}{2 a y} \text{ und } \partial y^2 = \frac{9 x^4 \partial x^2}{4 a^2 y^2} = \frac{9 x \partial x^2}{4 a},$$

hiernach:

$$\partial s^2 = \left(1 + \frac{9 x}{4 a}\right) \partial x^2, \text{ und}$$

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{9 x}{4 a}} \partial x = \frac{4 a}{9} \int \left(1 + \frac{9 x}{4 a}\right)^{1/2} \partial \left(\frac{9 x}{4 a}\right)$$

$$= \frac{4 a}{9} \int u^{1/2} \partial u = \frac{4 a}{9} \, {}^2/_3 \, u^{3/2} = {}^8/_{27} \, a \sqrt{\left(1 + \frac{9 x}{4 a}\right)^3}.$$

Um die hierzu nöthige Constante zu finden, wollen wir $s$ mit $x$ und $y$ zugleich anfangen lassen. Wir erhalten dann:

$$0 = {}^8/_{27} \, a \sqrt{1^3} + Con., \text{ also } Con. = - {}^8/_{27} \, a \text{ und}$$

$$s = {}^8/_{27} \, a \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9 x}{4 a}\right)^3} - 1\right],$$

z. B. für das Stück $A P_1$, dessen Abscisse $x = a$ ist:

$$s = {}^8/_{27} \, a \left[\sqrt{({}^{13}/_4)^3} - 1\right] = 1{,}736 \, a.$$

Führt man noch den Tangentenwinkel $Q P R = P T M = \alpha$ (Fig. 43) ein, so hat man auch:

$$Q R = P Q \,.\, sin.\, Q P R \text{ und } P R = P Q \cos.\, Q P R, \text{ d. i.}$$

$$\partial y = \partial s \sin.\, \alpha \text{ und } \partial x = \partial s \cos.\, \alpha,$$

und also außer $tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ (s. Art. 6) auch

$$sin.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial s} \text{ und } cos.\, \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}; \text{ sowie noch}$$

$$s = \int \sqrt{1 + tang.\, \alpha^2} \,.\, \partial x = \int \frac{\partial y}{sin.\, \alpha} = \int \frac{\partial x}{cos.\, \alpha}.$$

Ist nun die Gleichung zwischen zwei der Größen $x$, $y$, $s$ und $\alpha$ gegeben, so kann man hiernach auch Gleichungen zwischen je zwei anderen dieser Größen finden. Ist z. B. $cos.\, \alpha = \frac{s}{\sqrt{c^2 + s^2}}$, so hat man:

$$\partial x = \partial s \cos.\, \alpha = \frac{s \partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}} \text{ und}$$

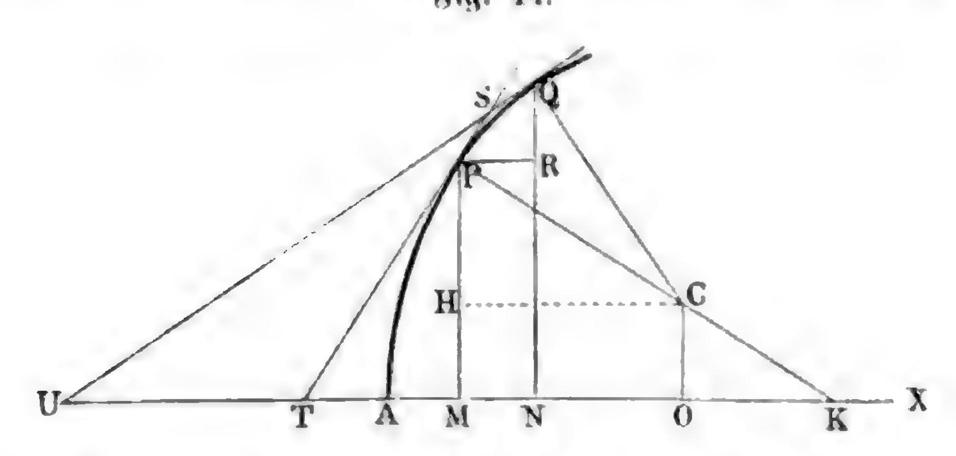
$$x = \int \frac{s \partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}} = {}^1/_2 \int \frac{2 s \partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}} = {}^1/_2 \int \frac{\partial u}{\sqrt{u}} = {}^1/_2 \int u^{-1/2} \partial u = u^{1/2} \partial u$$

$= \sqrt{c^2 + s^2} + Con.$, und wenn nun $x$ und $s$ zugleich Null sind:

$$x = \sqrt{c^2 + s^2} - c.$$

Art. 33. Eine Gerade winkelrecht zur Tangente $PT$, Fig. 44, ist auch

Fig. 44.




normal zur Berührungsstelle $P$ der Curve, weil die Tangente die Richtung dieser Stelle angiebt. Das Stück $PK$ dieser Linie vom Berührungspunkte $P$ bis zur Abscissenaxe, heißt Normale schlechtweg, und die Projection $MK$ desselben in der Abscissenaxe Subnormale. Für die letztere hat man, da der Winkel $MPK$ dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$ gleich ist:

$$MK = MP \,.\, tang.\, \alpha, \text{ d. i.:}$$

$$\text{die } Subnormale = y\, tang.\, \alpha = y \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Da für das Curvensystem $y = x^m$, $tang.\, \alpha = m\, x^{m-1}$ ist, so folgt hier die $Subnormale = m\, x^m \,.\, x^{m-1} = m\, x^{2m-1} = \frac{m\, y^2}{x}$, und für die gemeine Parabel, deren Gleichung $y^2 = p\,x$ ist, hat man

$$\text{die } Subnormale = y\, \frac{p}{2\,y} = \frac{p}{2};$$

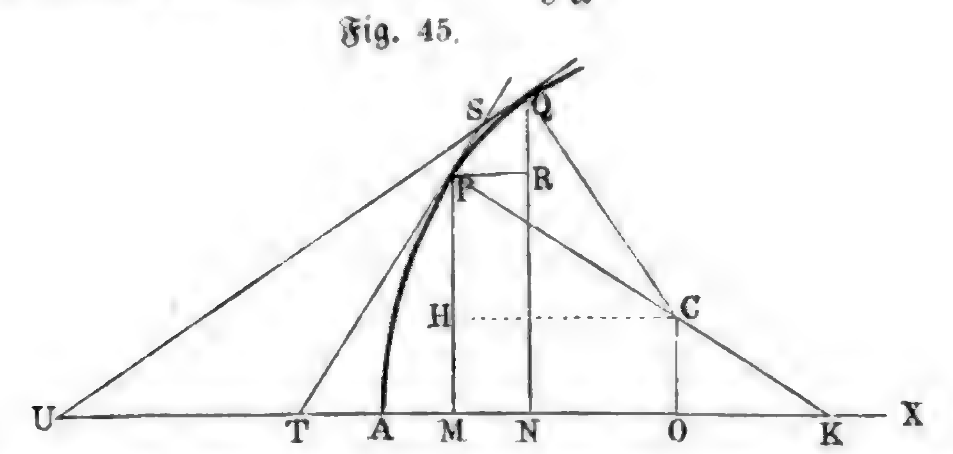
also constant.

Errichtet man ferner in einem zweiten, der Stelle $P$ unendlich nahen Punkte $Q$ eine andere Normallinie $QC$, so erhält man in dem Durchschnittspunkte zwischen beiden Linien das Centrum $C$ für einen durch beide Berührungspunkte $P$ und $Q$ zu beschreibenden Kreis, den sogenannten Krümmungskreis, und es sind die Stücke $CP$ und $CQ$ der Normallinien die Halbmesser dieses Kreises oder die sogenannten Krümmungshalbmesser. Jedenfalls ist dieser Kreis derjenige unter allen durch $P$ und $Q$ zu legenden Kreisen, welcher sich am meisten an das Curvenelement $PQ$ anschmiegt, und deshalb anzunehmen, daß sein Bogen $PQ$ mit dem Curvenelemente $PQ$ zusammenfalle.

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser $CP = CQ$ durch $r$, den Curvenbogen $AP$ durch $s$, also sein Element $PQ$ durch $\partial s$, und den Tangentenwinkel oder Bogen von $PTM$ durch $\alpha$, also sein Element $SUM - STM$, d. i. $- UST = - PCQ$, durch $\partial \alpha$, so haben wir einfach,

da $PQ = CP$. Bogen des Winkels $PCQ$ ist, $\partial s = - r \partial \alpha$, und folglich den Krümmungshalbmesser: $r = - \frac{\partial s}{\partial \alpha}$.

Fig. 45.




Gewöhnlich läßt sich $\alpha$ nur mittels der Coordinatengleichung bestimmen, indem man setzt: $tang. \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Nun ist aber noch: $\partial\, tang. \alpha = \frac{\partial \alpha}{cos. \alpha^2}$ und $cos. \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}$,

daher hat man: $\partial \alpha = cos. \alpha^2 . \partial\, tang. \alpha = \frac{\partial x^2}{\partial s^2} . \partial\, tang. \alpha$, und

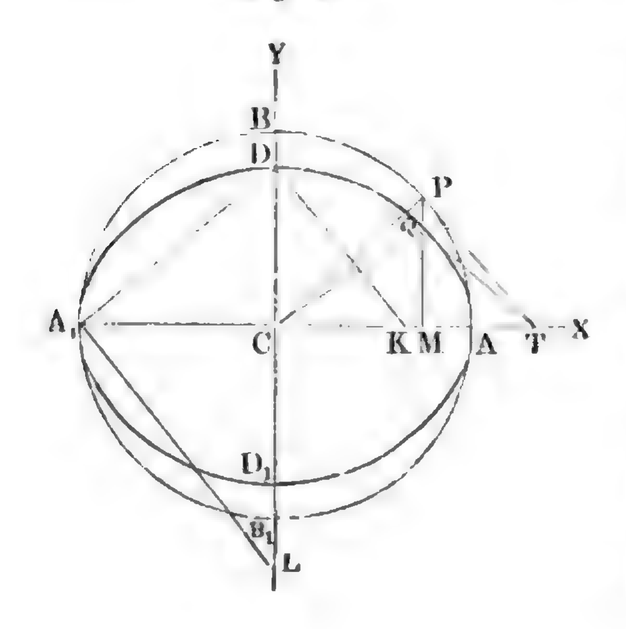
$$r = - \frac{\partial s}{cos. \alpha^2 \partial\, tang. \alpha} = - \frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial\, tang. \alpha}.$$

Für eine convexe Curve ist $r = + \frac{\partial s}{\partial \alpha} = + \frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial\, tang. \alpha}$, und für einen Wendepunkt, $r = \infty$.

Für die Coordinaten $AO = u$ und $OC = v$ des Krümmungsmittelpunktes $C$ ist

$u = AM + HC = x + CP\, sin.\, CPH$, d. i. $u = x + r\, sin. \alpha$, sowie
$v = OC = MP - HP = y - CP\, cos.\, CPH$, d. i. $v = y - r\, cos. \alpha$.

Fig. 46.




Die stetige Folge der Krümmungsmittelpunkte giebt eine Curve, welche die Evolute von $AP$ genannt, und deren Lauf durch die Coordinaten $u$ und $v$ bestimmt wird.

Wenn man die Ellipse $ADA_1D_1$, Figur 46, mit einem Kreise $ABA_1B_1$ in Verbindung bringt, so kann man die Coordinaten $CM = x$ und $MQ = y$ derselben durch den Centriwinkel $PCB = \varphi$ des Kreises ausdrücken. Es ist nämlich:

$$x = CP\,sin.\,CPM = CP\,sin.\,BCP = a\,sin.\,\varphi \text{ und}$$

$$y = MQ = \frac{b}{a}\,MP = \frac{b}{a}\,CP\,cos.\,CPM = b\,cos.\,\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\partial x = a\,cos.\,\varphi\,\partial\varphi \text{ und } \partial y = -\,b\,sin.\,\varphi\,\partial\varphi,$$

folglich für den Tangentenwinkel $QTX = \alpha$ der Ellipse:

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = -\,\frac{b\,sin.\,\varphi}{a\,cos.\,\varphi} = -\,\frac{b}{a}\,tang.\,\varphi,$$

also für dessen Nebenwinkel $QTC = \alpha_1 = 180^0 - \alpha$:

$$tang.\,\alpha_1 = \frac{b}{a}\,tang.\,\varphi \text{ und } cotg.\,\alpha_1 = \frac{a}{b}\,cotg.\,\varphi.$$

Hiernach ist die Subtangente der Ellipse:

$$MT = MQ\,cotg.\,MTQ$$

$$= y\,cotg.\,\alpha_1 = \frac{a\,y}{b}\,cotg.\,\varphi = y_1\,cotg.\,\varphi,$$

wenn $y_1$ die Ordinate $MP$ des Kreises bezeichnet. Da bei dem letzteren die Tangente $PT$ rechtwinkelig auf dem Halbmesser $CP$ steht, so ist auch $PTM = PCB = \varphi$, und daher die Subtangente desselben ebenfalls $MT = MP\,cotg.\,MTP = y_1\,cotg.\,\varphi$. Es haben also die beiden Punkte $P$ und $Q$ des Kreises und der Ellipse, welche einerlei Abscisse angehören, eine und dieselbe Subtangente $MT$.

Ferner ist für das elliptische Bogenelement:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = (a^2\,cos.\,\varphi^2 + b^2\,sin.\,\varphi^2)\,\partial\varphi^2,$$

und das Differenzial von $tang.\,\alpha$, d. i.:

$$\partial\,tang.\,\alpha = -\,\frac{b}{a}\,\partial\,tang.\,\varphi = -\,\frac{b}{a}\,\frac{\partial\varphi}{cos.\,\varphi^2},$$

daher folgt der Krümmungshalbmesser der Ellipse:

$$r = -\,\frac{\partial s^3}{\partial x^2\,\partial\,tang.\,\alpha} = \frac{(a^2\,cos.\,\varphi^2 + b^2\,sin.\,\varphi^2)^{3/2}}{a^2\,cos.\,\varphi^2\,.\,\frac{b}{a\,cos.\,\varphi^2}}$$

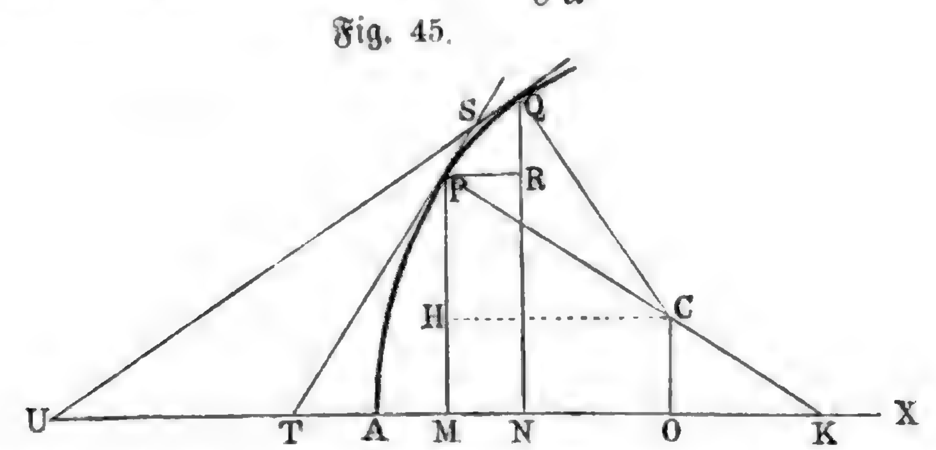
$$= \frac{(a^2\,cos.\,\varphi^2 + b^2\,sin.\,\varphi^2)^{3/2}}{a\,b}.$$

Z. B. für $\varphi = 0$, also $sin.\,\varphi = 0$ und $cos.\,\varphi = 1$, folgt der größte Krümmungshalbmesser:

$$r_m = \frac{a^3}{a\,b} = \frac{a^2}{b},$$

da $PQ = CP$. Bogen des Winkels $PCQ$ ist, $\partial s = - r\,\partial\alpha$, und folglich den Krümmungshalbmesser: $r = -\dfrac{\partial s}{\partial \alpha}$.

Fig. 45.




Gewöhnlich läßt sich $\alpha$ nur mittels der Coordinatengleichung bestimmen, indem man setzt: $tang.\,\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

Nun ist aber noch: $\partial\, tang.\,\alpha = \dfrac{\partial \alpha}{cos.\,\alpha^2}$ und $cos.\,\alpha = \dfrac{\partial x}{\partial s}$,

daher hat man: $\partial \alpha = cos.\,\alpha^2 \,.\, \partial\, tang.\,\alpha = \dfrac{\partial x^2}{\partial s^2} \,.\, \partial\, tang.\,\alpha$, und

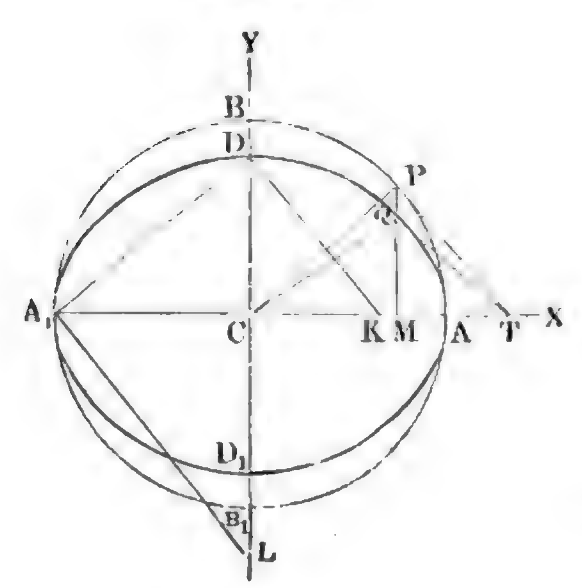
$$r = -\frac{\partial s}{cos.\,\alpha^2\, \partial\, tang.\,\alpha} = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\, \partial\, tang.\,\alpha}.$$

Für eine convexe Curve ist $r = +\dfrac{\partial s}{\partial \alpha} = +\dfrac{\partial s^3}{\partial x^2\, \partial\, tang.\,\alpha}$, und für einen Wendepunkt, $r = \infty$.

Für die Coordinaten $AO = u$ und $OC = v$ des Krümmungsmittelpunktes $C$ ist

$u = AM + HC = x + CP\, sin.\, CPH$, d. i. $u = x + r\, sin.\,\alpha$, sowie
$v = OC = MP - HP = y - CP\, cos.\, CPH$, d. i. $v = y - r\, cos.\,\alpha$.


Fig. 46.




Die stetige Folge der Krümmungsmittelpunkte giebt eine Curve, welche die **Evolute** von $AP$ genannt, und deren Lauf durch die Coordinaten $u$ und $v$ bestimmt wird.

Wenn man die Ellipse $ADA_1D_1$, Figur 46, mit einem Kreise $ABA_1B_1$ in Verbindung bringt, so kann man die Coordinaten $CM = x$ und $MQ = y$ derselben durch den Centriwinkel $PCB = \varphi$ des Kreises ausdrücken. Es ist nämlich:

$x = CP \sin. CPM = CP \sin. BCP = a \sin. \varphi$ und

$$y = MQ = \frac{b}{a} MP = \frac{b}{a} CP \cos. CPM = b \cos. \varphi.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\partial x = a \cos. \varphi \, \partial \varphi \text{ und } \partial y = - b \sin. \varphi \, \partial \varphi,$$

folglich für den Tangentenwinkel $QTX = \alpha$ der Ellipse:

$$tang. \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{b \sin. \varphi}{a \cos. \varphi} = - \frac{b}{a} tang. \varphi,$$

also für dessen Nebenwinkel $QTC = \alpha_1 = 180^0 - \alpha$:

$$tang. \alpha_1 = \frac{b}{a} tang. \varphi \text{ und } cotg. \alpha_1 = \frac{a}{b} cotg. \varphi.$$

Hiernach ist die Subtangente der Ellipse:

$$MT = MQ \, cotg. MTQ$$
$$= y \, cotg. \alpha_1 = \frac{a\,y}{b} cotg. \varphi = y_1 \, cotg. \varphi,$$

wenn $y_1$ die Ordinate $MP$ des Kreises bezeichnet. Da bei dem letzteren die Tangente $PT$ rechtwinkelig auf dem Halbmesser $CP$ steht, so ist auch $PTM = PCB = \varphi$, und daher die Subtangente desselben ebenfalls $MT = MP \, cotg. MTP = y_1 \, cotg. \varphi$. Es haben also die beiden Punkte $P$ und $Q$ des Kreises und der Ellipse, welche einerlei Abscisse angehören, eine und dieselbe Subtangente $MT$.

Ferner ist für das elliptische Bogenelement:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = (a^2 \cos. \varphi^2 + b^2 \sin. \varphi^2) \, \partial \varphi^2,$$

und das Differenzial von $tang. \alpha$, d. i.:

$$\partial \, tang. \alpha = - \frac{b}{a} \partial \, tang. \varphi = - \frac{b}{a} \frac{\partial \varphi}{\cos. \varphi^2},$$

daher folgt der Krümmungshalbmesser der Ellipse:

$$r = - \frac{\partial s^3}{\partial x^2 \, \partial \, tang. \alpha} = \frac{(a^2 \cos. \varphi^2 + b^2 \sin. \varphi^2)^{3/2}}{a^2 \cos. \varphi^2 \, . \, \frac{b}{a \cos. \varphi^2}}$$
$$= \frac{(a^2 \cos. \varphi^2 + b^2 \sin. \varphi^2)^{3/2}}{a\,b}.$$

Z. B. für $\varphi = 0$, also $\sin. \varphi = 0$ und $\cos. \varphi = 1$, folgt der größte Krümmungshalbmesser:

$$r_m = \frac{a^3}{a\,b} = \frac{a^2}{b},$$

und dagegen für $\varphi = 90^0$, also $sin.\,\varphi = 1$ und $cos.\,\varphi = 0$, ergiebt sich der kleinste Krümmungshalbmesser:

$$r_n = \frac{b^3}{a\,b} = \frac{b^2}{a}.$$

Der erstere Werth von $r$ entspricht der Stelle $D$, und der letztere dem Punkte $A$; beide sind durch die Axenstücke $CL$ und $CK$ bestimmt, welche die in den Endpunkten $A_1$ und $D$ auf der Sehne $A_1\,D$ errichteten Perpendikel von $C$ aus abschneiden.

Art. 34. Viele Functionen, welche in der Anwendung auf die Praxis vorkommen, lassen sich aus den oben kennen gelernten Hauptfunctionen:

$$y = x^m,\ y = e^x \text{ und } y = sin.\,x,\ y = cos.\,x \text{ u. s. w.}$$

zusammensetzen, und es sind daher auch ihre Eigenschaften, betreffend die Tangentenlage, Quadratur, Krümmungshalbmesser u. s. w. leicht mit Hülfe der vorstehenden Lehren aufzusuchen, sowie auch die ihnen entsprechenden Curven zu construiren, wie folgendes Beispiel zeigen wird.

Für die Curve, welche der Gleichung:

$$y = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) = x^2 - \tfrac{1}{3}\,x^3 \text{ entspricht, ist}$$

$$\partial y = 2\,x\,\partial x - x^2\,\partial x, \text{ folglich}$$

$$tang.\,\alpha = 2\,x - x^2 = x\,(2 - x).$$

Da diese Tangente für $x = 0$ und $x = 2$, Null ausfällt, so hat sie in den Punkten, welche diesen Abscissenwerthen zukommen, die Richtung der Abscissenaxe. Ferner ist:

$$\partial\, tang.\,\alpha = 2\,\partial x - 2\,x\,\partial x = 2\,(1 - x)\,\partial x, \text{ wonach also}$$

für $x = 0,\ \partial\, tang.\,\alpha = +\,2\,\partial x$, und

für $x = 2,\ \partial\, tang.\,\alpha = -\,\partial x$

ausfällt, und daher die Ordinate des ersten Punktes ein **Minimum**, dagegen die des zweiten Punktes ein **Maximum** ist. Setzt man $\partial\, tang.\,\alpha = 0$, so ergeben sich dadurch die Coordinaten $x = 1$ und $y = \tfrac{2}{3}$ des **Wendepunktes**, in welchem sich das concave Curvenstück an das convexe anschließt.

Ferner ist für das Curvenelement $\partial s$:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 + x^2\,(2 - x)^2\,\partial x^2 = [1 + x^2\,(2 - x)^2]\,\partial x^2,$$

und daher der Krümmungshalbmesser der Curve:

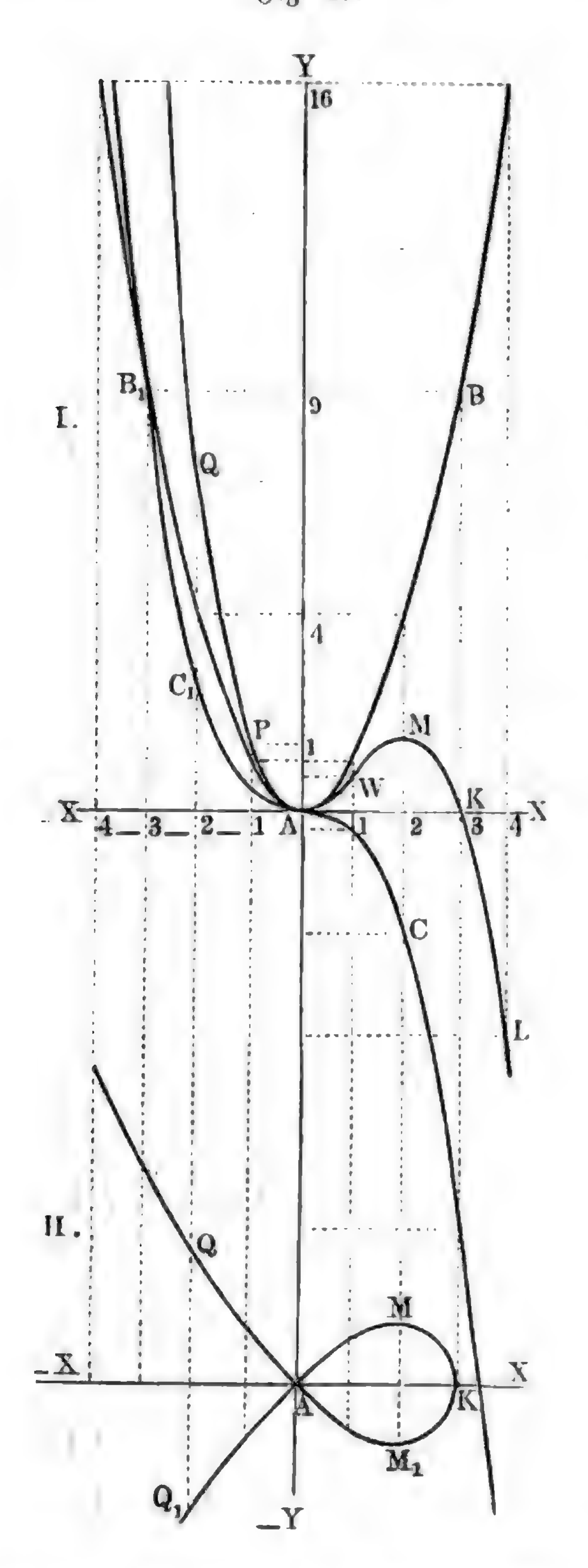
$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\,\partial\, tang.\,\alpha} = -\frac{[1 + x^2\,(2 - x)^2]^{3/2}}{2\,(1 - x)},$$

z. B. für $x = 0,\ r = \frac{-1}{2} = -\tfrac{1}{2}$, für $x = 1,\ r = -\frac{2^{3/2}}{0} = \infty$,

für $x = 2,\ r = \frac{-1}{-2} = +\tfrac{1}{2}$, für $x = 3,\ r = \tfrac{1}{4}\,.\,10^{3/2} = +\,7{,}906$.

Die entsprechende Curve ist in Fig. 47 vor Augen geführt, worin $A$ den Ursprung der Coordinaten, und $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ die Coordinatenaxen darstellen. Dem ersten Theil $y_1 = x^2$ der Gleichung entspricht die Parabel $BAB_1$, welche sich von $A$ aus zu beiden Seiten der Axe $AY$ symmetrisch hinzieht, dem zweiten Theil $y_2 = -{}^1/_3\,x^3$ gehört dagegen die Curve $CAC_1$ an, welche sich auf der rechten Seite von $Y\overline{Y}$ unter, und auf der linken Seite von $Y\overline{Y}$ über der Absciſſenaxe $X\overline{X}$ hinzieht, und sich dabei immer mehr und mehr von $X\overline{X}$ entfernt, je weiter sie von $Y\overline{Y}$ abrückt. Um für eine gegebene Absciſſenaxe $x$ den entsprechenden Punkt der Curve $y = x^2 - {}^1/_3\,x^3$ zu bestimmen, kommt es nur darauf an, die dieser Absciſſe zugehörigen Ordinaten der ersten Curven algebraisch zu addiren. Da z. B. für $x = 1$, $y_1 = 1$ und $y_2 = -{}^1/_3$ ist, folgt die entsprechende Ordinate des Punktes $W$, $y = y_1 + y_2 = 1 - {}^1/_3 = {}^2/_3$, ferner, da für $x = 2$, $y_1 = 4$ und $y_2 = -{}^8/_3$ ist, so folgt die Coordinate des Punktes

Fig. 47.




$M$, $y = 4 - {}^8/_3 = {}^4/_3$, ebenso ergiebt sich für $x = 3$, $y = y_1 + y_2 = 9 - 9 = 0$, für $x = 4$, $y = 16 - {}^{64}/_3 = -{}^{16}/_3$, für $x = -1$, $y = 1 + {}^1/_3 = {}^4/_3$, für $x = -2$, $y = 4 + {}^8/_3 = {}^{20}/_3$ u. s. w., und man

ersieht, daß die letzte Curve von $A$ aus rechts den Lauf $AWMKL\ldots$ hat, wobei sie anfangs über der Abscisse $AK = 3$ hinläuft, sich aber von da aus weiter bis ins Unendliche unter $X\overline{X}$ hinabzieht, und daß sie von $A$ aus links nur einen ins Unendliche aufsteigenden Zweig $APQ\ldots$ bildet. Auch ist nach dem Obigen, $W$ ein Wende-, sowie $M$ ein Maximalpunkt der Curve. Während die Curve in $A$ und $M$ die Richtung von $X\overline{X}$ hat, steigt sie in $W$ unter dem Winkel $\alpha = 45$ Grad auf, weil für denselben $tang.\,\alpha = x(2-x) = 1$ ist, dagegen ist für den Neigungswinkel in $K$, $tang.\,\alpha = -3$, folglich $\alpha = 71^0\,34'$ u. s. w.

Die Quadratur der Curve ist durch das Integral

$$F = \int y\,\partial x = \int (x^2 - {}^1/_3\, x^3)\,\partial x = \int x^2\,\partial x - {}^1/_3 \int x^3\,\partial x$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} = \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{x}{4}\right) \text{ vollzogen.}$$

Hiernach folgt z. B. für das Flächenstück $AWMK$ über $AK = 3$, der Inhalt $F = \frac{3^3}{3}(1 - {}^3/_4) = {}^9/_4$, und dagegen der Inhalt des Flächenstückes $\overline{3L4}$, über dem Abscissenstücke $\overline{34}$, $F_1 = \frac{4^3}{3}(1 - {}^4/_4) - \frac{3^3}{3}(1 - {}^3/_4) = 0 - {}^9/_4 = -\,{}^9/_4$.

Um endlich noch die Länge eines Curvenstückes, z. B. von $AWM$, zu finden, setzen wir

$$s = \int \sqrt{1 + x^2(2-x)^2}\,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,\partial x,$$

und bringen die im Artikel 30 abgehandelte Integrationsmethode zur Anwendung. Es ist hier $c = 0$, und $c_1 = 2$; nimmt man $n = 4$ an, so folgt $\partial x = \frac{c_1 - c}{n} = \frac{2-0}{4} = {}^1/_2$, und setzt man nun für $x$ nach und nach die Werthe 0, $^1/_2$, 1, $^3/_2$ und 2 in die Function

$\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2(2-x)^2}$ ein, so erhält man die Werthe:

$\varphi(0) = \sqrt{1} = 1$, $\varphi({}^1/_2) = \sqrt{1 + {}^9/_{16}} = {}^5/_4$,

$\varphi(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$

$\varphi({}^3/_2) = \sqrt{1 + {}^9/_{16}} = {}^5/_4$ und $\varphi(2) = \sqrt{1} = 1$,

und daher die Länge des Bogens $AWM$:

$$s = \Big(\varphi(0) + 4\,\varphi({}^1/_2) + 2\,\varphi(1) + 4\,\varphi({}^3/_2) + \varphi(2)\Big)\frac{c_1 - c}{3\,.\,4}$$

$$= (1 + 5 + 2{,}828 + 5 + 1)\,.\,{}^1/_6 = 2{,}471.$$

Mittels der Curve $y = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ läßt sich nun auch leicht der Lauf der Curve $y = x\sqrt{1 - \frac{x}{3}}$ angeben, denn wenn man aus den Coordinatenwerthen der ersteren die Quadratwurzeln auszieht, ergeben sich die entsprechenden Coordinaten der letzteren. Da die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen imaginär sind, so erstreckt sich diese Curve nicht über den Punkt $K$ hinaus, und da jede Quadratwurzel aus positiver Zahl zwei gleich große entgegengesetzte Werthe hat, so läuft die neue Curve (II.) in zwei symmetrischen Zweigen $QAMK$ und $Q_1AM_1K$ zu beiden Seiten der Abscissenaxe $X\overline{X}$ hin.

Art. 35. Wenn der Quotient $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ aus zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für einen gewissen Werth $a$ von $x$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ annimmt, welches stets eintritt, wenn, wie z. B. in $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, Zähler und Nenner eines Bruches einen Factor $x - a$ gemeinschaftlich haben, so kann man den wirklichen Werth derselben finden, wenn man Zähler und Nenner jeden für sich differenziirt.

Wächst $x$ um das Element $\partial x$ und entsprechend $y$ um das Element $\partial y$, so erhält man:

$$y + \partial y = \frac{\varphi(x) + \partial\varphi(x)}{\psi(x) + \partial\psi(x)}.$$

Nun ist aber für $x = a$:

$$\varphi(x) = 0 \text{ und } \psi(x) = 0,$$

daher hat man für diesen Fall:

$$y + \partial y = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\psi(x)},$$

oder, da $\partial y$ als unendlich kleine Größe gegen $y$ verschwindet:

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\psi(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},$$

wo $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ die Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnen.

Stellt sich $y = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$ wieder $= \frac{0}{0}$ heraus, so kann man von Neuem differenziiren, und

$$y = \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial\psi_1(x)} = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} \text{ setzen u. s. w.}$$

Auf gleiche Weise sind auch die unbestimmten Ausdrücke $y = \frac{\infty}{\infty}$ und

$0 \, . \, \infty$ u. s. w. zu behandeln, da $\infty = \frac{1}{0}$, folglich $\frac{\infty}{\infty}$ und $0 \, . \, \infty = \frac{0}{0}$ gesetzt werden können. Z. B.:

Für $y = \frac{3x^3 - 7x^2 - 8x + 20}{5x^3 - 21x^2 + 24x - 4}$ giebt für $x = 2$, $\frac{0}{0}$; es ist daher auch erlaubt,

$$y = \frac{\partial(3x^3 - 7x^2 - 8x + 20)}{\partial(5x^3 - 21x^2 + 24x - 4)} = \frac{9x^2 - 14x - 8}{15x^2 - 42x + 24}$$

zu setzen.

Nun fällt aber für $x = 2$, $y$ wieder $= \frac{0}{0}$ aus, daher setzt man von Neuem:

$$y = \frac{\partial(\ 9x^2 - 14x - 8)}{\partial(15x^2 - 42x + 24)} = \frac{18x - 14}{30x - 42} = \frac{9x - 7}{15x - 21} = \frac{11}{9}.$$

Es ist aber auch wirklich der Factor $x - 2$ zwei Mal in dem Zähler und Nenner der gegebenen Function enthalten. Dividirt man beide durch $x - 2$, so erhält man:

$$y = \frac{3x^2 - x - 10}{5x^2 - 11x + 2},$$

und wiederholt man diese Division im letzten Werthe, so stellt sich

$$y = \frac{3x + 5}{5x - 1},$$

also $x = 2$ gesetzt: $y = \frac{11}{9}$ heraus.

Ferner: $y = \frac{a - \sqrt{a^2 - x}}{x}$ giebt für $x = 0$, $\frac{0}{0}$.

Nun ist aber:

$$\partial\left(a - \sqrt{a^2 - x}\right) = -\partial(a^2 - x)^{1/2} = \frac{1/_2\, \partial x}{\sqrt{a^2 - x}},$$

daher folgt für diesen Fall: $y = \frac{1/_2}{\sqrt{a^2 - x}} = \frac{1}{2a}$.

Ferner in $y = \frac{Ln\, x}{\sqrt{1 - x}}$, $x = 1$ gesetzt, folgt $y = \frac{0}{0}$; nun ist aber:

$$\partial\, Ln.\, x, = \frac{\partial x}{x} \quad \text{und} \quad \partial \sqrt{1 - x} = -\frac{\partial x}{2\sqrt{1 - x}},$$

daher folgt $y = -\frac{2\sqrt{1 - x}}{x} = \frac{2 \, . \, 0}{1} = 0$.

Endlich:

$$y = \frac{1 - sin.\, x + cos.\, x}{-1 + sin.\, x + cos.\, x} \text{ giebt für } x = \frac{\pi}{2}\ (90^0),$$

$$y = \frac{1 - 1 + 0}{-1 + 1 + 0} = \frac{0}{0};$$

daher ist auch

$$y = \frac{\partial(1 - sin.\, x + cos.\, x)}{\partial(-1 + sin.\, x + cos.\, x)} = \frac{-cos.\, x - sin.\, x}{cos.\, x - sin.\, x}$$

$$= \frac{-0 - 1}{0 - 1} = 1$$

zu setzen.

Art. 36. Wenn für eine Function $y = \alpha u + \beta v$ eine Reihe von zusammengehörigen Werthen der Variablen $u$, $v$ und $y$ durch Beobachtung oder Messung gefunden worden ist, so kann man nach denjenigen Werthen der Constanten $\alpha$ und $\beta$ fragen, welche von den kleinen zufälligen und ungesetzmäßigen Beobachtungs- oder Messungsfehlern möglichst befreit sind und daher auch den Zusammenhang zwischen den Größen $u$, $v$ und $y$, wovon $u$ und $v$ auch bekannte Functionen einer und derselben Variablen $x$ bedeuten können, möglichst genau ausdrücken. Unter allen Regeln, welche man zur Beantwortung dieser Frage, d. i. zur Ausmittelung der möglich oder wahrscheinlich richtigsten Werthe der Constanten anwendet, ist die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate die allgemeinste und wissenschaftlich begründetste.

Sind

$$\left\{\begin{matrix} u_1, & v_1, & y_1 \\ u_2, & v_2, & y_2 \\ u_3, & v_3, & y_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ u_n, & v_n, & y_n \end{matrix}\right\}$$

die der Function $y = \alpha u + \beta v$ entsprechenden Resultate der Beobachtung, so hat man für die Beobachtungsfehler und deren Quadrate folgende Werthe:

$$\left\{\begin{matrix} z_1 = y_1 - (\alpha u_1 + \beta v_1) \\ z_2 = y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2) \\ z_3 = y_3 - (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ z_n = y_n - (\alpha u_n + \beta v_n) \end{matrix}\right\}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} z_1^2 = y_1^2 - 2\alpha u_1 y_1 - 2\beta v_1 y_1 + \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\beta u_1 v_1 + \beta^2 v_1^2 \\ z_2^2 = y_2^2 - 2\alpha u_2 y_2 - 2\beta v_2 y_2 + \alpha^2 u_2^2 + 2\alpha\beta u_2 v_2 + \beta^2 v_2^2 \\ z_3^2 = y_3^2 - 2\alpha u_3 y_3 - 2\beta v_3 y_3 + \alpha^2 u_3^2 + 2\alpha\beta u_3 v_3 + \beta^2 v_3^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n^2 = y_n^2 - 2\alpha u_n y_n - 2\beta v_n y_n + \alpha^2 u_n^2 + 2\alpha\beta u_n v_n + \beta^2 v_n^2 \end{array}\right\},$$

und erhält nun für die Summe der Fehlerquadrate, wenn man sich der Abkürzung wegen des Summationszeichens $\Sigma$ bedient, um eine Summation gleichartiger Größen anzuzeigen, also $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2 = \Sigma(y^2)$, $v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \cdots + v_n y_n = \Sigma(v y)$ setzt, u. s. w.:

$$\Sigma(z^2) = \Sigma(y^2) - 2\alpha\Sigma(u y) - 2\beta\Sigma(v y) + \alpha^2\Sigma(u^2) + 2\alpha\beta\Sigma(u v) + \beta^2\Sigma(v^2).$$

In dieser Gleichung sind natürlich außer der als Abhängigvariablen zu behandelnden Fehlerquadratsumme $\Sigma(z^2)$ nur die hier als Urvariable anzusehenden Constanten $\alpha$ und $\beta$ der Function $y = \alpha u + \beta v$ unbekannt. Die Methode der kleinsten Quadrate fordert nun, sowohl $\alpha$ als auch $\beta$ so zu wählen, daß die Quadratsumme $\Sigma(z^2)$ zum Minimum werde; und deshalb müssen wir die gewonnene Function für $\Sigma(z^2)$ ein Mal in Beziehung auf $\alpha$ und ein Mal in Beziehung auf $\beta$ differenziiren, und jeden der sich herausstellenden Differenzialquotienten von $\Sigma(z^2)$ gleich Null setzen. Dadurch stößt man auf folgende zwei Bestimmungsgleichungen für $\alpha$ und $\beta$:

$$-\Sigma(u y) + \alpha\Sigma(u^2) + \beta\Sigma(u v) = 0,$$
$$-\Sigma(v y) + \beta\Sigma(v^2) + \alpha\Sigma(u v) = 0;$$

deren Auflösung auf folgende Ausdrücke führt:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(u y) - \Sigma(u v)\Sigma(v y)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(u v)\Sigma(u v)} \text{ und}$$

$$\beta = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v y) - \Sigma(u v)\Sigma(u y)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(u v)\Sigma(u v)}$$ (vgl. „Ingenieur" S. 77).

Diese Formeln gehen für eine Function $y = \alpha + \beta v$, da hier $u = 1$, also $\Sigma(u v) = \Sigma(v)$, $\Sigma(u y) = \Sigma(y)$ und $\Sigma(u^2) = 1 + 1 + 1 + \cdots = n$, d. i. die Anzahl der Gleichungen oder Beobachtungen ist, in folgende über:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(y) - \Sigma(v)\Sigma(v y)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)},$$

$$\beta = \frac{n\Sigma(v y) - \Sigma(v)\Sigma(y)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)}.$$

Für die noch einfachere Function $y = \beta v$, wo $\alpha =$ Null ist, erhält man:

$$\beta = \frac{\Sigma(v y)}{\Sigma(v^2)}.$$

und endlich für den einfachsten Fall $y = \alpha$, wo es sich also um die Ausmittelung des wahrscheinlichsten Werthes einer einzigen Größe handelt, ist

$$\alpha = \frac{\Sigma(y)}{n},$$

also dieser Werth das arithmetische Mittel aus allen durch Messungen oder Beobachtungen gefundenen Werthen.

Beispiel. Um das Gesetz einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, d. i. deren Anfangsgeschwindigkeit $c$ und Beschleunigungsmaß $p$ kennen zu lernen, hat man die verschiedenen Zeiten $t_1$, $t_2$, $t_3$ u. s. w. entsprechenden Räume oder Wege $s_1$, $s_2$, $s_3$ u. s. w. gemessen, und dabei Folgendes gefunden:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zeiten . . . . . . | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 Sec. |
| Räume . . . . . . | 0 | 5 | 20 | 38 | 58½ | 101 Fuß. |

Ist nun $s = c\,t + \frac{p\,t^2}{2}$ das dieser Bewegung zu Grunde liegende Bewegungsgesetz, so handelt es sich um die Ermittelung der Constanten $c$ und $p$. Setzt man in die obigen Formeln $u = t$ und $v = t^2$, sowie $\alpha = c$, $\beta = \frac{p}{2}$ und $y = s$, so erhält man zur Berechnung von $c$ und $p$ folgende Formeln:

$$c = \frac{\Sigma(t^4)\,\Sigma(s\,t) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(s\,t^2)}{\Sigma(t^2)\,\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(t^3)} \text{ und}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\Sigma(t^2)\,\Sigma(s\,t^2) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(s\,t)}{\Sigma(t^2)\,\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(t^3)},$$

wonach sich folgende Rechnung führen läßt:

| $t$ | $t^2$ | $t^3$ | $t^4$ | $s$ | $s\,t$ | $s\,t^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 20 | 60 | 180 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 38 | 190 | 950 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 58,5 | 409,5 | 2866,5 |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | 101 | 1010 | 10100 |
| Summen | 184 $= \Sigma(t^2)$ | 1496 $= \Sigma(t^3)$ | 13108 $= \Sigma(t^4)$ | 222,5 $= \Sigma(s)$ | 1674,5 $= \Sigma(s\,t)$ | 14101,5 $= \Sigma(s\,t^2)$. |

Hieraus bestimmt sich:

$$c = \frac{13108 \;.\; 1674{,}5 - 1496 \;.\; 14101{,}5}{184 \;.\; 13108 - 1496 \;.\; 1496} = \frac{85340}{17386} = 4{,}908 \text{ Fuß und}$$

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{184 \;.\; 14101{,}5 - 1496 \;.\; 1674{,}5}{184 \;.\; 13108 - 1496 \;.\; 1496} = \frac{89624}{173860} = 0{,}5155 \text{ Fuß},$$

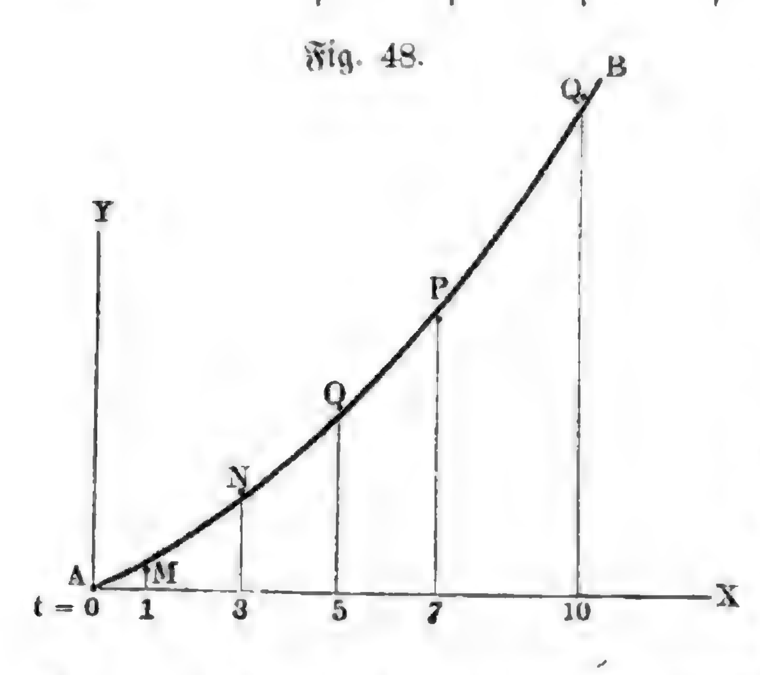
und daher folgende Formel für die beobachtete Bewegung:

$$s = 4{,}908\, t + 0{,}5155 \;.\; t^2.$$

Nach dieser Formel hat man:

| für die Zeiten . . . | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 Sec. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| die Räume . . . . | 0 | 5,43 | 19,36 | 37,43 | 59,62 | 100,63 Fuß. |

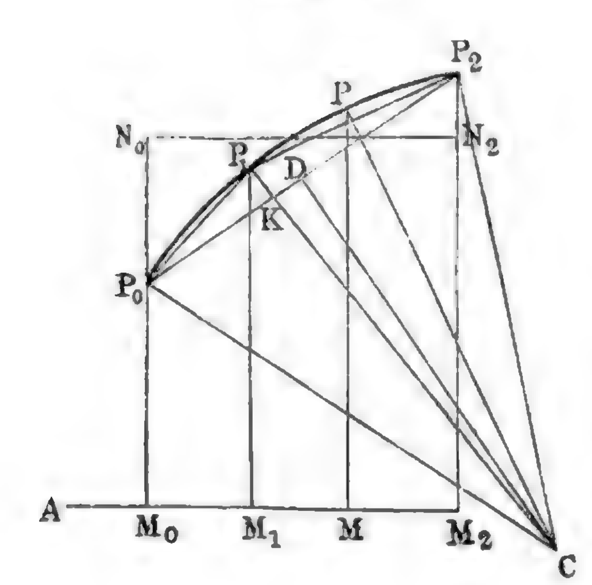
Fig. 48.




Wenn man die Zeiten ($t$) als Abscissen und sowohl die beobachteten als auch die berechneten Wege ($s$) als Ordinaten aufträgt, so läßt sich durch die Endpunkte der berechneten Coordinaten eine Curve $AB$, Fig. 48, legen, welche sich zwischen den durch die beobachteten Coordinaten bestimmten Punkten $M$, $N$, $O$, $P$, $Q$ so hinzieht, daß die Quadratsumme der Abweichungen derselben von diesen Punkten beiderseits möglichst klein ausfallen.

Art. 37. Kommt es darauf an, in Ermangelung einer Formel für das stetige Fortschreiten einer Größe $y$ oder ihre Abhängigkeit von einer anderen Größe $x$, einen Werth der Größe $y$, welcher einem gegebenen Werthe von $x$ entspricht, mittels entweder aus Erfahrung bekannter oder aus einer Tabelle entnommener Werthe von $x$ und $y$ zu bestimmen, so wendet man das sogenannte Interpolationsverfahren an, von welchem hier nur das Wichtigste mitgetheilt werden soll.

Fig. 49.




Wenn die Abscissen $A M_0 = x_0$, $A M_1 = x_1$ und $A M_2 = x_2$, Fig. 49, und die zugehörigen Ordinaten

$M_0 P_0 = y_0$, $M_1 P_1 = y_1$ und $M_2 P_2 = y_2$ gegeben sind, so kann man die einer neuen Abscisse $A M = x$ entsprechende Ordinate $M P = y$ durch die Formel $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ ausdrücken, wofern die drei dadurch bestimmten Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ nahe in einer geraden Linie oder in einem wenig gekrümmten Bogen liegen. Legt man den Coordinatenanfangspunkt von $A$ nach $M_0$, so wird dadurch der Allgemeinheit nicht geschadet, wir bekommen aber dann einfach für $x = 0$, $y = \alpha$ und folglich das constante Glied $\alpha = y_0$.

Führen wir nun ein Mal $x_1$ und $y_1$ und ein anderes Mal $x_2$ und $y_2$ in die fingirte Gleichung ein, so erhalten wir folgende zwei Bestimmungsgleichungen:

$$y_1 - y_0 = \beta x_1 + \gamma x_1^2 \text{ und}$$
$$y_2 - y_0 = \beta x_2 + \gamma x_2^2, \text{ woraus sich}$$
$$\beta = \frac{(y_1 - y_0) x_2^2 - (y_2 - y_0) x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2} \text{ und}$$
$$\gamma = \frac{(y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1} \text{ ergiebt.}$$

Es ist also hiernach:

$$y = y_0 + \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2^2 - (y_2 - y_0) x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2}\right) x + \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}\right) x^2.$$

Läge die Ordinate $y_1$ mitten zwischen $y_0$ und $y_2$, so hätte man $x_2 = 2 x_1$ und daher einfacher:

$$y = y_0 - \left(\frac{3 y_0 - 4 y_1 + y_2}{2 x_1}\right) x + \left(\frac{y_0 - 2 y_1 + y_2}{2 x_1^2}\right) x^2.$$

Sind nur zwei Paar Coordinaten $x_0$, $y_0$ und $x_1$, $y_1$ gegeben, so muß man die Begrenzungslinie $P_0 P_1$ als gerade Linie ansehen, und folglich

$$y = y_0 + \beta x,$$

also auch
$$y_1 = y_0 + \beta x_1,$$

setzen, wonach
$$\beta = \frac{y_1 - y_0}{x_1} \text{ und}$$
$$y = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1}\right) x \text{ folgt.}$$

Wenn verlangt wird, zwischen den Ordinaten $y_0$, $y_1$, $y_2$ eine vierte Ordinate $y$ durch Construction zu interpoliren, so legt man durch die Endpunkte $P_0, P_1, P_2$ dieser Ordinaten einen Kreis, und nimmt $y$ gleich der

Ordinate desselben. Das Centrum $C$ dieses Kreises wird auf die bekannte Weise dadurch bestimmt, daß man die Punkte $P_0$, $P_1$, $P_2$ mit einander durch gerade Linien verbindet und in den Mittelpunkten derselben Perpendikel errichtet; der Durchschnitt $C$ dieser Perpendikel unter einander ist das gesuchte Centrum.

Sind die Entfernungen des mittleren Punktes $P_1$ von den beiden anderen Punkten $P_0$ und $P_2$, $s_0$ und $s_2$, und ist der Abstand $P_1 K$ des Punktes $P_1$ von der Verbindungslinie $s_1 = P_0 P_2, = h$, so hat man für den Peripheriewinkel $\alpha = P_1 P_0 P_2 = {}^1/_2$ Centriwinkel $P_1 C P_2$:

$$\sin.\alpha = \frac{h}{s_0}$$

und folglich für den Krümmungshalbmesser $CP = CP_0 = CP_1 = CP_2$:

$$r = \frac{s_2}{2\sin.\alpha} = \frac{s_0 s_2}{2h}.$$

Man findet folglich das Centrum $C$ des durch $P_0$, $P_1$, $P_2$ gehenden Kreises, wenn man mit dem nach dieser Formel berechneten Halbmesser $r$ aus $P_0$ oder $P_1$ oder $P_2$ das in der Mitte $D$ der Sehne $P_0 P_2$ errichtete Perpendikel durchschneidet.

Art. 38. Das Mittel sämmtlicher Ordinaten über der Grundlinie $M_0 M_2$ ist die Höhe eines Rechteckes $M_0 M_2 N_2 N_0$, über derselben Grundlinie $M_0 M_2$, welches mit der Fläche $M_0 M_2 P_2 P_1 P_0$ einerlei Inhalt hat, und läßt sich daher aus diesem Flächenraume leicht bestimmen. Nach Artikel 29 ist derselbe:

$$F = \int_0^{x_2} y\,\partial x = \int_0^{x_2} (y_0 + \beta x + \gamma x^2)\,\partial x$$

$$= y_0 x_2 + \frac{\beta x_2^2}{2} + \frac{\gamma x_2^3}{3}$$

$$= y_0 x_2 + \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2^2 - (y_2 - y_0) x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2}\right) \frac{x_2^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}\right) \frac{x_2^3}{3}$$

$$= \left(y_0 + \frac{(y_1 - y_0) x_2^2}{6 x_1 (x_2 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_0)(3 x_1 - 2 x_2)}{6 (x_2 - x_1)}\right) x_2$$

$$= \left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right) x_2 + \frac{(y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{6 x_1 (x_2 - x_1)} x_2^2,$$

und folglich die mittlere Ordinate:

$$y_m = \frac{F}{x_2} = \frac{y_0 + y_2}{2} + \left(\frac{(y_1 - y_0)\,x_2 - (y_2 - y_0)\,x_1}{6\,x_1\,(x_2 - x_1)}\right) x_2.$$

Wäre $\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x_2}{x_1}$, so hätte man es mit einer geradlinigen Begrenzung zu thun, und es wäre dann einfach:

$$F = \left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right) x_2.$$

sowie

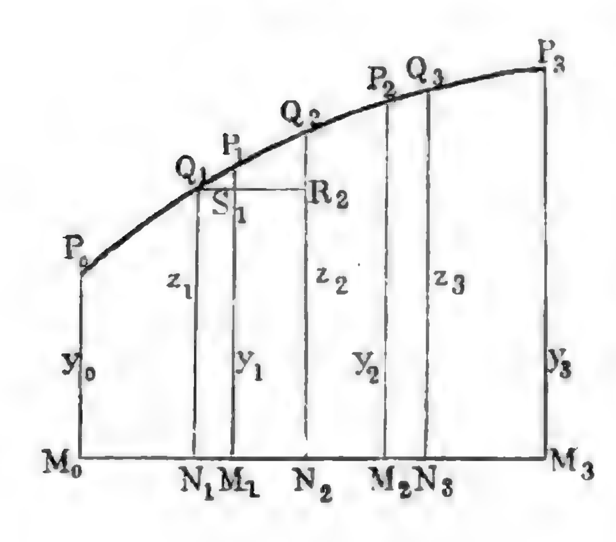
$$y_m = \frac{y_0 + y_2}{2}.$$

Wäre ferner bloß $x_2 = 2\,x_1$, also $y_1$ von den Grenzordinaten $y_0$ und $y_2$ gleichviel abstehend, so würde sein:

$$F = (y_0 + 4\,y_1 + y_2)\,\frac{x_2}{6} \text{ (siehe Art. 30), und}$$

$$y_m = \frac{y_0 + 4\,y_1 + y_2}{6}.$$

Fig. 50.




Ist ein Flächenraum $M_0\,M_3\,P_3\,P_0$, Fig. 50, durch vier Coordinaten $M_0\,P_0 = y_0$, $M_1\,P_1 = y_1$, $M_2\,P_2 = y_2$, $M_3\,P_3 = y_3$ bestimmt, welche in gleichen Abständen von einander stehen, so kann man die Größe desselben einfach annähernd auf folgende Weise bestimmen.

Bezeichnen wir die Grundlinie $M_0\,M_3$ durch $x_3$ und drei zwischen $y_0$ und $y_3$ in gleichen Abständen von einander eingeschaltete Ordinaten $N_1\,Q_1$, $N_2\,Q_2$, $N_3\,Q_3$ durch $z_0, z_1, z_2$, so können wir annähernd die Fläche:

$$M_0\,M_3\,P_3\,P_0 = F = (1/2\,y_0 + z_0 + z_1 + z_2 + 1/2\,y_3)\,\frac{x_3}{4} \text{ setzen.}$$

Nun ist aber:

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{2\,z_1 + 2\,z_2 + 2\,z_3}{6} = \frac{2\,z_1 + z_2}{6} + \frac{2\,z_3 + z_2}{6} \text{ und}$$

$$y_1 = z_1 + 1/3\,(z_2 - z_1) = \frac{2\,z_1 + z_2}{3}, \text{ sowie } y_2 = \frac{2\,z_3 + z_2}{3},$$

$$\text{daher folgt: } \frac{z_0 + z_1 + z_2}{3} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \text{ und}$$

$$F = [\tfrac{1}{2}\, y_0 + \tfrac{3}{2}\,(y_1 + y_2) + \tfrac{1}{2}\, y_3]\,\frac{x_3}{4}$$

$$= [y_0 + 3\,(y_1 + y_2) + y_3]\,\frac{x_3}{8}, \text{ sowie:}$$

$$y_m = \frac{y_0 + 3\,(y_1 + y_2) + y_3}{8}.$$

Während die vorige Formel für $y_m$ zur Anwendung kommt, wenn die Fläche in eine gerade Anzahl von Streifen zerlegt ist, läßt sich die letztere anwenden, wenn die Anzahl dieser Flächentheile eine ungerade ist.

Hiernach kann man auch annähernd

$$\int_c^{c_1} y\,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,\partial x = [y_0 + 3\,(y_1 + y_2) + y_3]\,\frac{c_1 - c}{8}$$

setzen, wenn

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(\frac{2\,c + c_1}{3}\right),\ y_2 = \varphi\left(\frac{c + 2\,c_1}{3}\right) \text{ und } y_3 = \varphi(c_1)$$

vier bestimmte Werthe der Function $y = \varphi(x)$ sind.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ (s. Beispiel Art. 30) hat man $c = 1$, $c_1 = 2$ und $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, daher folgt

$$y_0 = 1/1 = 1,\ y_1 = \frac{3}{2 + 2} = 3/4,\ y_2 = \frac{3}{1 + 4} = 3/5 \text{ und } y_3 = 1/2,$$

und der angenäherte Werth dieses Integrals:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = [1 + 3\,(3/4 + 3/5) + 1/2] \cdot 1/8 = \frac{111}{160} = 0{,}694.$$

## Erster Theil.

# Die allgemeinen Lehren der Mechanik.

## Erster Abschnitt.

# Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

## Erstes Capitel.

### Die einfache Bewegung.

**Ruhe und Bewegung.** Jeder Körper nimmt im Raume einen gewissen Ort ein, und ein Körper ist in Ruhe (franz. repos; engl. rest), wenn er seinen Ort nicht ändert; er ist hingegen in Bewegung (franz. mouvement; engl. motion), wenn er aus einem Orte nach und nach in andere übergeht. Ruhe und Bewegung eines Körpers sind entweder absolut oder relativ, je nachdem man den Ort desselben auf einen Raum bezieht, der entweder selbst in Ruhe oder in Bewegung ist, oder darin gedacht wird. §. 1

Auf der Erde giebt es keine Ruhe, denn alle Körper auf der Erde nehmen an ihrer Bewegung um die Sonne und um ihre eigene Axe Antheil; denken wir uns aber die Erde in Ruhe, so sind für uns auch alle diejenigen Erdkörper in Ruhe, welche ihren Ort in Beziehung auf die Erde nicht ändern.

**Bewegungsarten.** Die stetige Folge von Oertern, welche ein Körper in seiner Bewegung nach und nach einnimmt, bildet einen Raum, den man den Weg (franz. chemin, trajectoire; engl. way, trajectory) des bewegten Körpers nennt. Der Weg eines bewegten Punktes ist eine Linie. Der Weg eines geometrischen Körpers ist zwar wieder ein Körper, man versteht aber unter demselben gewöhnlich diejenige Linie, welche ein gewisser Punkt, z. B. der Mittelpunkt des Körpers, bei der Bewegung beschreibt. §. 2

Eine Bewegung ist geradlinig (franz. rectiligne; engl. rectilinear), wenn ihr Weg in einer geraden Linie besteht; sie ist aber krummlinig (franz. curviligne; engl. curvilinear), wenn der Weg des bewegten Körpers eine krumme Linie ist.

In Beziehung auf Zeit (franz. temps; engl. time) ist die Bewegung entweder **gleichförmig** oder **ungleichförmig**.

§. 3 Eine Bewegung ist **gleichförmig** (franz. uniforme; engl. uniform), wenn durch dieselbe in gleichen und beliebig kleinen Zeittheilchen gleiche Wege zurückgelegt werden; sie ist **ungleichförmig** (franz. varié; engl. variable), wenn diese Gleichheit nicht statthat. Werden mit dem Ablaufen der Zeit die in gleichen Zeittheilchen durchlaufenen Räume immer größer und größer, so heißt die ungleichförmige Bewegung **beschleunigt** (franz. accéléré; engl. increasing), nehmen diese aber immer mehr und mehr ab, so heißt sie **verzögert** (franz. retardé; engl. decreasing).

Von der gleichförmigen Bewegung ist die **periodische Bewegung** (franz. périodique; engl. periodic) dadurch unterschieden, daß bei dieser nur innerhalb gewisser endlicher Zeiträume, die man **Perioden** nennt, gleiche Räume durchlaufen werden.

Das beste Beispiel der gleichförmigen Bewegung giebt die scheinbare tägliche Umdrehung des Fixsternhimmels; nächstdem das Fortrücken der Zeiger einer Uhr. Beispiele der ungleichförmigen Bewegung geben fallende und in die Höhe geworfene Körper, der sinkende Wasserspiegel beim Ausfluß des Wassers aus Gefäßen u. s. w. Für die periodische Bewegung findet man Beispiele an den Pendelschwingungen, an den Kolbenspielen einer Dampfmaschine u. s. w.

§. 4 **Gleichförmige Bewegung.** **Geschwindigkeit** (franz. vitesse; engl. velocity) ist die Stärke oder Größe einer Bewegung. Je größer der Raum ist, welchen ein Körper innerhalb einer gewissen Zeit durchläuft, desto stärker ist auch seine Bewegung, oder desto größer ist auch seine Geschwindigkeit. Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit unveränderlich, bei einer ungleichförmigen Bewegung hingegen ändert sie sich in jedem Augenblicke. Das **Maß der Geschwindigkeit** in einem gewissen Zeitpunkte ist der Weg, den der Körper von diesem an innerhalb der Zeiteinheit oder Secunde entweder wirklich zurücklegt oder zurücklegen würde, wenn von diesem Augenblicke oder Zeitpunkte an die Bewegung in eine gleichförmige überginge, also die Geschwindigkeit unveränderlich bliebe. Gewöhnlich nennt man dieses Maß schlechtweg Geschwindigkeit.

§. 5 Wenn ein Körper in jedem Zeittheilchen den Weg $\sigma$ durchläuft, und die Zeitsecunde aus $n$ (sehr vielen) solchen Zeittheilchen besteht, so ist der Weg innerhalb einer Secunde die Geschwindigkeit oder vielmehr das Geschwindigkeitsmaß:

$$c = n \,.\, \sigma.$$

Im Laufe einer Zeit $t$ (Secunden) verfließen $n \,.\, t$ Zeittheilchen, und in

jedem wird der Raum $\sigma$ zurückgelegt, es ist daher der ganze Weg (franz. l'espace; engl. the space), welcher der Zeit $t$ entspricht:

$$s = n \cdot t \cdot \sigma = n \cdot \sigma \cdot t, \text{ d. i.}$$

I.) $s = ct$.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist also der Raum ($s$) ein Product aus Geschwindigkeit ($c$) und Zeit ($t$).

Umgekehrt ist:

II.) $c = \frac{s}{t}$ und

III.) $t = \frac{s}{c}$.

Beispiele. 1) Ein Dampfwagen, welcher mit einer Geschwindigkeit von 30 Fuß fortrollt, legt in zwei Stunden = 120 Minuten = 7200 Secunden den Weg $s = 30 \,.\, 7200 = 216000$ Fuß zurück. 2) Wenn zum Herausziehen einer Tonne aus einem 1200 Fuß tiefen Schachte eine Zeit von $4\frac{1}{2}$ Minuten = 270 Secunden nöthig ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit dieses Fördergefäßes $(c) = \frac{1200}{270} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9} = 4{,}444 \ldots$ Fuß anzunehmen. 3) Ein Pferd, welches sich mit 6 Fuß Geschwindigkeit fortbewegt, braucht zum Zurücklegen eines Weges von einer Meile oder 24000 Fuß die Zeit $t = \frac{24000}{6} = 4000$ Secunden oder 1 Stunde 6 Minuten und 40 Secunden.

§. 6 Vergleicht man zwei verschiedene gleichförmige Bewegungen mit einander, so stößt man auf Folgendes:

Die Räume sind $s = ct$ und $s_1 = c_1 t_1$, es ist daher ihr Verhältniß $\frac{s}{s_1} = \frac{ct}{c_1 t_1}$. Setzt man nun $t_1 = t$, so hat man $\frac{s}{s_1} = \frac{c}{c_1}$; nimmt man $c_1 = c$, so erhält man $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; ist endlich $s_1 = s$, so folgt $\frac{c}{c_1} = \frac{t_1}{t}$.

Die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume verhalten sich also bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen wie die Geschwindigkeiten; die mit gleichen Geschwindigkeiten zurückgelegten Wege dagegen wie die Zeiten; die gleichen Räumen entsprechenden Geschwindigkeiten sind endlich den Zeiten umgekehrt proportional.

§. 7 **Gleichförmig veränderte Bewegung.** Eine Bewegung ist gleichförmig verändert (franz. uniformément varié; engl. uniformly variable), wenn ihre Geschwindigkeit innerhalb gleicher, beliebig kleiner Zeittheilchen um gleichviel zu= oder abnimmt. Sie ist entweder gleichförmig beschleunigt (franz. uniformément accéléré; engl. uniformly accelerated), oder gleichförmig verzögert (franz. uniformément retardé; engl. uniformly retarded);

im ersten Falle findet ein allmäliges Wachsen, im zweiten ein stetiges Abnehmen an Geschwindigkeit statt.

Gleichförmig beschleunigt fällt ein Körper im luftleeren Raume, und gleichförmig verzögert würde das Steigen senkrecht in die Höhe geworfener Körper erfolgen, wenn die Luft keinen Einfluß auf den Körper ausübte.

§. 8 Die Stärke oder Größe der Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers heißt Acceleration oder **Beschleunigung** (franz. accélération; engl. acceleration); sie ist entweder **positiv** (Beschleunigung) oder **negativ** (Verzögerung, retardation), je nachdem eine Zu- oder eine Abnahme der Geschwindigkeit statt hat. Je mehr die Geschwindigkeit innerhalb einer gewissen Zeit zu- oder abnimmt, desto größer ist auch die Acceleration. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die Acceleration unveränderlich; es läßt sich daher auch dieselbe durch diejenige Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit messen, welche im Laufe einer Zeitsecunde stattfindet. Bei jeder anderen Bewegung hingegen ist das Maß der Acceleration diejenige Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit, welche ein Körper erhalten würde, wenn von dem Augenblicke an, für welchen man die Acceleration angeben will, dieselbe ihre Veränderlichkeit verlöre, die Bewegung also in eine gleichförmig veränderte überginge.

Sehr gewöhnlich nennt man dieses Maß selbst die Acceleration oder Beschleunigung.

§. 9 Wenn die Geschwindigkeit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in einem sehr kleinen (unendlich kleinen) Zeittheilchen um $\varkappa$ zunimmt, und die Zeitsecunde aus $n$ (unendlich vielen) solchen Zeittheilchen besteht, so ist die Zunahme an Geschwindigkeit in einer Secunde, oder die sogenannte **Acceleration**: $p = n\varkappa$,
und die Zunahme nach $t$ Secunden, $= nt.\varkappa = n\varkappa.t = pt$.

Ist die **Anfangsgeschwindigkeit** (im Augenblicke, wo man die Zeit $t$ zu zählen anfängt) $= c$, so hat man hiernach die **Endgeschwindigkeit** d. i. die am Ende der Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit:

$$v = c + pt.$$

Für die ohne Geschwindigkeit anfangende Bewegung ist $c = 0$, daher $v = pt$, und für die gleichförmig verzögerte, negative Acceleration $(-p)$ besitzende Bewegung ist:

$$v = c - pt.$$

**Beispiele.** 1) Die Acceleration eines im luftleeren Raume frei fallenden Körpers ist $= 31\frac{1}{4} = 31{,}25$ Fuß; es erlangt daher ein solcher nach 3 Secunden die Geschwindigkeit $v = pt = 31{,}25 \,.\, 3 = 93{,}75$ Fuß. 2) Eine von einer schiefen Ebene herabrollende Kugel hat im Anfang schon die Geschwindigkeit $c = 25$ Fuß, und erlangt beim Herabrollen in jeder Secunde noch 5 Fuß

Zusatz an Geschwindigkeit; es ist daher ihre Geschwindigkeit nach $2\frac{1}{2}$ Secunden: $v = 25 + 5 \cdot 2{,}5 = 25 + 12{,}5 = 37{,}5$ Fuß, d. h., sie wird, von dem letzten Zeitpunkte an gleichförmig fortgehend, in jeder Secunde 37,5 Fuß Weg zurücklegen. 3) Ein mit 30 Fuß Geschwindigkeit fortgehender Dampfwagen wird so gebremst, daß er in jeder Secunde 3,5 Fuß an Geschwindigkeit verliert, seine Acceleration also — 3,5 Fuß beträgt; es ist deshalb seine Geschwindigkeit nach 6 Secunden: $v = 30 - 3{,}5 \cdot 6 = 30 - 21 = 9$ Fuß.

**Gleichförmig beschleunigte Bewegung.** Innerhalb eines unendlich kleinen Zeittheilchens $\tau$ läßt sich die Geschwindigkeit einer jeden Bewegung als unveränderlich ansehen; man kann daher den in diesem Zeittheilchen durchlaufenen Raum §. 10

$$\sigma = v \cdot \tau$$

setzen, und erhält so den in einer endlichen Zeit $t$ durchlaufenen Raum, wenn man die Summe dieser kleinen Räume ermittelt. Nun ist aber für alle diese Räumchen die Zeit $\tau$ eine und dieselbe, es läßt sich daher auch ihre Summe gleichsetzen dem Producte aus eben diesen Zeittheilchen und aus der Summe der, gleichen Intervallen entsprechenden Geschwindigkeiten.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist aber die Summe $(0 + v)$ der Geschwindigkeiten im ersten und letzten Augenblicke so groß als die Summe $p\tau + (v - p\tau)$ der Geschwindigkeiten im zweiten und vorletzten Augenblicke, auch gleich der Summe $2p\tau + (v - 2p\tau)$ der Geschwindigkeiten im dritten und vorvorletzten Augenblicke u. s. w., und diese Summe überhaupt gleich der Endgeschwindigkeit $v$; es ist daher hier die Summe aller Geschwindigkeiten gleich dem Producte $\left(v \cdot \frac{n}{2}\right)$ aus der Endgeschwindigkeit $v$ und aus der halben Anzahl aller Zeittheilchen, und der durchlaufene Raum das Product $\left(v \cdot \frac{n}{2} \cdot \tau\right)$ aus der Endgeschwindigkeit $v$, der halben Anzahl der Zeittheilchen und der Größe eines solchen Theilchens. Nun giebt endlich die Größe $(\tau)$ eines Zeittheilchens, mit der Anzahl $n$ derselben multiplicirt, die ganze Zeit $t$ an, deshalb ist denn der innerhalb der Zeit $t$ gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Raum:

$$s = \frac{v\,t}{2}.$$

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung fällt hiernach der Raum ebenso groß aus wie bei der gleichförmigen Bewegung, wenn die Geschwindigkeit der letzteren Bewegung halb so groß ist als die Endgeschwindigkeit der ersteren.

Beispiele. 1) Wenn ein Körper innerhalb 10 Secunden durch gleichförmig beschleunigte Bewegung eine Geschwindigkeit $v$ von 26 Fuß erlangt hat, so ist der zu gleicher Zeit zurückgelegte Weg $s = \frac{26 \cdot 10}{2} = 130$ Fuß. 2) Ein Wa-

gen, welcher bei seiner gleichförmig beschleunigten Bewegung im Laufe von $2\frac{1}{4}$ Secunden 25 Fuß zurückgelegt hat, geht am Ende mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 \cdot 25}{2{,}25} = \frac{50 \cdot 4}{9} = 22{,}22 \ldots \text{ Fuß fort.}$$

§. 11 Die beiden Grundformeln der gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$\text{I.)} \quad v = p\,t \quad \text{und}$$

$$\text{II.)} \quad s = \frac{v\,t}{2},$$

welche ausdrücken, daß hier die Geschwindigkeit ein Product aus Acceleration und Zeit, und der Raum ein solches aus der halben Geschwindigkeit und Zeit ist, schließen noch zwei andere Hauptformeln in sich, die man erhält, wenn man aus beiden Gleichungen ein Mal $v$ und ein zweites Mal $t$ eliminirt. Es folgt nämlich:

$$\text{III.)} \quad s = \frac{p t^2}{2} \quad \text{und}$$

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{v^2}{2\,p}.$$

Hiernach ist also der gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Weg ein Product aus der halben Acceleration und dem Quadrate der Zeit, und auch der Quotient aus dem Quadrate der Endgeschwindigkeit und der doppelten Beschleunigung.

Diese vier Hauptformeln geben durch Umkehrung, je nachdem man die eine oder die andere der in ihnen enthaltenen Größen absondert, noch acht andere Formeln, und man findet dieselben im „Ingenieur“ Seite 325 in einer Tabelle zusammengestellt.

Beispiele. 1) Ein mit der Acceleration 15,625 Fuß bewegter Körper legt in 1,5 Secunde den Weg $\frac{15{,}625 \cdot (1{,}5)^2}{2} = 15{,}625 \cdot \frac{9}{8} = 17{,}578$ Fuß zurück. 2) Ein durch die Acceleration $p = 4{,}5$ Fuß in die Geschwindigkeit $v = 16{,}5$ Fuß versetzter Körper hat den Raum $s = \frac{(16{,}5)^2}{2 \cdot 4{,}5} = 30{,}25$ Fuß durchlaufen.

§. 12 Bei der Vergleichung von zwei verschiedenen gleichförmig beschleunigten Bewegungen mit einander stößt man auf Folgendes:

Die Geschwindigkeiten sind $v = p\,t$ und $v_1 = p_1\,t_1$, die Räume hingegen $s = \frac{p t^2}{2}$ und $s_1 = \frac{p_1 t_1^2}{2}$, es folgt hieraus:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{p\,t}{p_1\,t_1} \quad \text{und} \quad \frac{s}{s_1} = \frac{p\,t^2}{p_1\,t_1^2} = \frac{v\,t}{v_1\,t_1} = \frac{v^2\,p_1}{v_1^2\,p}.$$

Setzt man nun $t_1 = t$, so erhält man:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{p}{p_1};$$

es verhalten sich also bei gleichen Zeiten die durchlaufenen Wege wie die Endgeschwindigkeiten, oder auch wie die Beschleunigungen.

Nimmt man ferner $p_1 = p$, so ergiebt sich:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{t}{t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{v^2}{v_1^2};$$

bei gleichen Beschleunigungen und also auch bei einer und derselben gleichförmig beschleunigten Bewegung sind also die Endgeschwindigkeiten den Zeiten und die durchlaufenen Räume den Quadraten der Zeiten, oder auch den Quadraten der Endgeschwindigkeiten proportional.

Ferner $v_1 = v$ angenommen, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1}{t}$ und $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; bei gleichen Endgeschwindigkeiten sind die Accelerationen den Zeiten umgekehrt, die Räume aber den Zeiten direct proportional.

Endlich $s_1 = s$ gesetzt, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1^2}{t^2} = \frac{v^2}{v_1^2}$; es verhalten sich also bei gleichen Räumen die Accelerationen umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten und direct wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten.

§. 13 Für die mit der Geschwindigkeit $c$ anfangende gleichförmig beschleunigte Bewegung hat man nach §. 9:

$$\text{I.)} \quad v = c + pt,$$

und da der unveränderlichen Geschwindigkeit $c$ der Raum $ct$, der Acceleration $p$ aber der Weg $\frac{pt^2}{2}$ zukommt:

$$\text{II.)} \quad s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Entfernt man $p$ aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$\text{III.)} \quad s = \frac{c + v}{2} t,$$

und beseitigt man $t$, so stellt sich

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$$

heraus.

Beispiele. 1) Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 3$ Fuß und mit der Acceleration $p = 5$ Fuß bewegter Körper legt in 7 Secunden den Weg

$$s = 3 \cdot 7 + 5 \cdot \frac{7^2}{2} = 21 + 122{,}5 = 143{,}5 \text{ Fuß zurück.}$$

2) Ein anderer Körper, welcher innerhalb 3 Minuten = 180 Secunden seine Geschwindigkeit $2\frac{1}{2}$ Fuß in die von $7\frac{1}{2}$ Fuß umändert, macht in dieser Zeit den Weg von $\frac{2,5 + 7,5}{2} \cdot 180 = 900$ Fuß.

§. 14 **Gleichförmig verzögerte Bewegung.** Für die mit der Geschwindigkeit $c$ anfangende gleichförmig verzögerte Bewegung gelten die Formeln:

$$\text{I.)} \quad v = c - pt,$$

$$\text{II.)} \quad s = ct - \frac{pt^2}{2},$$

$$\text{III.)} \quad s = \frac{c + v}{2} \cdot t,$$

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{c^2 - v^2}{2\,p}.$$

welche aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen sogleich hervorgehen, wenn man darin $p$ negativ setzt. Während bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit ohne Ende wächst, nimmt bei der gleichförmig verzögerten Bewegung die Geschwindigkeit bis zu einem gewissen Zeitpunkte ab, wird in demselben = Null, und fällt später negativ aus, d. h. es geht später die Bewegung in umgekehrter Richtung vor sich.

Setzen wir in der ersten Formel $v = 0$, so erhalten wir $pt = c$, also die Zeit, zu welcher die Geschwindigkeit Null geworden ist:

$$t = \frac{c}{p};$$

setzen wir endlich diesen Werth von $t$ in die zweite Gleichung, so erhalten wir den Raum, welchen der Körper zu diesem Zeitpunkte zurückgelegt hat:

$$s = \frac{c^2}{2\,p}.$$

Ist die Zeit größer als $\frac{c}{p}$, so fällt der Raum kleiner als $\frac{c^2}{2\,p}$ aus; ist die Zeit $= \frac{2\,c}{p}$, so ist der Raum Null, es ist also der Körper nach seinem Ausgangspunkt zurückgekehrt; ist endlich die Zeit noch größer als $\frac{2\,c}{p}$, so ist $s$ negativ, d. h. es befindet sich der Körper vom Anfangspunkte aus auf der entgegengesetzten Seite.

Beispiel. Ein Körper, welcher mit 40 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene hinaufrollt, durch welche er eine Verzögerung von 8 Fuß pro Secunde erleidet, steigt nur $\frac{40}{8} = 5$ Secunden lang und $\frac{40^2}{2 \cdot 8} = 100$ Fuß hoch, rollt dann zurück, kommt nach 10 Secunden mit 40 Fuß Geschwindigkeit in den

Anfangspunkt zurück und gelangt nach 12 Secunden schon um $40 . 12 - 4 . 12^2$ oder $- (40 . 2 + 4 . 2^2) = 96$ Fuß unter den Anfangspunkt, wenn sich die Ebene auch abwärts fort erstreckt.

**Freier Fall der Körper.** Der freie oder senkrechte Fall der Körper im luftleeren Raume (franz. mouvement vertical des corps pesants; engl. vertical motion of bodies) giebt das wichtigste Beispiel der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Die durch die Schwerkraft (franz. gravité; engl. gravity) erzeugte Acceleration dieser Bewegung bezeichnet man durch den Buchstaben $g$, und hat den mittleren Werth von §. 15

9,81 Meter,
30,20 pariser Fuß,
32,20 englischen Fuß,
31,03 wiener Fuß,
$31^1/_4 = 31,25$ preußischen Fuß und
32,7 badischen oder Meterfuß.

Wenn man einen dieser Werthe statt $g$ in die gefundenen Formeln:

$$v = g t,\ s = \frac{g t^2}{2} \text{ und } s = \frac{v^2}{2 g},\ v = \sqrt{2 g s}$$

einführt, so kann man alle Fragen, welche sich in Ansehung des freien Falles der Körper vorlegen lassen, beantworten. Für das Metermaaß ist:

$$v = 9,81 \,.\, t = 4,429 \sqrt{s},$$
$$s = 4,905\, t^2 = 0,0510\, v^2 \text{ und}$$
$$t = 0,1019\, v = 0,4515 \sqrt{s};$$

dagegen für das preußische Fußmaaß:

$$v = 31,25 \,.\, t = 7,906 \sqrt{s};$$
$$s = 15,625 \,.\, t^2 = 0,016\, v^2 \text{ und}$$
$$t = 0,032\, v = 0,253 \sqrt{s}.$$

Beispiele. 1) Ein Körper erlangt beim ungehinderten Fallen in 4 Secunden die Geschwindigkeit $v = 31,25 \,.\, 4 = 125$ Fuß und durchläuft in dieser Zeit den Weg $s = 15,625 \,.\, 4^2 = 250$ Fuß. 2) Ein von der Höhe $s = 9$ Fuß herabgefallener Körper hat die Geschwindigkeit $v = 7,906 \,.\, \sqrt{9} = 23,72$ Fuß. 3) Ein mit 10 Fuß Geschwindigkeit vertical emporgeworfener Körper steigt auf die Höhe $s = 0,016 \,.\, 10^2 = 1,6$ Fuß und braucht dazu die Zeit:

$$t = 0,032 \,.\, 10 = 0,32$$

oder ungefähr $^1/_3$ Secunde.

Wie sich beim freien Fall der Körper die Bewegungsverhältnisse im Laufe der Zeit gestalten, wird durch folgende Tabelle vor Augen geführt: §. 16

| Zeit in Secunden. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Geschwindigkeit. | 0 | $1g$ | $2g$ | $3g$ | $4g$ | $5g$ | $6g$ | $7g$ | $8g$ | $9g$ | $10g$ |
| Weg. | 0 | $1\frac{g}{2}$ | $4\frac{g}{2}$ | $9\frac{g}{2}$ | $16\frac{g}{2}$ | $25\frac{g}{2}$ | $36\frac{g}{2}$ | $49\frac{g}{2}$ | $64\frac{g}{2}$ | $81\frac{g}{2}$ | $100\frac{g}{2}$ |
| Differenzen | 0 | $1\frac{g}{2}$ | $3\frac{g}{2}$ | $5\frac{g}{2}$ | $7\frac{g}{2}$ | $9\frac{g}{2}$ | $11\frac{g}{2}$ | $13\frac{g}{2}$ | $15\frac{g}{2}$ | $17\frac{g}{2}$ | $19\frac{g}{2}$ |

Die letzte Horizontalcolumne dieser Tafel giebt die Wege an, welche der frei fallende Körper in den einzelnen Secunden durchläuft. Man sieht, daß sich diese Wege wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. zu einander verhalten, während die Zeiten und Geschwindigkeiten wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w., und die Fallräume wie deren Quadrate 1, 4, 9, 16 u. s. w. wachsen. Hiernach ist z. B. die Geschwindigkeit nach 6 Secunden, $6g = 187,5$ Fuß, d. h. der Körper würde, wenn er von dieser Zeit an gleichförmig fortginge, etwa auf einer ihm keine Hindernisse darbietenden Horizontalebene seine Bewegung fortsetzte, in jeder Secunde den Weg $6g = 187,5$ Fuß durchlaufen. Diesen Raum durchläuft er im Laufe der folgenden oder siebenten Secunde aber nicht wirklich, sondern derselbe beträgt nach der letzten Columne genau $13 \,.\, \frac{g}{2} = 13 \,.\, 15,625 = 203,125$ Fuß; in der achten Secunde ist er sogar $15 \,.\, \frac{g}{2} = 15 \,.\, 15,625 = 234,375$ Fuß u. s. w.

Anmerkung. Aeltere deutsche Schriftsteller bezeichnen den Raum von 15,625 Fuß, welcher vom frei fallenden Körper in der ersten Secunde durchlaufen wird, durch $g$ und nennen ihn wohl auch Beschleunigung der Schwere. Sie haben dann für den freien Fall der Körper die Formeln:

$$v = 2gt = 2\sqrt{gs},$$

$$s = gt^2 = \frac{v^2}{4g},$$

$$t = \frac{v}{2g} = \sqrt{\frac{s}{g}}.$$

Dieser nur in Deutschland vorkommende Gebrauch fängt nun auch an allmälig zu verschwinden, und wegen der oft vorkommenden Mißverständnisse und dadurch herbeigeführten Fehler ist dies auch sehr zu wünschen.

**Der freie Fall mit einer Anfangsgeschwindigkeit.** Geht der freie Fall der Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit (franz. vitesse initial; engl. initial-velocity) $c$ vor sich, so nehmen die Formeln folgende Formen an: §. 17

$$v = c + gt = c + 31{,}25\, t \text{ Fuß} = c + 9{,}81 \text{ Meter},$$

auch:

$$v = \sqrt{c^2 + 2gs} = \sqrt{c^2 + 62{,}5\, s} \text{ Fuß} = \sqrt{c^2 + 19{,}62} \text{ Meter}$$

$$s = ct + \frac{g}{2} t^2 = ct + 15{,}625\, t^2 \text{ Fuß} = ct + 4{,}905 \text{ Meter},$$

auch:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2g} = 0{,}016\, (v^2 - c^2) \text{ Fuß} = 0{,}1019\, (v^2 - c^2).$$

Wird hingegen der Körper mit der Geschwindigkeit $c$ senkrecht in die Höhe geworfen, so hat man:

$$v = c - gt = c - 31{,}25\, t \text{ Fuß} = c - 9{,}81 \text{ Meter},$$

auch:

$$v = \sqrt{c^2 - 2gs} = \sqrt{c^2 - 62{,}5\, s} \text{ Fuß} = \sqrt{c^2 - 19{,}62} \text{ Meter},$$

$$s = ct - \frac{g}{2} t^2 = ct - 15{,}625\, t^2 \text{ Fuß} = ct - 4{,}905 \text{ Meter},$$

auch:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2g} = 0{,}016\, (c^2 - v^2) \text{ Fuß} = 0{,}1019\, (c^2 - v^2) \text{ Meter}.$$

Betrachtet man eine gegebene Geschwindigkeit $c$ als eine durch den freien Fall erlangte Endgeschwindigkeit, so nennt man den entsprechenden Fallraum

$$\frac{c^2}{2g} = 0{,}016\,.\, c^2 \text{ Fuß} = 0{,}1019\, c^2 \text{ Meter}.$$

die Geschwindigkeitshöhe (franz. hauteur de la vitesse; engl. height of velocity). Durch Einführung derselben lassen sich einige der obigen Formeln einfacher ausdrücken. Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ von der Anfangsgeschwindigkeit $c$ durch $k$ und die der Endgeschwindigkeit $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ durch $h$, so hat man für fallende Körper:

$$h = k + s \text{ und } s = h - k,$$

und für steigende:

$$h = k - s \text{ und } s = k - h.$$

Es ist also der Fall- oder Steigraum stets gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Beispiel. Sind bei einer gleichförmig veränderten Geschwindigkeit die Geschwindigkeiten 5 Fuß und 11 Fuß, also die Geschwindigkeitshöhen $= 0{,}016\,.\,5^2$

$= 0{,}4$ Fuß und $0{,}016 \,.\, 11^2 = 1{,}936$ Fuß, so ist der Raum, welcher während des Ueberganges aus der einen Geschwindigkeit in die andere zurückgelegt wird: $s = 1{,}936 - 0{,}400 = 1{,}536$ Fuß.

§. 18 **Das senkrechte Emporsteigen.** Setzt man in der Formel $s = \frac{c^2 - v^2}{2g}$ für das senkrechte Emporsteigen der Körper die Endgeschwindigkeit $v = 0$, so erhält man die größte Steighöhe:

$$s = \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist folglich die der Anfangsgeschwindigkeit $c$ entsprechende **größte Steighöhe** gleich der der Endgeschwindigkeit $c$ zukommenden **Fallhöhe** $k$, und also auch $c = \sqrt{2gk}$ nicht allein die Endgeschwindigkeit für die freie Fallhöhe $k$, sondern auch die Anfangsgeschwindigkeit für die größte Steighöhe $k$, und es folgt daher noch, daß der senkrecht in die Höhe geworfene Körper an jeder Stelle diejenige Geschwindigkeit hat, die er, jedoch in umgekehrter Richtung, haben würde, wenn er von der noch übrigen Steighöhe bis zu dieser Stelle frei herabgefallen wäre, die er also auch beim darauf folgenden Niederfallen dort wirklich besitzt.

Beispiel. Ein Körper wird mit 15 Fuß Geschwindigkeit senkrecht emporgeworfen und trifft bei 2 Fuß Steighöhe auf ein elastisches Hinderniß, welches ihn momentan mit derselben Geschwindigkeit zurückwirft, mit welcher er aufschlägt. Wie groß ist nun diese Geschwindigkeit und wie groß ist die Zeit zum Steigen und Zurückfallen? Der Anfangsgeschwindigkeit $c = 15$ Fuß entspricht die Steighöhe $k = 3{,}60$ Fuß, die Geschwindigkeitshöhe für den Augenblick des Anstoßes ist nun $h = 3{,}60 - 2{,}00 = 1{,}60$, und folglich diese Geschwindigkeit selbst $= 7{,}906 \sqrt{1{,}6} = 10$ Fuß. Die Zeit zum Steigen auf die ganze Höhe (3,6 Fuß) wäre: $t = 0{,}032 \,.\, c = 0{,}032 \,.\, 15 = 0{,}480$ Secunden, die Zeit zum Steigen auf die Höhe 1,6 Fuß aber: $t_1 = 0{,}032 \,.\, 10 = 0{,}320$ Secunden, es bleibt diesemnach die Zeit zum Steigen auf die Höhe von 2 Fuß oder die Zeit vom Anfang bis zum Anstoß: $t - t_1 = 0{,}480 - 0{,}320 = 0{,}160$ Secunden, also endlich die ganze Zeit zum Steigen und Fallen $= 2 \,.\, 0{,}160$ $= 0{,}320$ Secunden. Diese ist also nur der $\frac{0{,}320}{0{,}960}$ste = 3te Theil von der Zeit, welche zum Aufsteigen und Zurückfallen nöthig wäre, wenn der Körper unaufgehalten stiege und fiele. Dieser Fall findet beim Schmieden des glühenden Eisens seine Anwendung, weil es hier wegen des allmäligen Abkühlens darauf ankommt, in einer kurzen Zeit so viel Hammerschläge wie möglich erfolgen zu lassen. Wenn der Hammer durch eine elastische Prallvorrichtung zurückgeworfen wird, so kann er unter den im Beispiele zum Grunde liegenden Verhältnissen in derselben Zeit ziemlich dreimal so viel Schläge thun als beim ungehinderten Aufsteigen.

Anmerkung 1. Das Umsetzen der Geschwindigkeit in Geschwindigkeitshöhe sowie auch das Umsetzen der letzteren in die erstere, ist ein in der praktischen Mechanik und namentlich in der Hydraulik sehr oft vorkommendes Geschäft. Eine Tafel, wodurch dasselbe in ein bloßes Nachschlagen verwandelt wird, leistet des-

halb dem Praktiker sehr nützliche Dienste. Eine sich auf das preußische Fußmaaß beziehende Tabelle dieser Art enthält der »Ingenieur« Seite 326 bis 329.

Anmerkung 2. Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln sind allerdings nur für den freien Fall im luftleeren Raume streng richtig; sie lassen sich jedoch auch beim freien Fall in der Luft mit einer noch erträglichen Genauigkeit gebrauchen, wenn die fallenden Körper in Beziehung auf ihr Volumen ein großes Gewicht haben, und wenn die Geschwindigkeiten nicht sehr groß ausfallen. Uebrigens werden sie auch noch unter anderen Umständen und Verhältnissen in vielen anderen Fällen gebraucht, wie sich in der Folge zeigen wird.

§. 19 **Ungleichförmige Bewegung überhaupt.** Die Formel $s = ct$ (§. 5) für die gleichförmige Bewegung gilt auch für jede ungleichförmige Bewegung, wenn man statt $t$ ein Zeitelement oder unendlich kleines Zeittheilchen $\tau$, und statt $s$ das innerhalb dieses Zeittheilchens zurückgelegte Raumelement $\sigma$ setzt, da anzunehmen ist, daß innerhalb eines Augenblickes die Geschwindigkeit $c$, welche hier durch $v$ bezeichnet werden soll, sich nicht ändert, also die Bewegung gleichförmig bleibt.

Man hat demnach für jede ungleichförmige Bewegung:

$$\text{I.)} \quad \sigma = v\tau, \text{ sowie } v = \frac{\sigma}{\tau} \text{ (Vergl. §. 10).}$$

Es ist also die Geschwindigkeit ($v$) für jeden Augenblick durch den Quotienten aus dem Raum- und aus dem Zeitelemente bestimmt.

Ebenso ist die Formel $v = pt$ (§. 11) für die gleichförmig beschleunigte Bewegung auch für jede ungleichförmige Bewegung überhaupt giltig, wenn mann statt $t$ und $v$ das Zeitelement $\tau$ und den innerhalb desselben erlangten unendlich kleinen Geschwindigkeitszuwachs $\varkappa$ substituirt, da sich die Beschleunigung $p$ innerhalb eines Augenblickes $\tau$ nicht angebbar verändert, also die Bewegung während desselben als gleichförmig beschleunigt angesehen werden kann.

Hiernach hat man für alle Bewegungen:

$$\text{II.)} \quad \varkappa = p\tau, \text{ sowie } p = \frac{\varkappa}{\tau}.$$

Es ist also die Acceleration ($p$) für jeden Augenblick der Bewegung gleich dem Quotienten aus dem Geschwindigkeits- und dem entsprechenden Zeitelemente.

Setzt man die ganze Bewegungszeit $t = n\tau$, und die Geschwindigkeiten in den einzelnen Zeittheilen $\tau$, der Reihe nach $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$, so sind die entsprechenden Wegelemente $\sigma_1 = v_1\tau$, $\sigma_2 = v_2\tau$, $\sigma_3 = v_3\tau \ldots$, $\sigma_n = v_n\tau$; und es ist daher der ganze in der Zeit $t$ zurückgelegte Weg

$$s = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)\tau = \left(\frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}\right) n\tau, \text{ d. i.:}$$

$$\text{I*)} \quad s = \left(\frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}\right) t = vt, \text{ wenn}$$

$v = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$, die mittlere Geschwindigkeit bei Zurücklegung des Weges $s$ bezeichnet.

Ebenso ist, wenn $c$ die Anfangs- und $v$ die Endgeschwindigkeit bezeichnet, und $p_1, p_2 \ldots p_n$ die Accelerationen in den stetig auf einander folgenden gleichen Zeitelementen $\tau$ sind,

$$v - c = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\tau = \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right) n\tau, \text{ d. i.:}$$

$$\text{II*)} \quad v - c = \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right) t = p\,t, \text{ wenn}$$

$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}$ die mittlere Acceleration bezeichnet.

Durch Verbindung der Formeln I. und II. erhält man folgende nicht minder wichtige Gleichung:

$$\text{III.)} \quad v\varkappa = p\sigma.$$

Nimmt bei Durchlaufung des Weges $s = n\sigma$, die Acceleration nach und nach die Werthe $p_1, p_2, \ldots p_n$ an, so ist die Summe der Producte $p\sigma$,

$$= (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\sigma = \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p}{n}\right) n\sigma$$

$$= \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right) s = p\,s,$$

wenn $p$ die mittlere Acceleration bezeichnet. Und geht die Anfangsgeschwindigkeit $c$ durch wiederholtes Wachsen um $\varkappa = \frac{v - c}{n}$ in die Endgeschwindigkeit $v$ über, so ist die Summe der Producte $v\varkappa$:

$$c\varkappa + (c + k)\varkappa + \cdots + (v - k)\varkappa + v\varkappa = [c + (c + \varkappa) + \cdots + (v - \varkappa) + v]\varkappa$$

$$= (v + c)\frac{n\varkappa}{2} = \frac{(v + c)(v - c)}{2} = \frac{v^2 - c^2}{2}, \text{ und daher zu setzen:}$$

$$\text{III*)} \quad \frac{v^2 - c^2}{2} = p\,s, \text{ oder } s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \text{ (vergl. IV. §. 13).}$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich die vielfachsten Aufgaben der Phoronomie und Mechanik lösen.

Auch ist die Zeit, in welcher der Raum $s = n\sigma$ mit der veränderlichen Geschwindigkeit $v_1, v_2, \cdots v_n$ zurückgelegt wird,

$$\text{IV.)} \quad t = \sigma\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots \frac{1}{v_n}\right) = \frac{s}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{s}{v},$$

wenn der Werth $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{v}$ gesetzt, also dessen Reciproke $v$ als die mittlere Geschwindigkeit angesehen wird.

Beispiel. Wenn sich ein Körper nach dem Gesetze $v = a t^2$ bewegt, so ist $v + \varkappa = a(t+\tau)^2 = a(t^2 + 2t\tau + \tau^2)$, also $\varkappa = a\tau(2t+\tau)$, folglich $p = \frac{\varkappa}{\tau} = 2at$.

Die Geschwindigkeiten des Körpers am Ende der Zeiten $\tau, 2\tau, 3\tau \ldots n\tau$ sind:

$$a\tau^2, a(2\tau)^2, a(3\tau)^2 \ldots a(n\tau)^2,$$

und es folgt daher der durchlaufene Weg nach $t = n\tau$ Secunden:

$$s = [a\tau^2 + a(2\tau)^2 + \ldots a(n\tau)^2]\,\tau = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)\,a\tau^3,$$

oder da nach Artikel 15, IV., der analytischen Hülfslehren $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3}$ ist:

$$s = \frac{n^3}{3} a\tau^3 = \frac{a}{3}(n\tau)^3 = \frac{a t^3}{3}.$$

**Phoronometrische Differenzial- und Integralformeln.** Die (§. 20) allgemeinen Bewegungsformeln, welche im vorstehenden Paragraphen entwickelt worden sind, nehmen im Gewande der Differenzial- und Integralrechnung, wo man das Zeitelement $\tau$ durch $\partial t$, das Wegelement $\sigma$ durch $\partial s$ und das Geschwindigkeitselement $\varkappa$ durch $\partial v$ bezeichnet, folgende Formeln an:

I.) $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, oder $\partial s = v\,\partial t$, daher $s = \int v\,\partial t$, sowie $t = \int \frac{\partial s}{v}$.

II.) $p = \frac{\partial v}{\partial t}$, oder $\partial v = p\,\partial t$, daher $v = \int p\,\partial t$, sowie $t = \int \frac{\partial v}{p}$.

III.) $v\,\partial v = p\,\partial s$, oder $s = \int \frac{v\,\partial v}{p}$, sowie $\frac{v^2 - c^2}{2} = \int p\,\partial s$, wenn $c$ die Anfangs- und $v$ die Endgeschwindigkeit bei Durchlaufung des Weges $s$ bezeichnet.

Es ist also hiernach die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate gleich dem doppelten Integrale von dem Producte aus der Acceleration und dem Elemente $\partial s$, oder gleich dem doppelten Producte aus der mittleren Acceleration und dem Raume, welcher während des Ueberganges der Geschwindigkeit aus $c$ in $v$ zurückgelegt wird.

Der Lehre vom Größten und Kleinsten zufolge hat der Raum ein Maximum, also die Bewegung ihre größte Extension erlangt, wenn:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v = \text{Null}$$

ist, und ist die Geschwindigkeit am größten oder kleinsten für:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p = \text{Null}.$$

Die vorstehenden Formeln bilden die Grundlage der höhern Phoronometrie und Mechanik.

Beispiele. 1) Aus der gegebenen Gleichung $s = 2 + 3t + t^2$ für den Raum, folgt durch Differenziiren für die Geschwindigkeit die Gleichung $v = 3 + 2t$, und für die Acceleration $p = 2$; es ist also die letztere constant, und die Bewegung gleichförmig beschleunigt. Für $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Secunden, hat man aber

$v = 3, 5, 7, 9 \ldots$ (Fuß), und
$s = 2, 6, 12, 20 \ldots$ (Fuß).

2) Aus der Formel $v = 10 + 3t - t^2$ für die Geschwindigkeit folgt durch Integriren die Gleichung $s = \int 10\,dt + \int 3t\,dt - \int t^2 dt = 10t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{t^3}{3}$, dagegen durch Differenziiren, die Formel $p = 3 - 2t$.

Hiernach ist für $3 - 2t = 0$, d. i. für $t = \frac{3}{2}$ Secunden, die Acceleration Null und die Geschwindigkeit ein Maximum ($v = 12\frac{1}{4}$), und für $10 + 3t - t^2 = 0$, d. i. $t = \frac{3}{2} + \sqrt{10 + \frac{9}{4}} = \frac{3+7}{2} = 5$ Secunden, die Geschwindigkeit Null und der Raum ein Maximum.

Für $t =$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Secunden hat man
$p =$ 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7, — 9 Fuß,
$v =$ 10, 12, 12, 10, 6, 0, — 8 Fuß,
$s =$ 0, $11\frac{1}{6}$, $23\frac{1}{3}$, $34\frac{1}{2}$, $42\frac{2}{3}$, $45\frac{5}{6}$, 42 Fuß.

3) Für das Bewegungsgesetz $p = -\mu s$, wo $\mu$ einen constanten Coefficienten bezeichnet, hat man:

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = \int p\,\partial s = -\mu \int s\,\partial s = -\frac{\mu s^2}{2}, \text{ oder } v^2 = c^2 - \mu s^2; \text{ wonach}$$

$$v = \sqrt{c^2 - \mu s^2} \text{ und } s = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{\mu}} \text{ folgt.}$$

Ferner ist $\partial t = \frac{\partial s}{v} = \frac{\partial s}{\sqrt{c^2 - \mu s^2}} = \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\sqrt{1 - \left(\frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right)^2}}$

$$= \frac{\partial\left(\frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right)}{\sqrt{\mu}\sqrt{1 - \left(\frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right)^2}} = \frac{\partial u}{\sqrt{\mu}\sqrt{1 - u^2}},$$

wenn $\frac{s\sqrt{\mu}}{c} = u$ gesetzt wird; und es folgt (s. Art. 26. V. der analyt. Hülfslehren)

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, arc.(sin. = u) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, arc.\left(sin. = \frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right), \text{ und}$$

$$s = \frac{c}{\sqrt{\mu}} sin.(t\sqrt{\mu}), \text{ sowie}$$

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = c\,cos.(t\sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = -c\sqrt{\mu}\; sin.(t\sqrt{\mu}).$$

Anfangs, also für $t = 0$, ist $s = 0$, $v = c$ und $p = 0$, später für

$t\sqrt{\mu} = \frac{\pi}{2}$, oder $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$ ist $s = \frac{c}{\sqrt{\mu}}$, $v = 0$ und $p = -c\sqrt{\mu}$, ferner für

$t\sqrt{\mu} = \pi$, oder $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$, $s = 0$, $v = -c$ und $p = 0$, ebenso für

$t\sqrt{\mu} = {}^3/_2\pi$, oder $t = \frac{3\pi}{2\sqrt{\mu}}$, $s = -\frac{c}{\sqrt{\mu}}$, $v = 0$ und $p = c\sqrt{\mu}$, und für

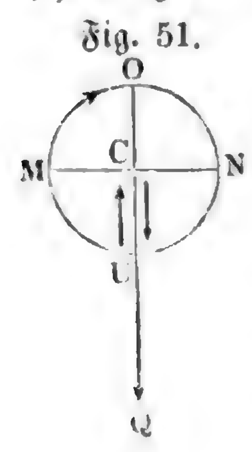
$t\sqrt{\mu} = 2\pi$, oder $t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, wieder $s = 0$, $v = c$ und $p = 0$.

Der bewegte Punkt hat folglich eine schwingende Bewegung auf beiden Seiten des festen Anfangspunktes, zu welchem er jedes Mal nach Zurücklegung des Weges $s = \pm\frac{c}{\sqrt{\mu}}$, mit der von Null allmälig bis $v = +c$ wachsenden Geschwindigkeit zurückkehrt.

**Mittlere Geschwindigkeit.** Von der Geschwindigkeit $v = \frac{\sigma}{\tau}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)$ §. 21 für einen Augenblick oder während eines Zeitelementes ist $\tau$ ($\partial t$) diejenige Geschwindigkeit $c_1 = \frac{s}{t}$ verschieden, welche sich ergiebt, wenn man den Raum, welcher während einer gewissen Zeit, z. B. während einer Periode einer periodischen Bewegung durchlaufen wird, durch die Zeit selbst dividirt. Man nennt dieselbe die mittlere Geschwindigkeit (franz. vitesse moyenne; engl. mean-velocity) und kann sie auch als diejenige Geschwindigkeit ansehen, die ein Körper haben müßte, um in einer gegebenen Zeit ($t$) einen gewissen Raum ($s$) gleichförmig zurückzulegen, welcher in Wirklichkeit in eben dieser Zeit ungleichförmig durchlaufen wird. So ist z. B. bei der gleichförmig veränderten Bewegung die mittlere Geschwindigkeit gleich der halben Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit; denn es ist nach §. 13 der Raum gleich dieser Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ multiplicirt durch die Zeit ($t$).

Allgemein ist (nach §. 19) die mittlere Geschwindigkeit $c_1 = \frac{v_1 + v_2 + \cdots v_n}{n}$, wenn $v_1, v_2, \cdots v_n$ eine gleichen und sehr kleinen Zeitintervallen entsprechende Geschwindigkeitsreihe bezeichnet.

Fig. 51.



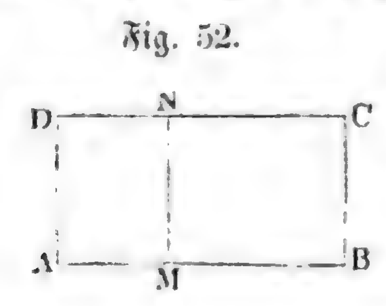

Beispiel. Während eine Kurbel gleichförmig im Kreise $UMON$, Fig. 51, herumgedreht wird, geht die daran hängende Last $Q$, z. B. der Kolben einer Luft- oder Wasserpumpe u. s. w., ganz ungleichförmig auf und nieder; die Geschwindigkeit dieser Last ist im tiefsten und höchsten Punkte $U$ und $O$ am kleinsten, nämlich Null, auf der halben Höhe, in $M$ und $N$, aber am größten, nämlich der Kurbelgeschwindigkeit gleich. Innerhalb einer halben Umdrehung ist die mittlere Geschwindigkeit gleich der ganzen

Steighöhe, d. i. dem Durchmesser $UO$ des Kreises, in welchem die Kurbel herumgeht, dividirt durch die Zeit einer halben Umdrehung. Setzen wir den Halbmesser $CU = CO$ des Warzenkreises $= r$, also jenen Durchmesser $= 2r$, und diese Zeit $= t$, so folgt demnach die mittlere Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2r}{t}$. Die Kurbel selbst macht in dieser Zeit den Halbkreis $\pi r$; es ist daher ihre Geschwindigkeit $c = \frac{\pi r}{t}$ und folglich die mittlere Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2}{\pi} c = \frac{2}{3,141} c = 0{,}6366$ mal so groß als die unveränderliche Geschwindigkeit $c$ der Kurbel.

§. 22 **Graphische Darstellung der Bewegungsformeln.** Die im Vorigen gefundenen Bewegungsgesetze lassen sich auch in geometrischen Figuren ausdrücken oder, wie man sagt, *graphisch* darstellen. Graphische Darstellungen überhaupt erleichtern die Auffassung, unterstützen das Gedächtniß, schützen wohl auch gegen Fehler und dienen sogar zuweilen zur unmittelbaren Ausmittelung der gesuchten Größen; sie sind deshalb der Mechanik von großem Nutzen.

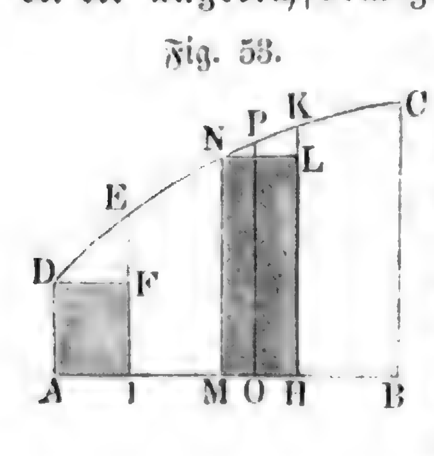
Bei der *gleichförmigen Bewegung* ist der Raum ($s$) das Product ($ct$) aus Geschwindigkeit und Zeit, und von einem Rechtecke der Geometrie ist der Flächenraum ein Product aus Höhe und Grundlinie; man kann daher auch den gleichförmig durchlaufenen Raum $s$ durch ein Rechteck $ABCD$, Fig. 52, darstellen, dessen Grundlinie $AB$ die Zeit ($t$) und dessen Höhe $AD = BC$ die Geschwindigkeit ($c$) ist, vorausgesetzt, daß die Zeit mit der Geschwindigkeit in einerlei Längeneinheiten ausgedrückt, daß also durch eine und dieselbe Linie die Zeitsecunde und der Fuß zugleich repräsentirt werden.

Fig. 52.



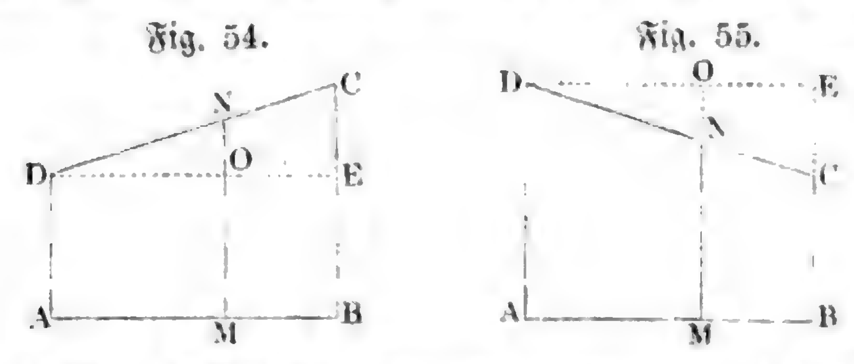

§. 23 Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit ($MN$) zu jeder anderen Zeit ($AM$) der Bewegung eine und dieselbe ist, fällt dieselbe bei der *ungleichförmigen Bewegung* in jedem Augenblicke anders aus; es läßt sich deshalb diese Bewegung nur durch ein Viereck $ABCD$, Fig. 53, darstellen, welches zur Grundlinie $AB$ die Zeit ($t$) und zur übrigen Begrenzung drei andere Linien $AD$, $BC$ und $CD$ hat, von denen die ersten beiden der Anfangs- und Endgeschwindigkeit gleich sind, die letzte aber durch die Endpunkte ($N$) der verschiedenen Geschwindigkeiten in den Zwischenpunkten ($M$) bestimmt wird. Nach den ver-

Fig. 53.



schiedenen Arten von ungleichförmigen Bewegungen ist die vierte Linie $CD$ entweder gerade oder krumm; ferner von Anfang aus aufsteigend oder niedersteigend, endlich entweder gegen die Grundlinie concav (hohl) oder convex (erhaben). In jedem Falle ist der Flächeninhalt dieser Figur dem ungleichförmig durchlaufenen Raume ($s$) gleichzusetzen; denn jener Flächenraum $ABCD$, Fig. 53, läßt sich durch Höhenlinien in lauter schmale, als Rechtecke anzusehende Streifen wie $MOPN$ zerlegen, wovon jeder ein Product aus einem Theile ($MO$) der Grundlinie und aus der diesem Theile entsprechenden Höhe ($MN$) oder ($OP$) ist, und ebenso läßt sich der in einer gewissen Zeit durchlaufene Raum aus Theilchen zusammensetzen, wovon jedes ein Product aus einem Zeittheilchen und der während desselben stattfindenden Geschwindigkeit ist. Die Figur führt auch die Differenz zwischen dem Geschwindigkeitsmaß und dem in der folgenden Zeiteinheit wirklich zurückgelegten Weg vor Augen. Das Rechteck $ML$ über der Grundlinie $MH =$ Eins $(1) = v \,.\, 1$ ist das Maß der Geschwindigkeit $MN = v$, wogegen die Fläche $MK$ über derselben Grundlinie den wirklich durchlaufenen Raum darstellt. Ebenso ist das Rechteck $AF$ über $\overline{A1} =$ Eins, das Maß der Anfangsgeschwindigkeit $AD = c$, und die Fläche $AE$ der in der ersten Secunde wirklich zurückgelegte Weg.

§. 24. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die Zu- oder Abnahme $v - c$ der Geschwindigkeit ($= pt$, §. 13) proportional der Zeit ($t$). Ziehen wir nun in Fig. 54 und Fig. 55 die Linie $DE$ der Grundlinie $AB$ parallel, und schneiden wir dadurch von den die Geschwindigkeiten vorstellen-




den Linien $BC$ und $MN$ die der Anfangsgeschwindigkeit $AD$ gleichen Stücke $BE$ und $MO$ ab, so bleiben uns die Linien $CE$ und $NO$ als Geschwindigkeitszu- oder Geschwindigkeitsabnahmen übrig, für welche nach dem Obigen die Proportion:

$$NO : CE = DO : DE$$

gilt.

Eine solche Proportion bedingt, daß $N$ und so auch jeder Punkt der Linie $CD$, in der geraden Verbindungslinie zwischen $C$ und $D$ liegen, daß also jene, die verschiedenen Geschwindigkeiten ($MN$) begrenzende Linie $CD$ selbst, gerade sein muß.

Diesem zufolge läßt sich also der gleichförmig beschleunigt und gleichförmig verzögert durchlaufene Raum durch den Inhalt eines Trapezes $ABCD$ darstellen, das zur Höhe $AB$ die Zeit ($t$) und zu den (parallelen) Grundlinien $AD$ und $BC$ die Anfangs- und Endgeschwindigkeit hat. Auch ist damit die §. 13 gefundene Formel $s = \frac{c + v}{2} \cdot t$ in vollkommener Uebereinstimmung. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung steigt die vierte Seite $DC$ vom Anfangspunkte an aufwärts, und bei der gleichförmig verzögerten Bewegung läuft diese Linie abwärts. Bei der mit Null Geschwindigkeit anfangenden gleichförmig beschleunigten Bewegung geht das Trapez in ein Dreieck vom Inhalte $\frac{1}{2} BC \,.\, AB = \frac{1}{2} vt$ über.

§. 25 Die mittlere Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung ist der Quotient: Raum dividirt durch Zeit; sie giebt also mittelst Multiplication durch die Zeit, den Weg und läßt sich deshalb auch als die Höhe $AF = BE$ desjenigen Rechteckes $ABEF$, Fig. 56, ansehen, das zur Grundlinie $AB$ die Zeit $t$ hat und an Inhalt dem den zurückgelegten Weg oder Raum messenden Vierecke $ABCND$ gleich ist. Die mittlere Geschwindigkeit ergiebt sich demnach auch durch Verwandlung des Viereckes $ABCND$ in ein gleich langes Recheck $ABEF$. Ihre Bestimmung ist besonders bei periodischen Bewegungen, welche fast bei allen Maschinen vorkommen, von Wichtigkeit. Das Gesetz dieser Bewegungen wird durch eine Schlangenlinie $CDEFG$, Fig. 57, repräsentirt. Schneidet die mit $AB$

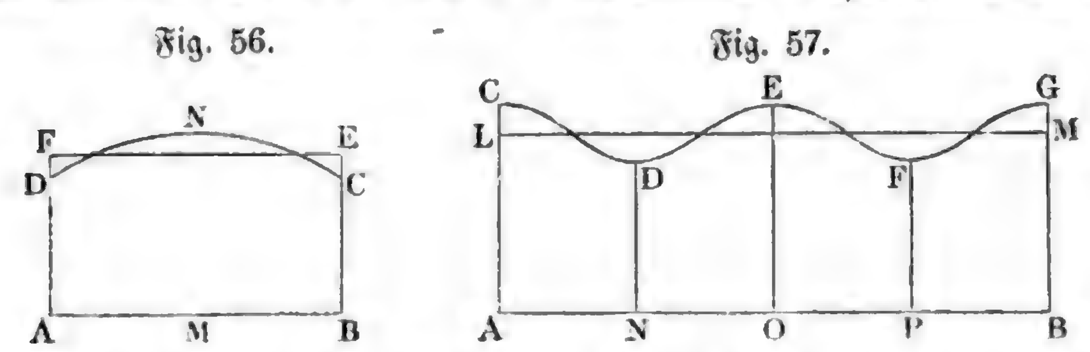
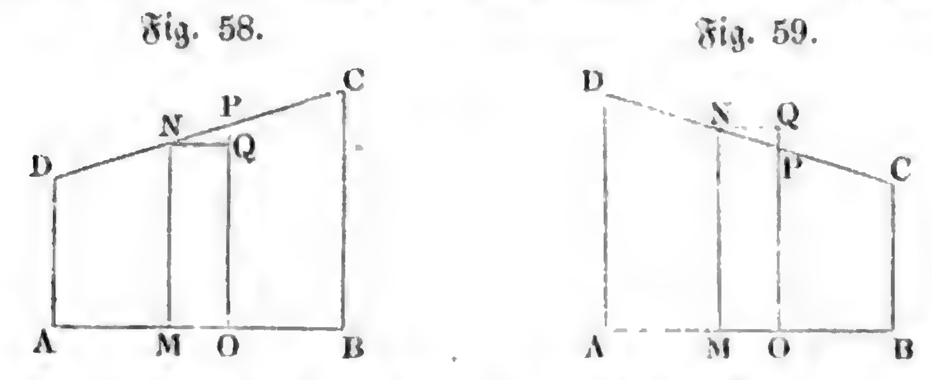


Fig. 56. Fig. 57.

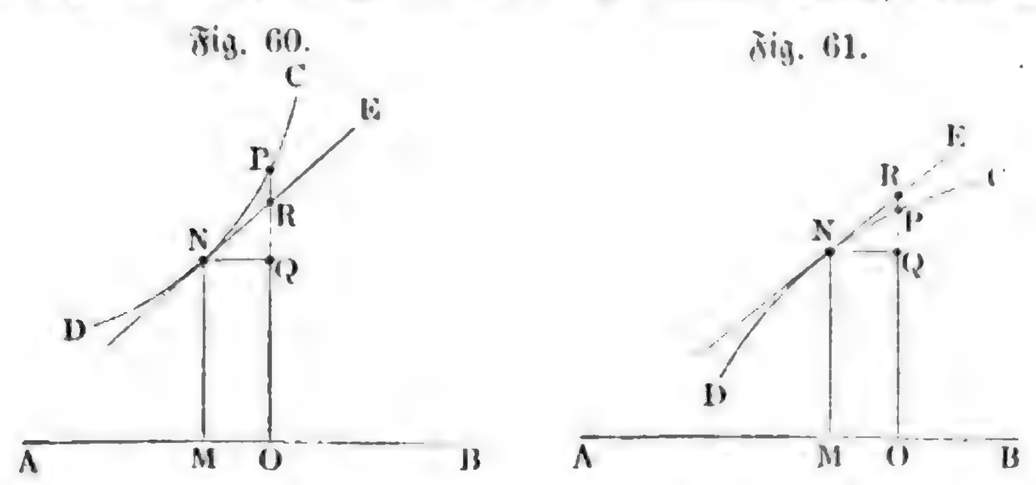
parallel laufende Gerade $LM$ denselben Raum wie die Schlangenlinie ab, ist also $LM$ gleichsam die Axe, um welche sich $CDEFG$ windet, so ist der Abstand $AL = BM$ zwischen beiden parallelen Linien $AB$ und $LM$ die mittlere Geschwindigkeit der periodischen Bewegung, dagegen $AC$, $OE$, $BG$ u. s. w. die größte und $ND$, $PF$ u. s. w. die kleinste Geschwindigkeit einer Periode $AO$, $OB$ u. s. w.

§. 26 Auch die Acceleration oder der in der Zeitsecunde erfolgte Zusatz an Geschwindigkeit läßt sich in der Figur leicht nachweisen. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist sie unveränderlich; sie ist deshalb die Differenz $PQ$, Fig. 58 und Fig. 59 zwischen zwei Geschwindigkeiten $OP$ und

$MN$, wovon die eine einer um eine Secunde ($MO$) größeren Zeit angehört als die andere. Ist die Bewegung ungleichförmig verändert, also die Ge-




schwindigkeitslinie $CD$ eine Curve, so ist für jeden Zeitpunkt ($M$) die Acceleration eine andere, und deshalb ist sie auch nicht die wirkliche Differenz $PQ$ zwischen den um eine Secunde $MO$ von einander abstehenden Geschwindigkeiten $OP$ und $MN = OQ$, Fig. 60 und 61, sondern sie ist die Zunahme $RQ$ der Geschwindigkeit $MN$, welche eintreten würde, wenn von dem




Augenblicke $M$ an die Bewegung in eine gleichförmig beschleunigte, also die krumme Geschwindigkeitslinie $NPC$ in eine gerade Linie $NE$ überginge. Nun ist aber die Tangente oder Berührungslinie $NE$ diejenige Gerade, in welche eine Curve $DN$ weiter fortgeht, wenn sie von einer gewissen Stelle ($N$) an ihre Richtung unverändert beibehält; es fällt demnach die neue Geschwindigkeitslinie mit der Tangente zusammen, es ist solchemnach auch die bis zu dieser Linie gehende Höhenlinie $OR$ die Geschwindigkeit, welche nach einer Secunde eintreten würde, wenn die Bewegung vom Anfang derselben an in eine gleichförmig beschleunigte übergegangen wäre, und daher die Differenz $RQ$ zwischen dieser Geschwindigkeit und der anfänglichen ($MN$) die Acceleration für den Augenblick, welcher dem Punkte $M$ in der Zeitlinie $AB$ entspricht.

Man kann natürlich auch die Zeiten und Accelérationen als die Coordinaten einer Curve ansehen, in welchem Falle natürlich die Geschwindigkeiten durch Flächenräume repräsentirt werden.

## Zweites Capitel.

# Zusammengesetzte Bewegung.

§. 27 **Zusammensetzung der Bewegungen.** Ein und derselbe Körper kann gleichzeitig zwei oder mehrere Bewegungen besitzen; jede (relative) Bewegung besteht ja aus der Bewegung innerhalb eines Raumes und aus der Bewegung dieses Raumes innerhalb oder in Beziehung auf einen zweiten Raum. So besitzt schon jeder Punkt auf der Erde zwei Bewegungen; denn er läuft täglich einmal um die Erdaxe und mit dieser zugleich jährlich einmal um die Sonne. Eine auf dem Schiffe gehende Person hat in Beziehung auf die Ufer zwei Bewegungen, ihre eigene und die des Schiffes; das Wasser, welches durch eine Boden- oder Seitenöffnung eines Gefäßes ausfließt, das auf einem Wagen fortgefahren wird, hat zwei Bewegungen, die Bewegung aus dem Gefäße und die Bewegung mit dem Gefäße u. s. w.

Man unterscheidet hiernach einfache und zusammengesetzte Bewegungen. Einfach (franz. und engl. simple) sind die geradlinigen Bewegungen, aus welchen andere gerad- oder krummlinige Bewegungen, die man aber deswegen zusammengesetzte (franz. composés; engl. composed) nennt, bestehen oder bestehend gedacht werden können.

Die Zusammensetzung mehrerer einfachen Bewegungen zu einer einzigen und die Zerlegung einer zusammengesetzten Bewegung in mehrere einfache werden im Folgenden abgehandelt.

§. 28 Erfolgen die einfachen Bewegungen in einer und derselben geraden Linie, so giebt die Summe oder Differenz derselben die resultirende zusammengesetzte Bewegung, ersteres, wenn die Bewegungen nach gleichen Richtungen vor sich gehen, letzteres, wenn ihre Richtungen entgegengesetzt sind. Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet sogleich ein, wenn man die gleichzeitigen Räume der einfachen Bewegungen zu einem einzigen vereinigt. Den gleichförmigen Bewegungen mit den Geschwindigkeiten $c_1$ und $c_2$ entsprechen die gleichzeitigen Räume $c_1 t$ und $c_2 t$; haben diese Bewegungen eine und dieselbe Richtung, so ist demnach der Raum nach $t$ Secunden:

$$s = c_1 t + c_2 t = (c_1 + c_2) t,$$

und folglich ist die resultirende Geschwindigkeit, mit welcher die zusammengesetzte Bewegung vor sich geht, die Summe der Geschwindigkeiten von den einfachen Bewegungen. Bei entgegengesetzten Richtungen beider Bewegungen ist:

$$s = c_1 t - c_2 t = (c_1 - c_2) t,$$

hier ist also die resultirende Geschwindigkeit der Differenz der einfachen Geschwindigkeiten gleich.

Beispiele. 1) An einer Person, welche sich mit 4 Fuß Geschwindigkeit auf dem Verdecke eines Schiffes in der Bewegungsrichtung desselben fortbewegt, während das Schiff selbst 6 Fuß Geschwindigkeit hat, scheinen die Gegenstände an den Ufern mit $4 + 6 = 10$ Fuß Geschwindigkeit vorbei zu gehen. 2) Das Wasser, welches aus der Seitenöffnung eines Gefäßes mit 25 Fuß Geschwindigkeit ausfließt, während es mit dem Gefäße zugleich in der entgegengesetzten Richtung mit 10 Fuß Geschwindigkeit fortgeht, hat in Beziehung auf die übrigen in Ruhe befindlichen Gegenstände nur $35 - 10 = 15$ Fuß Geschwindigkeit.

§. 29

Dieselben Verhältnisse finden auch bei den ungleichförmigen Bewegungen statt. Hat ein und derselbe Körper außer den Anfangsgeschwindigkeiten $c_1$ und $c_2$ noch die constanten Accelerationen $p_1$ und $p_2$, so sind die entsprechenden Räume $c_1 t$, $c_2 t$, $\frac{1}{2} p_1 t^2$, $\frac{1}{2} p_2 t^2$, und haben nun Geschwindigkeiten und Accelerationen eine gleiche Richtung, so ist der ganze Raum, welcher diesen einfachen Bewegungen entspricht:

$$s = (c_1 + c_2)\, t + (p_1 + p_2) \frac{t^2}{2}.$$

Setzt man nun $c_1 + c_2 = c$ und $p_1 + p_2 = p$, so erhält man

Fig. 62.




$s = ct + p \frac{t^2}{2}$, und es folgt hiernach, daß nicht allein durch die Summe der einfachen Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit, sondern auch durch die Summe der Accelerationen der einfachen Bewegungen die Acceleration der resultirenden oder zusammengesetzten Bewegung gegeben wird.

Beispiel. Ein Körper auf dem Monde erhält von der Mondmasse die Acceleration $p_1 = 5$ Fuß und von der Erde die Acceleration $p_2 = 0{,}01$ Fuß. Es fällt daher ein Körper $A$, Fig. 62, außerhalb des Mondes $M$ und der Erde $E$, mit 5,01 Fuß, und ein Körper $B$ innerhalb $M$ und $E$, mit 4,99 Fuß Beschleunigung dem Mittelpunkte des Mondes zu.

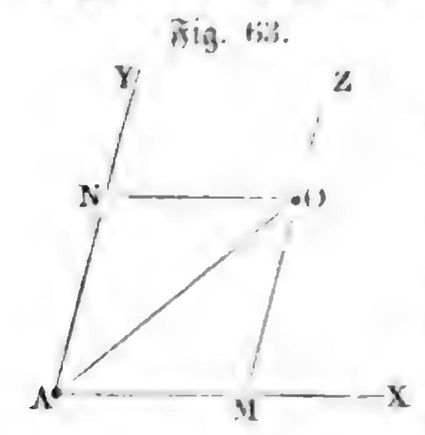
§. 30

**Parallelogramm der Bewegungen.** Hat ein Körper zwei in den Richtungen von einander abweichende Bewegungen zugleich, so nimmt er eine zwischen beiden inneliegende Bewegungsrichtung an, und sind diese Bewegungen ungleichartig, ist z. B. die eine gleichförmig und die andere gleichförmig beschleunigt, so ist die Richtung an jeder Stelle der Bewegung eine andere, die Bewegung selbst also eine krummlinige.

Man findet den Ort $O$, Fig. 63 (a. f. S.), welchen ein nach den Richtungen $AX$ und $AY$ zugleich bewegter Körper nach einer gewissen Zeit ($t$)

einnimmt, wenn man den vierten Eckpunkt ($O$) des Parallelogrammes $AMON$ aufsucht, das durch die gleichzeitigen Wege $AM = x$ und $AN = y$, sowie durch den Winkel $XAY$ gegeben ist, um welchen die Bewegungsrichtungen von einander abweichen. Von der Richtigkeit dieses Verfahrens wird man überzeugt, wenn man die Wege $x$ und $y$ als nicht auf einmal, sondern nach einander zurückgelegt annimmt. Vermöge der einen Bewegung durchläuft der Körper den Weg $AM = x$, und vermöge der anderen von $M$ aus in der Richtung $AY$, also in einer mit $AY$ parallelen Linie $MZ$, den Weg $AN = y$. Macht man nun $MO = AN$, so erhält man in $O$ den Ort des Körpers, welcher beiden Bewegungen $x$ und $y$ zugleich entspricht und, der Construction zufolge, der vierte Eckpunkt eines Parallelogrammes $AMON$ ist. Auch kann man sich vorstellen, daß der Raum $AM = x$ in einer Linie $AX$ zurückgelegt werde, die mit allen ihren Punkten zugleich in der Richtung $AY$ fortgeht, also auch $M$ mit $AY$ parallel fortführt und diesen Punkt den Weg $MO = AN = y$ beschreiben läßt.

Fig. 63.

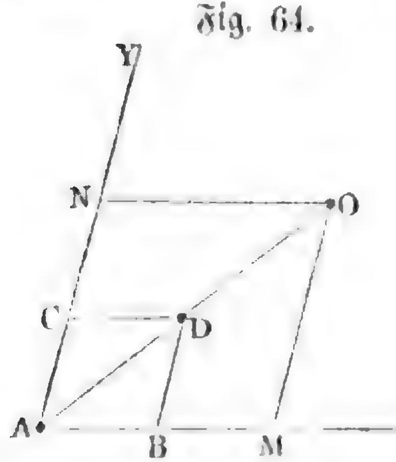



§. 31 **Parallelogramm der Geschwindigkeiten.** Erfolgen die beiden Bewegungen in den Richtungen $AX$ und $AY$ gleichförmig und mit den Geschwindigkeiten $c_1$ und $c_2$, so sind die Räume nach einer gewissen Zeit ($t$):

$$x = c_1 t \text{ und } y = c_2 t;$$

es ist also ihr Verhältniß $\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1}$ zu allen Zeiten dasselbe, eine Eigenthümlichkeit, die nur der geraden Linie $AO$, Fig. 64, zukommt. Es folgt also hieraus, daß die zusammengesetzte Bewegung in einer geraden Linie vor sich geht. Construirt man ferner aus den Geschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ das Parallelogramm $ABCD$, so giebt dessen vierter Eckpunkt den Ort $D$ an, wo sich der Körper am Ende einer Secunde befindet. Da aber die resultirende Bewegung eine geradlinige ist, so folgt, daß diese überhaupt in der Richtung der Diagonale des aus den Geschwindigkeiten construirten Parallelogrammes vor sich geht. Bezeichnet man nun den Weg $AO$, welcher in der Zeit ($t$) wirklich zurückgelegt wird, durch $s$, so hat man wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $AMO$ und $ABD$:

Fig. 64.



$\frac{s}{x} = \frac{AD}{AB}$, es folgt demnach dieser Weg:

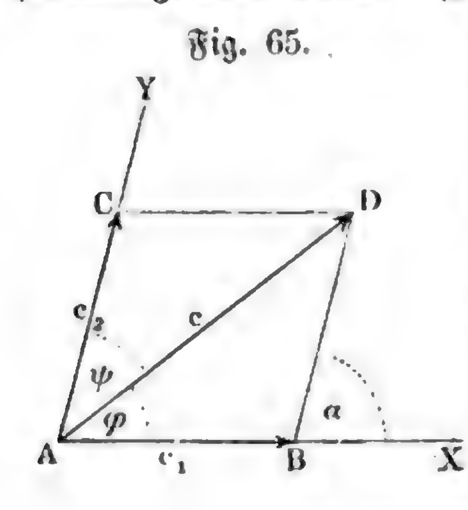
$$s = \frac{x . AD}{AB} = \frac{c_1 t . \overline{AD}}{c_1} = \overline{AD} . t.$$

Der letzten Gleichung zufolge ist der Weg in der Diagonale der Zeit ($t$) proportional, also die Bewegung selbst gleichförmig, ihre Geschwindigkeit $c$ gleich der Diagonale $AD$.

Es giebt also die Diagonale eines aus zwei Geschwindigkeiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gebildeten Parallelogrammes die Richtung und Größe derjenigen Geschwindigkeit an, mit welcher die resultirende Bewegung wirklich vor sich geht. Man nennt dieses Parallelogramm Parallelogramm der Geschwindigkeiten (franz. parallélogramme des vitesses; engl. parallelogram of velocities), die einfachen Geschwindigkeiten heißen auch wohl Componenten oder Seitengeschwindigkeiten (franz. composantes; engl. components) und die zusammengesetzte Geschwindigkeit die resultirende oder mittlere (franz. resultante; engl. resultant).

§. 32 Durch die Anwendung trigonometrischer Formeln läßt sich die Richtung und Größe der mittleren Geschwindigkeit auch rechnend finden. Die Auflösung von einem der gleichen Dreiecke, z. B. von $ABD$, aus denen das Parallelogramm $ABDC$ (Fig. 65) der Geschwindigkeiten besteht, giebt die mittlere Geschwindigkeit $AD = c$ aus den Seitengeschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ und aus dem von ihren Richtungen gebildeten Winkel $BAC = \alpha$ durch die Formel:

Fig. 65.




$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2 c_1 c_2 \cos. \alpha},$$

und den Winkel $BAD = \varphi$, den die mittlere Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit $c_1$ einschließt, durch die Formel:

$$\sin. \varphi = \frac{c_2 \sin. \alpha}{c} \text{ oder}$$

$$\tan g. \varphi = \frac{c_2 \sin. \alpha}{c_1 + c_2 \cos. \alpha} \text{ oder } \cot ang. \varphi = \cot ang. \alpha + \frac{c_2 \sin. \alpha}{c_1}.$$

Auch ist $\tan g. \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \tan g. \frac{\alpha}{2}.$

Sind die Geschwindigkeiten $c_1$ und $c_2$ einander gleich, ist also das Parallelogramm derselben ein Rhombus, so ergiebt sich in Folge der Rechtwinkeligkeit zwischen den Diagonalen einfacher:

$$c = 2 c_1 \cos. \tfrac{1}{2} \alpha \text{ und } \varphi = \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Schließen endlich die Geschwindigkeiten einen Rechtwinkel ein, so erhält man ebenfalls einfacher:

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ und } tang.\ \varphi = \frac{c_2}{c_1}.$$

Beispiele. 1) Das aus einem Gefäße oder aus einer Maschine ausfließende Wasser hat eine Geschwindigkeit $c_1 = 25$ Fuß, während sich das Gefäß selbst mit einer Geschwindigkeit $c_2 = 19$ Fuß in einer Richtung bewegt, die mit der des ausfließenden Wassers einen Winkel $\alpha^0 = 130^0$ bildet. Welches ist die Richtung und Größe der resultirenden, oder wie man wohl sagt, der absoluten Geschwindigkeit des Wassers?

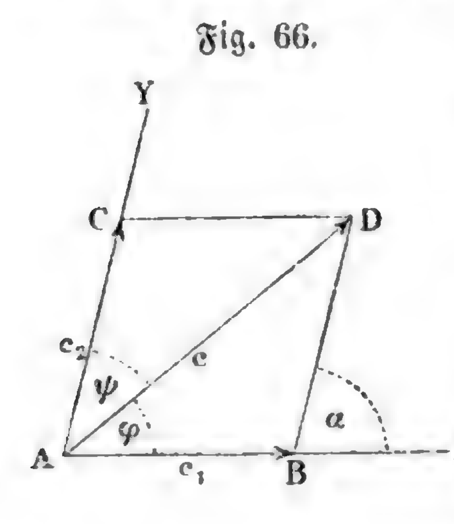
Es ist $c = \sqrt{25^2 + 19^2 + 2.25.19\, cos. 130^0} = \sqrt{625 + 361 - 50.19. cos. 50^0}$
$= \sqrt{986 - 950\, cos. 50^0} = \sqrt{986 - 610{,}7} = \sqrt{375{,}3} = 19{,}37$ Fuß die gesuchte resultirende Geschwindigkeit.

Ferner $sin.\ \varphi = \dfrac{19\ sin.\ 130^0}{19{,}37} = 0{,}9808\ sin.\ 50^0 = 0{,}7513$, und sonach der Winkel, um welchen die Resultirende von der Geschwindigkeit $c_1$ abweicht, $\varphi = 48^0 42'$, also der Winkel, welchen sie mit der Bewegungsrichtung des Gefäßes einschließt: $\alpha - \varphi = 81^0 18'$.

2) Wären die vorigen Geschwindigkeiten winkelrecht gegen einander gerichtet, so würde $cos.\ \alpha = cos.\ 90^0 = 0$, und deshalb die mittlere Geschwindigkeit $c = \sqrt{986} = 31{,}40$ Fuß sein; für ihre Richtung wäre $tang.\ \varphi = {}^{29}/_{25} = 0{,}76$, daher die Abweichung derselben von der ersten Geschwindigkeit: $\varphi = 37^0 14'$.

§. 33 Man kann auch jede gegebene Geschwindigkeit aus zwei Seitengeschwindigkeiten bestehend ansehen, und deshalb, gewissen Bedingungen entsprechend, in solche zerlegen. Sind z. B. die Winkel $DAX = \varphi$, und $DAY = \psi$, Fig. 66, gegeben, welche die zu suchenden Geschwindigkeiten mit der mittleren $AD = c$ einschließen sollen, so ziehe man durch den Endpunkt $D$ der die $c$ vorstellenden Graden andere Linien parallel zu den Richtungen $AX$ und $AY$: die sich ergebenden Durchschnittspunkte $B$ und $D$ schneiden nun die gesuchten Geschwindigkeiten

Fig. 66.




$$AB = c_1 \text{ und } AC = c_2 \text{ ab.}$$

Die Trigonometrie giebt diese Geschwindigkeiten durch die Formeln:

$$c_1 = \frac{c\, sin.\, \psi}{sin. (\varphi + \psi)},\quad c_2 = \frac{c\, sin.\ \varphi}{sin.\ (\varphi + \psi)}.$$

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung sind die beiden Geschwindigkeiten winkelrecht gegen einander, dann ist also $\varphi + \psi = 90^0$, $sin.\ (\varphi + \psi) = 1$, und es folgt:

$$c_1 = c\ cos.\ \varphi \text{ und } c_2 = c\ sin.\ \varphi.$$

Uebrigens kann auch aus einer Seitengeschwindigkeit ($c_1$) und ihrem Richtungswinkel ($\varphi$) die Richtung und Größe der anderen Seitengeschwindigkeit gefunden werden. Endlich lassen sich auch aus den Geschwindigkeiten $c$, $c_1$ und $c_2$ ihre Richtungswinkel bestimmen, wie man aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel desselben findet.

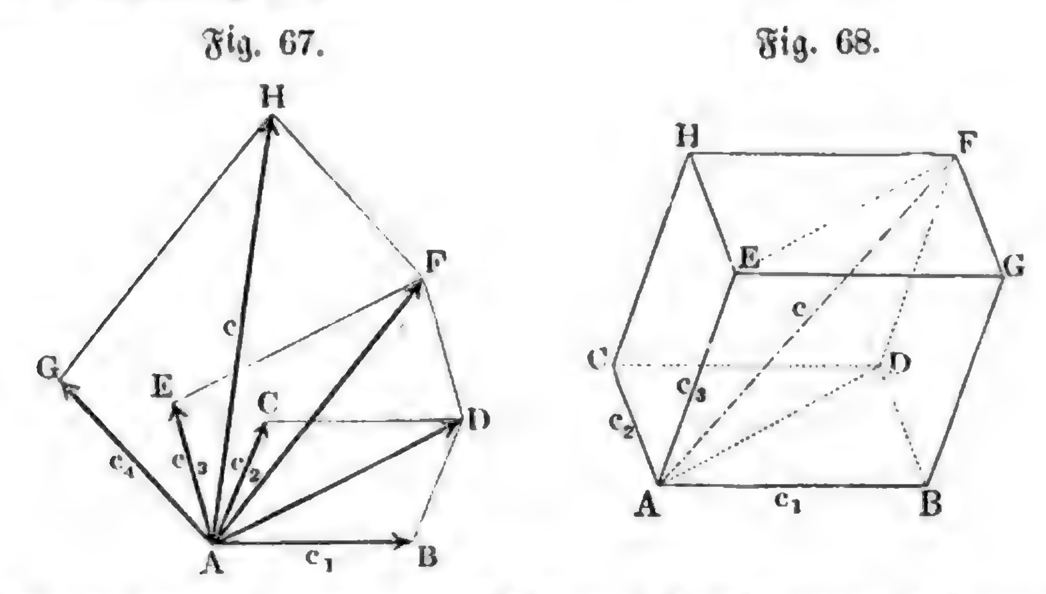
Beispiel. Es sei die Geschwindigkeit $c = 10$ Fuß in zwei Seitengeschwindigkeiten zu zerlegen, deren Richtungen um die Winkel $\varphi = 65^0$ und $\psi = 70^0$ von ihrer Richtung abweichen. Diese Geschwindigkeiten sind:

$$c_1 = \frac{10\, sin.\, 70^0}{sin.\, 135^0} = \frac{9{,}397}{sin.\, 45^0} = 13{,}29 \text{ Fuß u. } c_2 = \frac{10\, sin.\, 65^0}{sin.\, 135^0} = \frac{9{,}063}{0{,}7071} = 12{,}81 \text{ Fuß.}$$

**Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.** §. 34 Durch wiederholte Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten läßt sich jede beliebige Anzahl von Geschwindigkeiten in eine einzige Geschwindigkeit verwandeln. Die Construction des Parallelogrammes $ABDC$ (Fig. 67) giebt die mittlere Geschwindigkeit $AD$ zu $c_1$ und $c_2$; durch Construction des Parallelogrammes $ADFE$ erhält man in $AF$ die mittlere Geschwindigkeit zu $AD$ und $AE = c_3$, und ebenso stellt sich durch Construction des Parallelogrammes $AFHG$ die mittlere Geschwindigkeit $AH = c$ von $AF$ und $AG = c_4$, und dadurch auch die von $c_1$, $c_2$, $c_3$ und $c_4$ heraus.

Am einfachsten ergiebt sich die in Frage stehende mittlere Geschwindigkeit durch Construction eines Polygones $ABDFH$, dessen Seiten $AB$, $BD$, $DF$ und $FH$ den gegebenen Geschwindigkeiten $c_1$, $c_2$, $c_3$ und $c_4$ parallel und gleich gemacht werden, und dessen letzte Seite $AH$ allemal die resultirende Geschwindigkeit ist.

Fig. 67. Fig. 68.

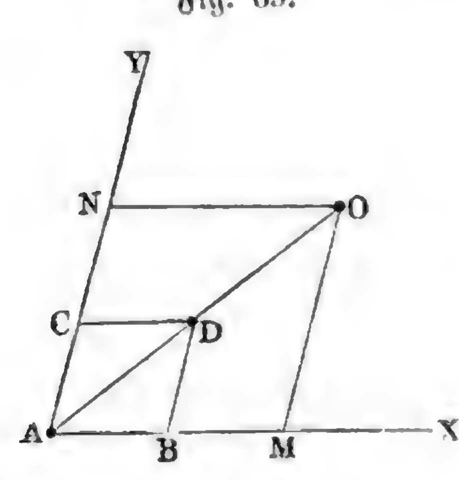



Auch in dem Falle, wenn die Geschwindigkeitsrichtungen nicht in einerlei Ebene liegen, läßt sich die mittlere Geschwindigkeit durch mehrfache Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten finden. Die mittlere Geschwindigkeit $AF = c$ (Fig. 68) von drei nicht in einer Ebene befindlichen Geschwindigkeiten $AB = c_1$, $AC = c_2$ und $AE = c_3$ ist die Diagonale

eines Parallelepipeds $BCHG$, dessen Seiten diesen Geschwindigkeiten gleich sind. Man spricht daher wohl auch von einem Parallelepiped der Geschwindigkeiten.

§. 35 **Zusammensetzung der Accelerationen.** Zwei gleichförmig beschleunigte und mit Null Geschwindigkeit anfangende Bewegungen geben in ihrer Zusammensetzung wieder eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der geraden Linie. Bezeichnet man die Accelerationen dieser nach den Richtungen $AX$ und $AY$ (Fig. 69) vor sich gehenden Bewegungen durch $p_1$ und $p_2$, so sind am Ende der Zeit $t$ die Räume:

Fig. 69.




$$AM = x = \frac{p_1 t^2}{2} \text{ und}$$

$$AN = y = \frac{p_2 t^2}{2},$$

und es ist ihr Verhältniß

$$\frac{x}{y} = \frac{p_1 t^2}{p_2 t^2} = \frac{p_1}{p_2}$$

von der Zeit gar nicht abhängig, deshalb also der Weg $AO$ der zusammengesetzten Bewegung ein geradliniger. Macht man $AB = p_1$, und $BD = AC = p_2$, so erhält man ein Parallelogramm $ABDC$, welches dem Parallelogramm $AMON$ ähnlich und für welches

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1/2\, p_1 t^2}{p_1} = 1/2\, t^2, \text{ also } AO = 1/2\, \overline{AD}.t^2 \text{ ist.}$$

Dieser Gleichung zufolge ist der Weg $AO$ der zusammengesetzten Bewegung dem Quadrate der Zeit proportional, die Bewegung selbst also gleichförmig beschleunigt, und die Acceleration derselben die Diagonale $AD$ des aus den einfachen Accelerationen $p_1$ und $p_2$ construirtenen Parallelogramm.

So wie man also durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten Geschwindigkeiten zusammensetzt und zerlegt, ebenso lassen sich nach genau denselben Regeln durch ein Parallelogramm, welches man das Parallelogramm der Accelerationen (franz. parallélogramme des accélérations; engl. parallelogram of accelerations) nennt, Accelerationen zu einer einzigen vereinigen, sowie in mehrere andere zerlegen.

§. 36 **Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Accelerationen.** Aus der Vereinigung von einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichförmig beschleunigten geht eine gänzlich ungleichförmige Bewegung hervor, wenn die Bewegungsrichtungen nicht zusammenfallen. In einer gewissen Zeit $t$ wird bei der Geschwindigkeit $c$ in der einen Richtung $AY$, Fig. 70, der Weg:

$$AN = y = ct,$$

und in derselben Zeit bei einer unveränderlichen Acceleration in einer gegen die erstere rechtwinkeligen Richtung $AX$ der Weg:

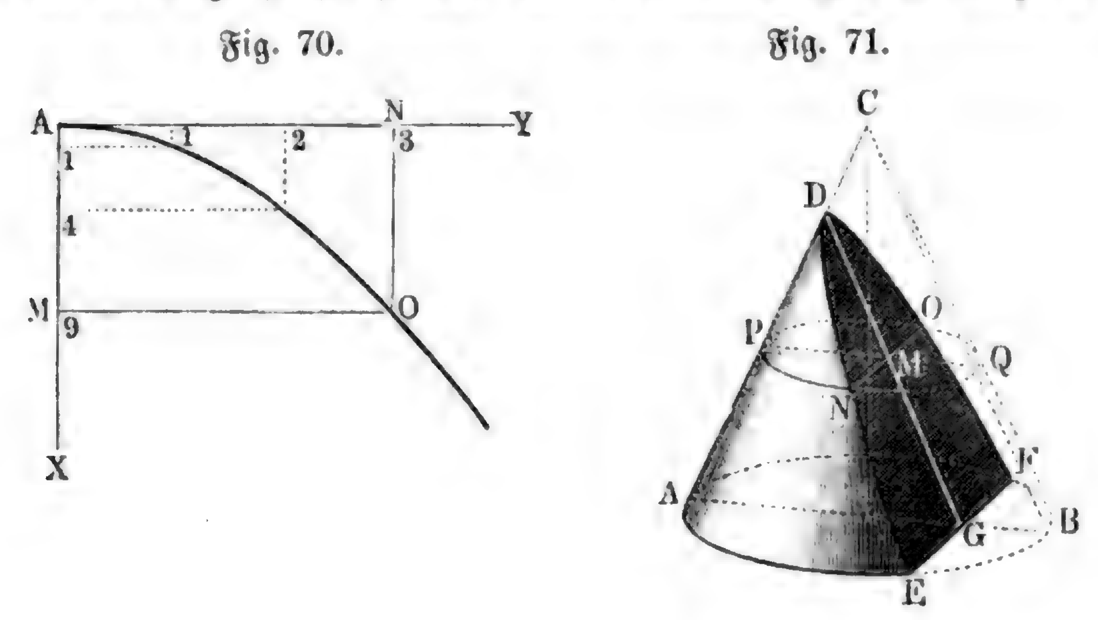
$$AM = x = \frac{p\,t^2}{2}$$

zurückgelegt, und es ist der Körper im Eckpunkte $O$ des aus $y = ct$ und $x = \frac{pt^2}{2}$ construirten Parallelogrammes. Mit Hülfe dieser Formeln läßt sich zwar der Ort des Körpers zu jeder Zeit finden, allein derselbe liegt nicht in einer und derselben Geraden; denn nehmen wir aus der ersten Gleichung $t = \frac{y}{c}$ und setzen diesen Werth in die zweite, so erhalten wir die Bahngleichung:

$$x = \frac{p\,y^2}{2\,c^2}.$$

Dieser zufolge verhalten sich die Wege ($x$) in der zweiten Bewegungsrichtung nicht wie die Wege selbst, sondern wie die Quadrate ($y^2$) der Wege in der

Fig. 70. Fig. 71.




ersten Bewegungsrichtung, und es ist deshalb der Weg des Körpers auch keine gerade, sondern eine gewisse krumme Linie, welche man in der Geometrie unter dem Namen **die Parabel** (franz. parabole; engl. parabola) kennen lernt.

Anmerkung. Es sei $ABC$, Fig. 71, ein Kegel mit kreisförmiger Basis $AEBF$, sowie $DEF$ ein Schnitt desselben parallel zur Seitenlinie $BC$ und winkelrecht zum Durchschnitt $ABC$ geführt, und $OPNQ$ ein zweiter, mit der Basis paralleler und deswegen ebenfalls kreisförmiger Durchschnitt. Es sei ferner $EF$ die Durchschnittslinie zwischen der Basis und dem ersten Schnitte, und $ON$ die zwischen beiden Schnitten; denken wir uns endlich im triangulären Durchschnitte $ABC$ die parallelen Durchmesser $AB$ und $PQ$ und im Schnitte $DEF$ die Axe $DG$ geführt. Alsdann gilt für die halbe Kreissehne $MN = MO$ die Gleichung $\overline{MN^2} = PM \,.\, MQ$; aber $MQ$ ist $= GB$ und für $PM$ gilt die

Proportion $PM : DM = AG : DG$, es ergiebt sich daher:

$$MN^2 = BG \cdot \frac{DM \cdot AG}{DG}.$$

Ebenso ist aber auch $GE^2 = BG \cdot AG$; dividirt man daher beide Gleichungen durch einander, so folgt:

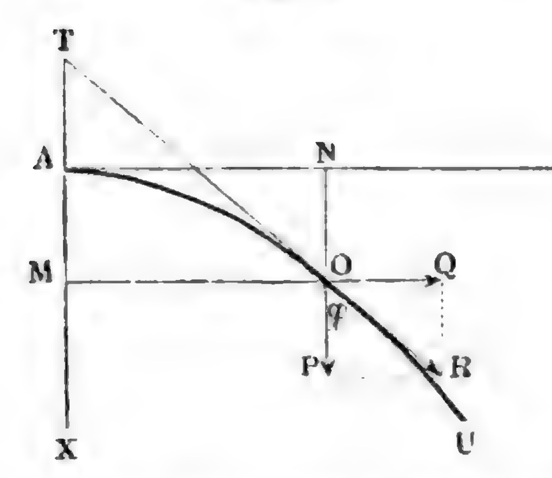
$$\frac{DM}{DG} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{GE}^2};$$

es verhalten sich also die auf der Axe abgeschnittenen Stücke (Abscissen), wie die Quadrate der entsprechenden Perpendikel (Ordinaten). Dieses Gesetz stimmt mit dem oben gefundenen Bewegungsgesetze vollkommen überein; es geht also diese Bewegung in einer krummen Linie $DNE$ vor sich, welche einem Kegelschnitte angehört.

Ueber die Construction, Tangentenlage und andere Eigenschaften der Parabel ist im Ingenieur Seite 175 u. s. w. nachzusehen.

§. 37 **Parabelbewegung.** Um die aus der Zusammensetzung von Geschwindigkeit und Acceleration hervorgehende Bewegung vollständig zu kennen, muß man auch noch die Richtung, Geschwindigkeit und den durchlaufenen Weg für jede Zeit ($t$) angeben können. Die Geschwindigkeit parallel zu $AY$ ist unveränderlich $= c$, die parallel zu $AX$ aber veränderlich und $= pt$; construirt man nun aus dieser Geschwindigkeit $OQ = c$ und $OP = pt$ das Parallelogramm $OPRQ$, Fig. 72, so erhält man in der Diagonale $OR$ desselben die mittlere oder diejenige Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in $O$ die parabolische Bahn $AOU$ verfolgt. Diese Geschwindigkeit selbst ist:

Fig. 72.




$$v = \sqrt{c^2 + (pt)^2}.$$

Ebenso giebt $OR$ die Tangente oder Richtung, in welcher der Körper in $O$ einen Augenblick lang fortgeht, und es ist für den Winkel $POR = XTO = \varphi$, welchen dieselbe mit der zweiten Richtung (Axe) $AX$ einschließt, durch die Formel:

$$tang.\ \varphi = \frac{OQ}{OP} = \frac{c}{pt}$$

gegeben.

Um endlich noch den durchlaufenen Raum oder Curvenbogen $AO = s$ zu finden, kann man sich der Gleichung $\sigma = vt$ (§. 19), wonach sich die als Elemente anzusehenden kleinen Theile desselben berechnen lassen, bedienen. Uebrigens giebt auch die höhere Geometrie eine complicirte Formel zur Berechnung der Länge eines Parabelbogens.

§. 38 Wir haben seither angenommen, daß die ursprünglichen Bewegungsrichtungen einen Rechtwinkel einschließen, und müssen nun noch denjenigen Fall näher kennen lernen, bei welchem die Richtung der Acceleration mit der Geschwindigkeit einen gewissen Winkel einschließt. Hat der Körper in der Richtung $AY_1$ (Fig. 73) die Geschwindigkeit $c$ und in der Richtung $AX_1$, welche mit der ersten den Winkel $X_1 A Y_1 = \alpha$ einschließt, die Acceleration $p$, so ist $A$ nicht mehr Scheitel und $AX_1$ nicht mehr Axe, sondern nur die Axenrichtung der Parabel. Der Scheitel $C$ steht vielmehr um die Coordinaten $CB = a$ und $BA = b$, wovon die erstere in die Axe selbst fällt und die letztere winkelrecht darauf steht, von dem Anfangspunkte $A$ der Bewegung ab. Die Geschwindigkeit $AD = c$ besteht aus den Seitengeschwindigkeiten $AF = c\, sin.\, \alpha$ und $AE = c\, cos.\, \alpha$. Von ihnen ist die erstere immer dieselbe, die letztere aber der veränderlichen Geschwindigkeit $pt$ gleich zu setzen, vorausgesetzt, daß der Körper die Zeit $t$ nöthig gehabt hat, um vom Scheitel $C$ nach dem eigentlichen Anfangspunkte $A$ zu gelangen. Es ergiebt sich also:

Fig. 73.

$$c\, cos.\, \alpha = pt, \text{ folglich } t = \frac{c\,.\, cos.\, \alpha}{p}, \text{ daher}$$

$$1)\ CB = a = \frac{pt^2}{2} = \frac{c^2 cos\, \alpha^2}{2p}, \text{ und}$$

$$2)\ BA = b = c\, sin.\, \alpha\,.\, t = \frac{c^2 sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{p} = \frac{c^2 sin.\, 2\, \alpha}{2p}.$$

Hat man durch diese Abstände den Scheitel $C$ der Parabel gefunden, so kann man, von da ausgehend, für jede beliebige Zeit den Ort $O$ des Körpers bestimmen. Uebrigens gilt auch, $CM = x$ und $MO = y$ gesetzt, die allgemeine Formel:

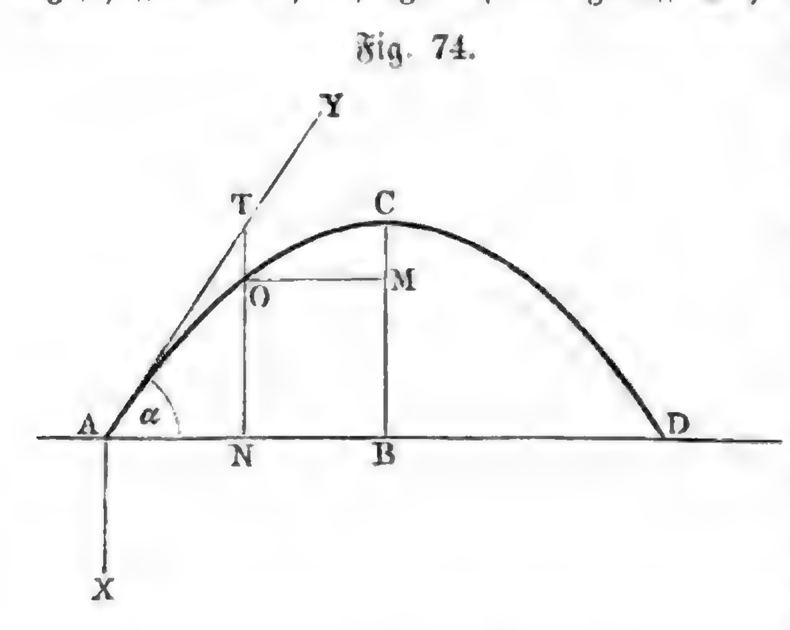
$$x = \frac{p\, y^2}{2 c^2 sin.\, \alpha^2}, \text{ oder } y = c\, sin.\, \alpha \sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Anmerkung. Die seither abgehandelte Theorie der parabolischen, aus einer unveränderlichen Geschwindigkeit und einer constanten Acceleration hervorgehenden Bewegung findet ihre Anwendung in der Ballistik, oder der Lehre von der Wurfbewegung. Die schief auf- oder abwärts geworfenen Körper würden in Folge ihrer Anfangsgeschwindigkeit ($c$) und der Acceleration der Schwere ($g = 31^1/_4$ Fuß) einen Parabelbogen durchlaufen, wenn der Widerstand der Luft beseitigt wäre, oder die Bewegung im luftleeren Raume vor sich ginge. Ist die

Wurfgeschwindigkeit nicht groß und der geworfene Körper sehr schwer in Hinsicht auf sein Volumen, so fällt die Abweichung von der Parabel klein genug aus, um dieselbe ganz vernachlässigen zu können. Am vollkommensten wird noch die parabolische Bahn an springenden Wasserstrahlen, wie sie sich beim Ausflusse aus Gefäßen, bei Spritzen u. s. w. bilden, vorgefunden. Abgeschossene Körper, wie z. B. Geschützkugeln, beschreiben in Folge des großen Luftwiderstandes, von der Parabel bedeutend abweichende Bahnen.

§. 39 **Wurfbewegung.** Ein unter dem Elevationswinkel $YAD = \alpha$ (Fig. 74) abgeschossener Körper steigt auf eine gewisse Höhe $BC$, welche die Wurfhöhe (franz. hauteur du jet; engl. height of projection) genannt wird, und er erreicht die Horizontalebene, von der er in $A$ ausgegangen ist, in einer Entfernung $AD$, welche die Wurfweite (franz. amplitude du jet; engl. range of projection) heißt.

Fig. 74.




Aus der Geschwindigkeit $c$, der Acceleration $g$ und dem Elevationswinkel folgt, nach §. 38, indem man $p$ durch $g$ und $\alpha^0$ durch $90^0 + \alpha^0$, also $cos. \alpha$ durch $sin. \alpha$ ersetzt u. s. w.:

die Wurfhöhe $CB = a = \frac{c^2 \, sin. \alpha^2}{2g}$ und

die halbe Wurfweite $AB = b = \frac{c^2 \, sin. 2\alpha}{2g}$.

Aus der letzten Formel ersieht man, daß die Wurfweite am größten ausfällt, wenn $sin. 2\alpha = 1$, also $2\alpha = 90^0$, d. i. $\alpha = 45^0$ ist. Ein unter dem Elevationswinkel von 45 Grad aufsteigender Körper erreicht also die größte Wurfweite.

Auch ist

$$a = \frac{g b^2}{2 c^2 \, cos. \alpha^2},$$

und für einen Punkt $O$ der Wurfbahn hat man, wenn $CM = x$ und $MO = y$ dessen Coordinaten sind:

$$x = \frac{g y^2}{2 c^2 \, cos. \alpha^2},$$

oder, wenn er durch die Coordinaten $AN = x_1$ und $NO = y_1$ angegeben werden soll, da

$$x = CM = BC - NO = a - y_1 \text{ und}$$
$$y = MO = AB - AN = b - x_1 \text{ ist:}$$
$$a - y_1 = \frac{g(b - x_1)^2}{2\,c^2 \cos.\alpha^2},$$

folglich:

$$y_1 = a - \frac{g(b - x_1)^2}{2\,c^2 \cos.\alpha^2}, \text{ oder, da } a - \frac{g b^2}{2\,c^2 \cos.\alpha^2} = 0 \text{ ist,}$$
$$y_1 = x_1 \operatorname{tang.}\alpha - \frac{g x_1^2}{2\,c^2 \cos.\alpha^2}.$$

Setzt man in der Gleichung $y_1 = x_1 \operatorname{tang.}\alpha - \frac{g x_1^2}{2\,c^2 \cos.\alpha^2}$, für $\frac{1}{\cos.\alpha^2}$ den Werth $1 + \operatorname{tang.}\alpha^2$, und löst man dieselbe in Beziehung auf $\operatorname{tang.}\alpha$ auf, so erhält man folgenden Ausdruck für den Wurfwinkel ($\alpha$), bei welchem ein durch die Coordinaten $x_1$ und $y_1$ gegebenes Ziel erreicht wird:

$$\operatorname{tang.}\alpha = \frac{c^2}{g x_1} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{g x_1}\right)^2 - \left(1 + \frac{2\,c^2 y_1}{g x_1^2}\right)}.$$

Ist $\left(\frac{c^2}{g x_1}\right)^2 = 1 + \frac{2\,c^2 y_1}{g x_1^2}$, oder $c^4 - 2\,g\,y_1\,c^2 = g^2 x_1^2$, also:

$$c = \sqrt{g\,(y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2})},$$

so fällt einfach

$$\operatorname{tang.}\alpha = \frac{c^2}{g x_1}$$

aus. Kleinere Werthe für $c$ machen $\operatorname{tang.}\alpha$ imaginär, und größere Werthe für $c$ führen auf zwei Werthe für $\operatorname{tang.}\alpha$; im ersten Falle ist das Ziel gar nicht zu erreichen, und im zweiten Falle wird es entweder beim Steigen oder beim Fallen des geworfenen Körpers getroffen.

Beispiele. 1) Ein unter dem Elevationswinkel von 66° mit 20 Fuß Geschwindigkeit aufsteigender Wasserstrahl, dem also die Geschwindigkeitshöhe $h = 0{,}016 \,.\, 20^2 = 6{,}4$ Fuß zukommt, steigt auf die Höhe $a = h \sin.\alpha^2 = 6{,}4\,(\sin.66^0)^2 = 5{,}34$ Fuß und hat die Wurf- oder Sprungweite $2\,b = 2 \,.\, 6{,}4 \sin.132^0 = 2 \,.\, 6{,}4 \sin.48^0 = 9{,}51$ Fuß. Die Zeit, welche jedes Wassertheilchen braucht, um den ganzen Parabelbogen $ACD$ zu durchlaufen, ist $t = \frac{2\,c \sin.\alpha}{g} = \frac{2 \,.\, 20 \,.\, \sin.66^0}{31{,}25} = 1{,}17$ Secunde. Die Höhe, welche dem Horizontalabstande $AN = x_1 = 3$ Fuß entspricht, ist

$$y_1 = 3 \,.\, \operatorname{tang.}66^0 - \frac{31{,}25 \,.\, 9}{2 \,.\, 400 \,.\, (\cos.66^0)^2} = 6{,}738 - \frac{0{,}35156}{0{,}16543}$$
$$= 6{,}738 - 2{,}125 = 4{,}613 \text{ Fuß.}$$

2) Der aus einer horizontalen Röhre ausfließende Wasserstrahl hat auf einer Höhe von 1¾ Fuß eine Sprungweite (halbe Wurfweite) von 5¼ Fuß; wie groß ist die Geschwindigkeit des Wassers?

Aus der Formel $x = \frac{g y^2}{2 c^2} = \frac{y^2}{4 h}$ folgt $h = \frac{y^2}{4 x}$, hierin $x = 1{,}75$ und $y = 5{,}25$ gesetzt, ergiebt sich $h = \frac{5{,}25^2}{4 \,.\, 1{,}75} = 3{,}937$ Fuß, und die dieser Höhe entsprechende Geschwindigkeit $c = 15{,}68$ Fuß.

§. 40 **Springende Wasserstrahlen.** Die Eigenthümlichkeiten der Bewegung des Wassers in springenden Strahlen werden besonders durch Folgendes dargethan und zur Anschauung gebracht. Nach dem Vorstehenden sind

$$y = x \, tang. \, \alpha - \frac{g x^2 [1 + (tang. \, \alpha)^2]}{2 c^2} \text{ und}$$

$$y_1 = x_1 \, tang. \, \alpha_1 - \frac{g x_1^2 [1 + (tang. \, \alpha_1)^2]}{2 c^2}$$

die Gleichungen der Parabeln, welche zwei mit derselben Geschwindigkeit $c$ unter verschiedenen Neigungswinkeln $\alpha$ und $\alpha_1$ aufsteigende Wasserstrahlen bilden. Setzt man $x_1 = x$ und subtrahirt man diese Gleichungen von einander, so erhält man die neue Gleichung

$$y - y_1 = x (tang. \, \alpha - tang. \, \alpha_1) - \frac{g x^2}{2 c^2} [(tang. \, \alpha)^2 - (tang. \, \alpha_1)^2]$$

$$= x (tang. \, \alpha - tang. \, \alpha_1) \left(1 - \frac{g x}{2 c^2} (tang. \, a + tang. \, a_1)\right).$$

Nimmt man ferner an, daß diese beiden Wasserstrahlen nahe unter denselben Winkeln aufsteigen, und verlangt man endlich, daß beide Parabeln einen Punkt gemeinschaftlich haben, so hat man $y_1 = y$, daher

$$x (tang. \, \alpha - tang. \, \alpha_1) \left(1 - \frac{g x}{2 c^2} (tang. \, \alpha + tang. \, \alpha_1)\right) = 0, \text{ also}$$

$$\frac{g x}{2 c^2} (tang. \, \alpha + tang. \, \alpha_1) = 1,$$

oder, da sich $\alpha_1 = \alpha$ setzen läßt, einfach

$$\frac{g x \, tang. \, \alpha}{c^2} = 1, \text{ folglich } tang. \, \alpha = \frac{c^2}{g x}.$$

Führt man diesen Ausdruck in der Gleichung

$$y = x \, tang. \, \alpha - \frac{g x^2}{2} [1 + (tang. \, a)^2]$$

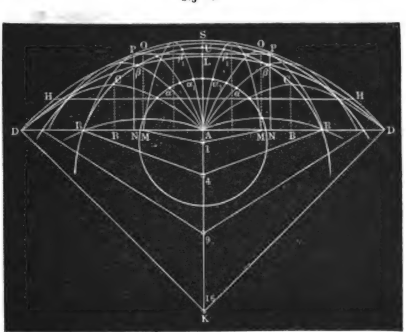
ein, so erhält man die Gleichung

$$y = \frac{c^2}{g} - \frac{g x^2}{2 c^2} \left(1 + \frac{c^4}{g^2 x^2}\right) = \frac{c^2}{2 g} - \frac{g x^2}{2 c^2}$$

der Curve $DPSPD$, Fig. 75, welche durch die benachbarten Punkte geht, worin sich je zwei der mit verschiedenen Winkeln aus einem und demselben Punkte $A$ aufsteigenden Parabeln schneiden, und daher auch das ganze System der Parabeln $ACD$, $AOR$ u. s. w. berührt oder umhüllt.

Die Sprunghöhe des senkrecht aufsteigenden Strahles ist $AS = \frac{c^2}{2\,g}$ und die Sprungweite des unter dem Winkel $\alpha = 45$ Grad aufsteigenden

Fig. 75.




Strahles $ACD$ ist $AD = 2\,.\,\frac{c^2 \sin. 2\,\alpha}{2\,g} = 2\,.\,\frac{c^2}{2\,g} = 2\,\overline{AS}$.

Verlegt man den Coordinatenanfangspunkt von $A$ nach $S$, ersetzt man also die Coordinaten $AN = x$ und $NP = y$ durch die Coordinaten $SU = u$ und $UP = v$, so hat man

$$y = AS - SU = \frac{c^2}{2\,g} - u \text{ und } x = AN = UP = v,$$

daher geht die obige Gleichung

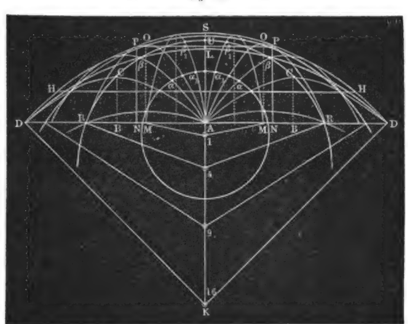
$$y = \frac{c^2}{2\,g} - \frac{g\,x^2}{2\,c^2} \text{ in folgende über:}$$

$$u = \frac{g\,v^2}{2\,c^2} \text{ oder } v^2 = \frac{2\,c^2}{g}\,u.$$

Diese Gleichung gehört der gemeinen Parabel mit dem Parameter $p = \frac{2\,c^2}{g} = 4\,\overline{AS}$ an, und es ist daher auch die Umhüllungscurve $DPSPD$

der sämmtlichen aus demselben Punkte $A$ aufsteigenden Wasserstrahlen die gemeine Parabel mit dem Scheitel $S$ und der Axe $SA$.

Fig. 76.




Ein nach allen Richtungen aus $A$ aufsteigender Strahlenbündel wird folglich von einem **Paraboloid** umhüllt, welches durch Umdrehung der Umhüllungscurve $DPSPD$ um $AS$ entsteht.

Ist $t$ die Zeit, in welcher der in einer Parabel aufsteigende Körper den Bogen $AO$, Fig. 76, zurücklegt, dessen Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ sind, so hat man

$$x = ct\, cos.\, \alpha \text{ und } y = ct\, sin.\, \alpha - \frac{g t^2}{2}, \text{ folglich auch}$$

$$cos.\, \alpha = \frac{x}{ct} \text{ und } sin.\, \alpha = \frac{y + \frac{1}{2} g t^2}{ct}.$$

Setzt man nun diese Werthe für $cos.\, \alpha$ und $sin.\, \alpha$ in die bekannte trigonometrische Formel $(cos.\, \alpha)^2 + (sin.\, \alpha)^2 = 1$ ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{(ct)^2} + \frac{(y + \frac{1}{2} g t^2)^2}{(ct)^2} = 1, \text{ oder } x^2 + (y + \frac{1}{2} g t^2)^2 = c^2 t^2.$$

Wenn von einem Punkte $A$, Fig. 76, aus gleichzeitig in derselben Verticalebene Körper unter verschiedenen Neigungswinkeln emporgeworfen werden,

so sind die Orte, welche dieselben nach irgend einer Zeit $t$ einnehmen, durch die zuletzt gefundene Gleichung bestimmt, welche einem Kreise vom Halbmesser $r = ct$ angehört, dessen Mittelpunkt um die Größe $a = \frac{1}{2} g t^2$ senkrecht unter dem Ausgangspunkte $A$ liegt und sich daher auch in der Form $x^2 + (y + a)^2 = r^2$ darstellen läßt. Dieser Kreis wird daher auch gleichzeitig von den in einem und demselben Augenblicke aus $A$ aufsteigenden Elementen springenden Wasserstrahlen $ACD$, $AOP$, $ALS \dots$ erreicht.

Setzt man in der Formel $t_1 = \frac{x}{c \cos. \alpha}$, $\alpha = 45^0$, und $x = AB = \frac{c^2}{2g}$, ein, so erhält man $t_1 = \frac{c}{2g \cos. 45^0} = \frac{c}{g} \sqrt{\frac{1}{2}}$, daher die Zeit zum Durchlaufen des Parabelbogens $ACD$, $t = 2\, t_1 = \frac{c}{g} \sqrt{2}$, und den Halbmesser des Kreises $DLD$, welcher von den verschiedenen Wasserelementen gleichzeitig erreicht wird:

$$KD = r = ct = \frac{c^2}{g} \sqrt{2} = \frac{c^2}{2g} \sqrt{8} = 2{,}828 \frac{c^2}{2g} = 2{,}828 \,.\, \overline{AS},$$

sowie den Abstand des Mittelpunktes $K$ von $A$:

$$AK = a = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{c^2}{g} = 2 \frac{c^2}{2g} = 2 \overline{AS}.$$

Theilt man nun $DK$ in 4, sowie $AK$ in 16 gleiche Theile, so kann man, da $r$ mit $t$ und $a$ mit $t^2$ proportional wächst, aus den Theilpunkten 1, 4, 9 von $AK$ mit $\frac{1}{4} DK$, $\frac{2}{4} DK$ und $\frac{3}{4} DK$ andere Kreise beschreiben, welche andere in gleichen Zeiten durchlaufene Parabelbögen abschneiden. So schneidet z. B. der aus (1) mit $1\,\alpha = \frac{1}{4} DK$ beschriebene Kreis in den Punkten $\alpha, \alpha_1 \dots$, sowie der aus (4) mit $4\,\beta = \frac{1}{2} DK$ beschriebene Kreis in den Punkten $\beta, \beta_1 \dots$ gleichzeitig durchlaufene Parabelwege $A\alpha$, $A\alpha_1 \dots$, sowie $A\beta$, $A\beta_1 \dots$ ab.

Dreht man diese Kreise um die verticale Axe $KL$, so beschreiben sie die Kugelflächen, welche die gleichzeitig durchlaufenen Parabelwege begrenzen, wenn die Strahlen rund herum, nach allen Richtungen und unter allen Neigungswinkeln aufsteigen.

**Krummlinige Bewegungen überhaupt.** Aus der Vereinigung §. 41 von mehreren Geschwindigkeiten mit mehreren unveränderlichen Accelerationen entspringt ebenfalls eine parabolische Bewegung, denn es lassen sich nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch die Accelerationen zu einer einzigen vereinigen; es ist also das Ergebniß dasselbe, als wenn nur eine Geschwindigkeit und nur eine Acceleration, d. i. nur eine gleichförmige, und nur eine gleichförmig beschleunigte Bewegung vorhanden wäre.

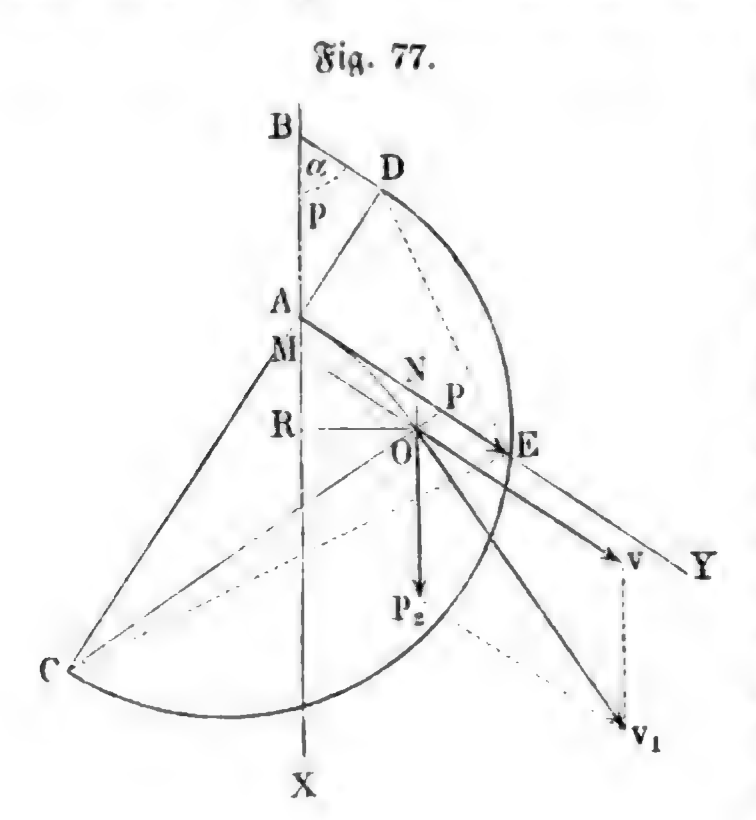
Sind die Accelerationen veränderlich, so kann man sie ebenso gut zu einer

mittleren vereinigen, als wenn sie constant wären, denn es ist erlaubt, dieselben in einem unendlich kleinen Zeittheilchen ($\tau$) als unveränderlich, die entsprechenden Bewegungen also innerhalb dieses Theilchens als gleichförmig beschleunigt anzusehen. Allerdings ist die resultirende Acceleration veränderlich, wie ihre Componenten selbst. Vereinigt man nun diese resultirende Acceleration mit der gegebenen Geschwindigkeit, so läßt sich ein kleiner Parabelbogen angeben, in welchem die Bewegung während eines kleinen Zeittheilchens statthat. Bestimmt man so für das folgende Zeittheilchen wieder die Geschwindigkeit und die mittlere Acceleration, so läßt sich ein neues, einer anderen Parabel angehöriges Bogenstück finden, und fährt man so fort, so erhält man nach und nach die angenäherte vollständige Bahncurve.

§. 42 Man kann jeden kleinen Bogentheil irgend einer Curve als einen Kreisbogen ansehen. Der Kreis, welchem dieser Bogen zugehört, heißt Krümmungskreis (franz. cercle osculateur; engl. circle of curvature), und sein ihm zugehöriger Halbmesser Krümmungshalbmesser (franz. rayon de courbure; engl. radius of curvature). Es läßt sich ebenso die Bahn eines bewegten Körpers aus Kreisbogen zusammensetzen, und deshalb eine Formel für ihre Halbmesser entwickeln.

Es sei $AM$ (Fig. 77) ein sehr kleiner gleichförmig beschleunigt zurückgelegter Weg $x = \frac{p\tau^2}{2}$ in der Richtung $AX$, und $AN$ ein sehr kleiner, gleichförmig durchlaufener Weg $y = v\tau$, und $O$ der vierte Endpunkt des aus $x$ und $y$ construirten Parallelogramms, d. i. der Punkt, welchen der von $A$ ausgehende Körper am Ende des Zeittheilchens ($\tau$) einnimmt. Legen wir $AC$ rechtwinkelig gegen $AY$ und sehen wir nun zu, aus welchem Punkte $C$ in dieser Linie sich ein kleiner Kreisbogen durch $A$ und $O$ beschreiben läßt. Wegen der Kleinheit des Bogens $AO$ können wir annehmen, daß nicht allein $CA$, sondern auch die Gerade $COP$

Fig. 77.



rechtwinkelig gegen $AY$ stehe, daß also im kleinen Dreiecke $NOP$ der Winkel $NPO$ ein rechter sei. Die Auflösung dieses Dreiecks giebt:

$$OP = ON \sin. ONP = AM \sin. XAY = \frac{p\tau^2}{2} \sin. \alpha,$$

und die Tangente

$$AP = AN + NP = vt + \frac{p\tau^2}{2} \cos. \alpha = \left(v + \frac{p\tau}{2} \cos. \alpha\right)\tau,$$

welche sich $= v\tau$ setzen läßt, weil $\frac{p\tau}{2} \cos. \alpha$ wegen des unendlich kleinen Factors $\tau$ gegen $v$ verschwindet. Nun ist aber nach der Lehre vom Kreise $\overline{AP}^2 = PO.(PO + 2\overline{CO})$, oder, da $PO$ gegen $2CO$ verschwindet, $\overline{AP}^2 = PO . 2\overline{CO}$; es folgt daher der gesuchte Krümmungshalbmesser:

$$CA = CO = r = \frac{\overline{AP}^2}{2PO} = \frac{v^2\tau^2}{p\tau^2 \sin. \alpha} = \frac{v^2}{p \sin. \alpha}.$$

Um den Krümmungshalbmesser construirend zu bestimmen, trage man auf die Normale zur anfänglichen Bewegungsrichtung $AY$ die Normalacceleration, d. i. den normalen Componenten $p \sin. \alpha$ als $AD$ auf, verbinde den Endpunkt $E$ der Geschwindigkeit $AE = v$ mit $D$ durch die Gerade $DE$ und ziehe $EC$ winkelrecht auf $DE$; der dadurch bestimmte Durchschnitt $C$ mit der ersten Normalen ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises durch $A$.

Durch Umkehrung der letzten Formel folgt die Normalacceleration $n = p \sin. \alpha = \frac{v^2}{r}$; es wächst hiernach dieselbe wie das Quadrat der Geschwindigkeit $v$ und umgekehrt wie der Krümmungshalbmesser $r$, also direct mit der Stärke der Krümmung.

Beispiel. Für die durch die Acceleration der Schwere bewirkte parabolische Bahn ist $r = 0{,}032 \frac{c^2}{\sin. \alpha}$, und im Scheitel dieser Curven, wo $\alpha = 90^0$, also $\sin. \alpha = 1$, fällt $r = 0{,}032\ c^2$ aus. Bei einer Geschwindigkeit von 20 Fuß ergäbe sich also $r = 12{,}8$ Fuß; je mehr sich aber der Körper vom Scheitel entfernt, desto kleiner wird $\alpha$ und desto größer wird folglich der Krümmungshalbmesser.

§. 43 Hat der Punkt $A$ das Wegelement $AO = \sigma$ durchlaufen, so ist seine Geschwindigkeit eine andere geworden, weil sich nun zur anfänglichen Geschwindigkeit $v$ in der Richtung von $AY$ die erlangte Geschwindigkeit $p\tau$ in der Richtung von $AX$ gesellt, und es ist folglich für den neuen Geschwindigkeitswerth $v_1$, dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu Folge:

$$v_1^2 = v^2 + 2vp\tau \cos. \alpha + p^2\tau^2 = v^2 + pt(2v \cos. \alpha + p\tau),$$

oder da $p\tau$ gegen $2v \cos. \alpha$ verschwindet,

$$v_1^2 = v^2 + 2pv\tau \cos. \alpha.$$

Noch ist $v\tau$ das Wegelement $AN = AO = \sigma$, und $p\, cos.\, \alpha$ die Tangentialacceleration, d. i. der Component $k$ der Acceleration $p$ in der Tangenten- oder Bewegungsrichtung, daher hat man:

$$\frac{v_1^2 - v^2}{2} = k\sigma.$$

Auch ist $\sigma\, cos.\, \alpha$ die Projection $AR = \xi_1$ des Wegelementes in der Richtung der Acceleration, daher hat man auch:

$$\frac{v_1^2 - v^2}{2} = p\,\xi_1.$$

Bei fortgesetzter Bewegung geht nach und nach $v_1$ in $v_2, v_3 \dots v_n$ über, wobei die projicirten Wegtheile um $\xi_2, \xi_3, \dots \xi_n$ wachsen, es ist

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = p\,\xi_2, \quad \frac{v_3^2 - v_2^2}{2} = p\,\xi_3, \dots \frac{v_n^2 - v_{n-1}^2}{2} = p\,\xi_n,$$

daher folgt durch Addition:

$$\frac{v_n^2 - v^2}{2} = p\,(\xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_n) = p\,x,$$

wenn $x$ die Projection des ganzen Curvenweges in der Richtung $AX$ der Acceleration bezeichnet. Auch läßt sich

$$\frac{v_n^2 - v^2}{2} = \left(\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right) x$$

setzen, wenn die Acceleration variabel ist und nach und nach die Werthe $p_1, p_2 \dots p_n$ annimmt.

Es ist also die Geschwindigkeitsveränderung gar nicht von der Gestalt und Größe, sondern nur von der Projection $x$ des Weges in der Richtung der Acceleration abhängig. Aus diesem Grunde haben z. B. die Wasserelemente sämmtlicher springenden Strahlen in Fig. 76, wenn sie eine und dieselbe Horizontale $HH$ erreichen, eine und dieselbe Geschwindigkeit. Ist, wie oben, $c$ die Austritts- oder Anfangsgeschwindigkeit, $v$ die Geschwindigkeit in $HH$, und $b$ die Höhe der Linie $HH$ über dem Anfangspunkt $A$, so hat man

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = -\,g\,b, \text{ und daher}$$

$$v = \sqrt{c^2 - 2gb}.$$

Ist an einer gewissen Stelle der Bewegung, $\alpha = 90$ Grad, so fällt die Tangentialacceleration $k = p\, cos.\, \alpha = 0$ aus und die Normalacceleration $n = p\, sin.\, \alpha$ mit der mittleren Acceleration $p$ zusammen. Auch ist dann die Veränderung des Geschwindigkeitsquadrates bei Durchlaufung eines Wegelementes $\sigma$, $v_1^2 - v^2 = 0$, also $v_1 = v$; und wenn sich nun bei fortgesetzter Bewegung in einer Curve die Richtung der Acceleration so ändert, daß sie stets normal zur Bewegungsrichtung bleibt, also eine Tangentialacceleration

ar nicht vorkommt, so ist auch bei Durchlaufung eines endlichen Curvenweges, $v_1^2 - v^2 = 0$, also $v_1 = v$, unveränderlich, also die Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit $v$.

Die Normalacceleration, bei welcher diese Beständigkeit der Geschwindigkeit statthat, ist

$$p = \frac{v^2}{r},$$

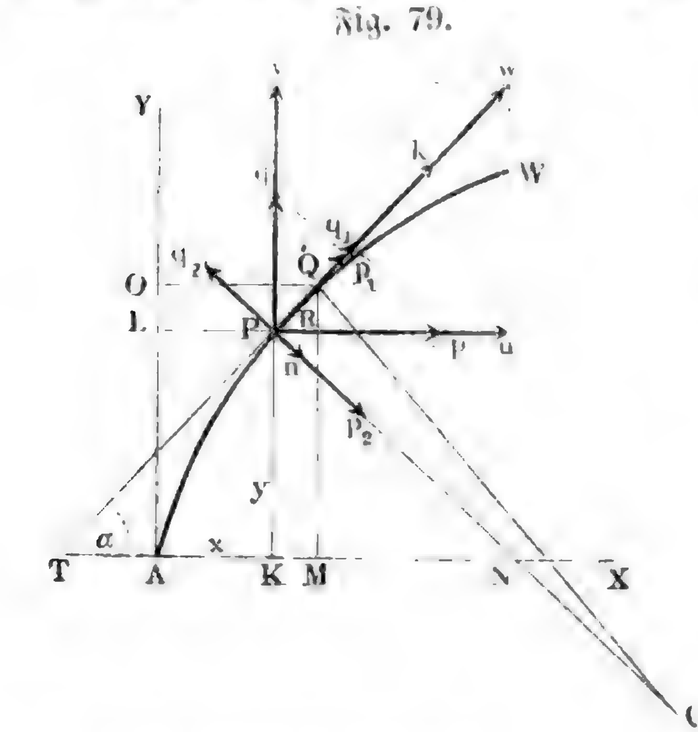
und sie fällt bei der Bewegung im Kreise $AOD$, Fig. 78, da hier der Krümmungshalbmesser $CA = CO = CD = r$ constant ist, ebenfalls unveränderlich aus. Umgekehrt bringt auch eine unveränderliche Acceleration, welche den Körper unaufhörlich rechtwinkelig von seiner Bewegung ablenkt, eine gleichförmige Umdrehung im Kreise hervor.

Fig. 78.

Beispiel. Ein Körper, welcher in einem Kreise von 5 Fuß Halbmesser so herumgeht, daß er zu jeder Umdrehung 5 Secunden Zeit braucht, hat die Geschwindigkeit $c = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi \,.\, 5}{5} = 2 \,.\, \pi = 6{,}283$ Fuß, und die Normalacceleration $p = \frac{(6{,}283)^2}{5} = 7{,}896$ Fuß, d. h. er wird in jeder Secunde um $\frac{1}{2} p = \frac{1}{2} \,.\, 7{,}896 = 3{,}948$ Fuß von der geraden Linie abgelenkt.

**Krummlinige Bewegungen überhaupt.** (§. 44) Bewegt sich ein Punkt $P$, Fig. 79, nach zwei Richtungen $AX$ und $AY$ zugleich, so lassen sich seine Wege $AK = LP = x$ und $AL = KP = y$ als Coordinaten der von der Bahn desselben gebildeten Curve $APW$ ansehen, und ist nun $\partial t$ das Zeitelement, innerhalb dessen der Körper die Wegelemente $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y$ zurücklegt, so hat man nach (§. 20) die Abscissengeschwindigkeit:

Fig. 79.




$$1)\quad u = \frac{\partial x}{\partial t},$$

sowie die Ordinatengeschwindigkeit:

$$2)\quad v = \frac{\partial y}{\partial t},$$

und daher die daraus resulti-

rende Tangential- oder Curvengeschwindigkeit, wenn die Bewegungsrichtungen $AX$ und $AY$ den Rechtwinkel einschließen:

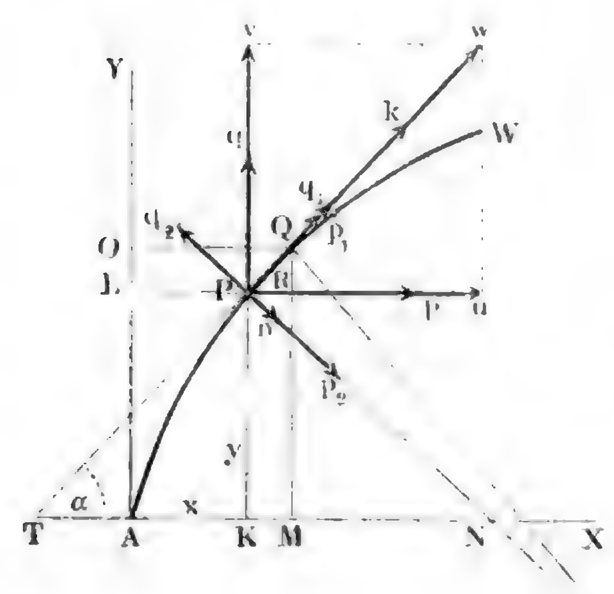
$$3) \quad w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2}} = \frac{\partial s}{\partial t},$$

wo $\partial s$ das Curvenelement $PQ$ bezeichnet, welches nach Art. 32 der analytischen Hülfslehren

$\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ zu setzen ist.

Ebenso ist die Abscissenacceleration nach (§. 20):

Fig. 80.




$$4) \quad p = \frac{\partial u}{\partial t},$$

sowie die Ordinatenacceleration:

$$5) \quad q = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Für den Tangentenwinkel $PTX = QPR = \alpha$, um welchen die Bewegungsrichtung $\overline{Pw}$ von der Abscissenrichtung abweicht, hat man:

$$tang.\, \alpha = \frac{v}{u} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

sowie auch:

$$sin.\, \alpha = \frac{v}{w} = \frac{\partial y}{\partial s} \text{ und}$$

$$cos.\, \alpha = \frac{u}{w} = \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Die Accelerationen $p$ und $q$ lassen sich nach der Tangentialrichtung $PT$ und nach der Normalrichtung $PN$ in die Componenten:

$p_1 = p\, cos.\, \alpha$ und $p_2 = p\, sin.\, \alpha$, sowie

$q_1 = q\, sin.\, \alpha$ und $q_2 = q\, cos.\, \alpha$

zerlegen, woraus sich durch eine andere Zusammensetzung die Tangentialacceleration:

$$k = p_1 + q_1 = p\, cos.\, \alpha + q\, sin.\, \alpha$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{u}{w} + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{v}{w} = \frac{u\,\partial u + v\,\partial v}{w\,\partial t},$$

und die Normalacceleration:

$$n = p_2 - q_2 = p\, sin.\, \alpha - q\, cos.\, \alpha$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{v}{w} - \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{u}{w} = \frac{v\,\partial u - u\,\partial v}{w\,\partial t}$$

ergiebt.

Nun folgt aber aus $u^2 + v^2 = w^2$ durch Differenziiren:

$$u \partial u + v \partial v = w \partial w,$$

daher ist einfach die Tangentialacceleration:

$$6) \quad k = \frac{w \partial w}{w \partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ferner ergiebt sich aus $tang.\alpha = \frac{v}{u}$:

$$\partial tang.\alpha = \frac{u \partial v - v \partial u}{u^2},$$

(s. analyt. Hülfslehren Art. 8), und es ist der Krümmungshalbmesser $CP = CQ$ des Bogenelementes $PQ$, nach Art. 33 der analytischen Hülfslehren:

$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial tang.\alpha}.$$

daher folgt:

$$v \partial u - u \partial v = -u^2 \partial tang.\alpha = \frac{u^2 \partial s^3}{r \partial x^2} = \frac{\partial s^3}{r \partial t^2} = \frac{\partial s}{r} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{w^2 \partial s}{r},$$

und daher die Normalacceleration einfach

$$7) \quad n = \frac{w^2 \partial s}{r w \partial t} = \frac{w}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{w^2}{r}.$$

Endlich folgt:

$$k \partial s = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \partial s = \frac{\partial s}{\partial t} \partial w = w \partial w;$$

woraus sich nun wie in (§. 20):

$$8) \quad \frac{w^2 - c^2}{2} = \int k \partial s$$

ergiebt, wenn man annimmt, daß bei Durchlaufung des Weges $s$ die Geschwindigkeit $c$ in $w$ übergeht. Es ist also auch bei der krummlinigen Bewegung die halbe Differenz der Geschwindigkeitswerthe das Product aus der mittleren Acceleration ($k$) und dem Wege $s$.

Ebenso ist $p \partial x + q \partial y = u \partial u + v \partial v = w \partial w$, also auch noch:

$$9) \quad \frac{w^2 - c^2}{2} = \int (p \partial x + q \partial y) = \int p \partial x + \int q \partial y, \text{ und}$$

$$10) \quad \int k \partial s = \int p \partial x + \int q \partial y, \text{ oder}$$

$$k \partial s = p \partial x + q \partial y.$$

Das Product aus der Tangentialacceleration und dem Curvenelemente ist also gleich der Summe von den Producten aus den Coordinatenaccelerationen und den ihnen entsprechenden Coordinatenelementen.

Beispiel. Ein Körper bewegt sich in der einen Axe $AX$ mit der Geschwindigkeit $u = 12\,t$, und in der anderen Axe $AY$ mit der Geschwindigkeit $v = 4\,t^2 - 9$; man soll die übrigen Verhältnisse der hieraus resultirenden Bewegung ermitteln. Die entsprechenden Coordinatenaccelerationen sind:

$$p = \frac{\partial u}{\partial t} = 12, \text{ und } q = \frac{\partial v}{\partial t} = 8\,t,$$

und die zugehörigen Coordinaten oder Axenwege selbst:

$$x = \int u\,\partial t = \int 12\,t\,\partial t = 6\,t^2, \text{ und}$$

$$y = \int v\,\partial t = \int (4\,t^2 - 9)\,\partial t = \frac{4}{3}\,t^3 - 9\,t,$$

wofern diese Räume mit der Zeit $t = 0$ beginnen. Die Curven- oder Tangentialgeschwindigkeit ist:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{144\,t^2 + (4\,t^2 - 9)^2} = \sqrt{16\,t^4 + 72\,t^2 + 81} = 4\,t^2 + 9,$$

folglich die Tangentialacceleration:

$$k = \frac{\partial w}{\partial t} = 8\,t$$

= der Ordinatenacceleration $q$, und der Curvenweg:

$$s = \int w\,\partial t = \int (4\,t^2 + 9)\,\partial t = \frac{4}{3}\,t^3 + 9\,t.$$

Ferner ist für die Bewegungsrichtung:

$$tang.\,\alpha = \frac{v}{u} = \frac{4\,t^2 - 9}{12\,t} = \frac{\frac{2}{3}\,x - 9}{2\sqrt{6\,x}},$$

daher:

$$\partial\, tang.\,\alpha = \frac{4\,t^2 + 9}{12\,t^2}\,\partial t,$$

und der Krümmungshalbmesser der Bahn:

$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\,\partial\, tang.\,\alpha} = -\frac{(4\,t^2 + 9)^3 \,.\, 12\,t^2}{144\,t^2\,(4\,t^2 + 9)} = -\frac{(4\,t^2 + 9)^2}{12},$$

$$\text{oder } r = -\frac{w^2}{12}.$$

Hiernach ist nun noch die Normalacceleration, wodurch der bewegte Körper die stetige Richtungsänderung erleidet:

$$n = \frac{w^2}{r} = -12, \text{ also constant.}$$

Die Gleichung der Bahncurve folgt, wenn man $t = \sqrt{\frac{x}{6}}$ in der obigen Gleichung für $y$ einsetzt:

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{6}\right)^3} - 9\sqrt{\frac{x}{6}} = \left(\frac{2}{9}\,x - 9\right)\sqrt{\frac{x}{6}}.$$

Die Ordinate $y$ ist ein Maximum für $v = 0$, d. i. für $t^2 = \frac{9}{4}$, also für $t = \frac{3}{2}$, und $x = 6\,.\,t^2 = 6\,.\,\frac{9}{4} = \frac{27}{2}$, und:

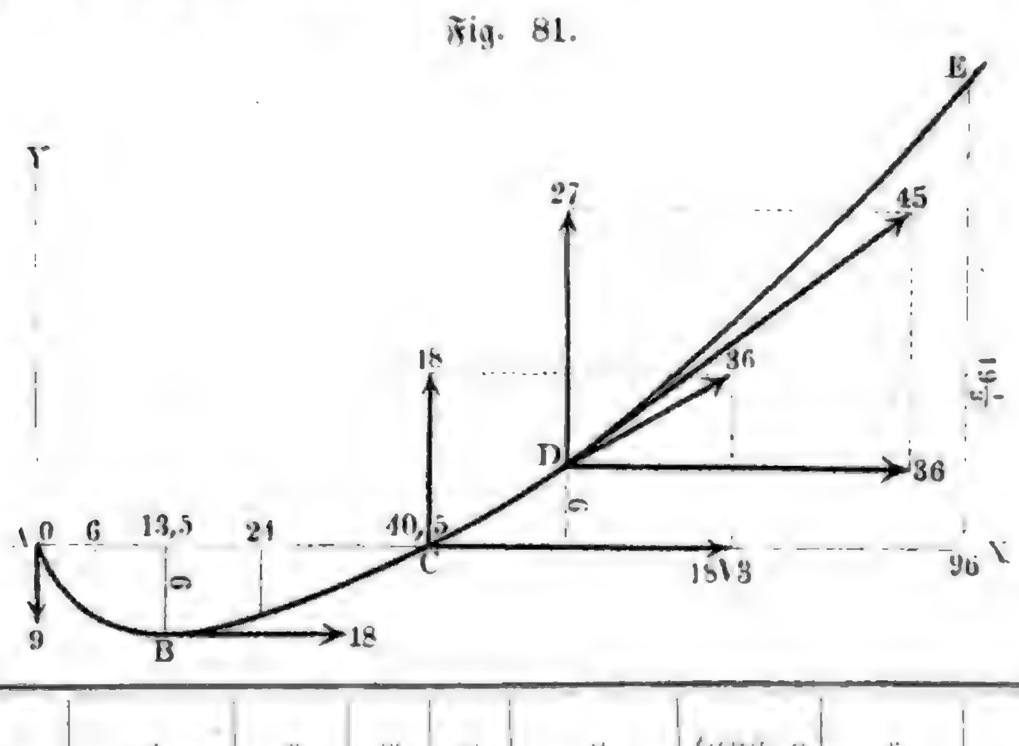
$$y = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2} - 9\cdot\frac{3}{2} = -9.$$

Sie ist dagegen $= 0$, für $t^2 = \frac{27}{4}$, oder $t = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, und $x = \frac{81}{2}$. Es

läuft also die Bahncurve anfangs unter der Abscissenaxe hin, durchschneidet nach der Zeit $t = \sqrt{\frac{27}{4}}$, und zwar bei der Abscisse $x = \frac{81}{2}$, dieselbe, und bleibt von da an über dieser Axe.

Folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der zusammengehörigen Werthe von $t$, $u$, $v$, $w$, $x$, $y$, $tang.\ \alpha$, $r$ und $s$, wonach die entsprechende Bahncurve $ABCDE$ in Fig. 81 construirt ist.

Fig. 81.

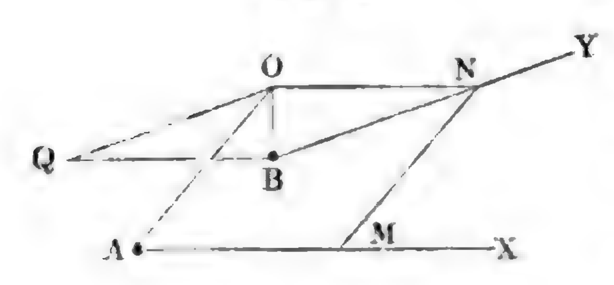



| $t$ | $u$ | $v$ | $w$ | $x$ | $y$ | $tang.\ \alpha$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $-9$ | 9 | 0 | 0 | $\infty$ | $-\frac{27}{4}$ | 0 |
| 1 | 12 | $-5$ | 13 | 6 | $-\frac{23}{3}$ | $-\frac{5}{12}$ | $-\frac{169}{12}$ | $\frac{31}{3}$ |
| $1\frac{1}{2}$ | 18 | 0 | 18 | $\frac{27}{2}$ | $-9$ | 0 | $-27$ | 18 |
| 2 | 24 | 7 | 25 | 24 | $-\frac{22}{3}$ | $\frac{7}{24}$ | $-\frac{625}{12}$ | $\frac{86}{3}$ |
| $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ | $18\sqrt{3}$ | 18 | 36 | $\frac{81}{2}$ | 0 | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $-108$ | $27\sqrt{3}$ |
| 3 | 36 | 27 | 45 | 54 | $+9$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{675}{4}$ | 63 |
| 4 | 48 | 55 | 75 | 96 | $+\frac{148}{3}$ | $\frac{55}{48}$ | $-\frac{1875}{4}$ | $\frac{364}{3}$ |

**Relative Bewegungen.** Bei der gleichzeitigen Bewegung zweier Körper findet eine immerwährende Veränderung in der gegenseitigen Lage, Entfernung u. s. w. derselben statt, welche sich mit Hülfe des Obigen für jeden Zeitpunkt wie folgt bestimmen läßt. Es sei in Fig. 82 (a. f. S.) $A$ der Anfangspunkt des einen Körpers, $B$ der des anderen; jener rücke in der §. 45

Richtung $AX$ in einer gewissen Zeit ($t$) nach $M$, dieser in der Richtung $BY$ in eben dieser Zeit nach $N$; ziehen wir nun $MN$, so erhalten wir in dieser Linie die relative Lage und Entfernung der Körper $A$ und $B$ am Ende dieser Zeit. Legen wir $AO$ parallel mit $MN$ und machen auch $AO = MN$, so wird die Linie $AO$ die gegenseitige Lage der Körper $A$ und $B$ ebenfalls angeben. Ziehen wir noch $ON$, so erhalten wir ein Parallelogramm, in welchem auch $ON = AM$ ist. Machen wir endlich noch $BQ$ parallel und gleich der $NO$ und ziehen $OQ$, so erhalten wir ein neues Parallelogramm $BNOQ$, in welchem die eine Seite $BN$ der absolute Weg ($y$) des zweiten Körpers, die andere Seite $BQ$ der nach entgegengesetzter Richtung gelegte Weg ($x$) des ersten Körpers, und der vierte Eckpunkt $O$ der relative Ort des zweiten Körpers ist, wofern er nämlich auf den als unveränderlich anzusehenden Ort des ersten Körpers bezogen wird.

Fig. 82.

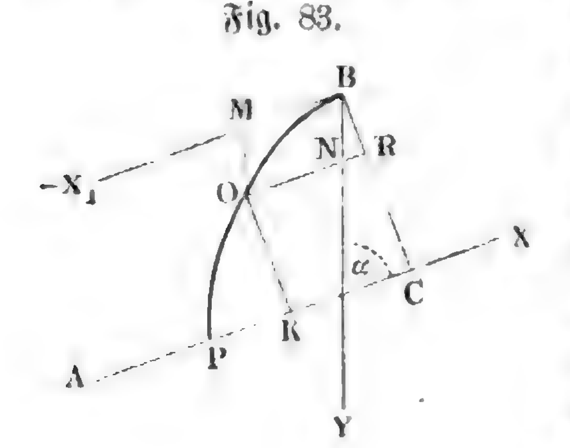



Man findet also den relativen Ort $O$ eines bewegten Körpers ($B$), wenn man diesem Körper außer seiner eigenen Bewegung ($BN$) noch diejenige $AM$ des Körpers ($A$), worauf man den Ort bezieht, in umgekehrter Richtung, also $BQ$, beilegt, und nun nach den gewöhnlichen Regeln, z. B. mit Hülfe eines Parallelogrammes $BNOQ$, diese Bewegungen zusammensetzt.

§. 46 Sind die Bewegungen der Körper $A$ und $B$ gleichförmig, so kann man für $AM$ und $BN$ die Geschwindigkeiten $c$ und $c_1$, d. i. die Wege in einer Secunde, einsetzen. Man erhält deshalb die relative Geschwindigkeit des einen Körpers, wenn man demselben außer seiner eigenen absoluten Geschwindigkeit auch noch die des Körpers, auf welchen man die erste Geschwindigkeit bezieht, in entgegengesetzter Richtung beilegt. Auch findet dasselbe Verhältniß mit den Accelerationen statt.

Bewegt sich z. B. ein Körper $A$, Fig. 83, in der Richtung $AC$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $c$, und ein Körper $B$ in der Richtung $BY$, welche mit $BX$ den Winkel $\alpha$ einschließt, bei Null Anfangsgeschwindigkeit mit der constanten Acceleration $p$, so kann man auch annehmen, daß $A$ still stehe und $B$ außer der Acceleration $p$ noch die Geschwindigkeit ($-c$) in der Richtung $B\overline{X}_1 \parallel AX$ besitze, wobei er folglich relativ eine parabolische Bahn $BOP$ durchläuft. Die in der Zeit $t$ durch-

Fig. 83.



laufenen Wege in den Richtungen $BY$ und $BX_1$ sind: $BN = \frac{pt^2}{2}$ und $BM = ct$, wovon sich die erstere in die Componenten $NR = \frac{pt^2}{2} \cos. \alpha$ und $BR = \frac{pt^2}{2} \sin. \alpha$ zerlegen läßt, welche parallel und rechtwinkelig zu $AX$ gerichtet sind. Sind nun $AC = a$ und $CB = b$ die anfänglichen Coordinaten des Punktes $B$ in Hinsicht auf $A$, sowie $AK = x$ und $KO = y$ die Coordinaten desselben nach der Zeit $t$, so hat man, da $AK = AC - ON - NR$ und $KO = CB - BR$ ist,

$$x = a - ct - \frac{pt^2}{2} \cos. \alpha \text{ und } y = b - \frac{pt^2}{2} \sin. \alpha$$ und die entsprechenden relativen Geschwindigkeiten:

$$u = -c - pt \cos. \alpha \text{ und } v = -pt \sin. \alpha.$$

Aus der Abscisse $x$ bestimmt sich die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2(a-x)}{p \cos. \alpha} + \left(\frac{c}{p \cos. \alpha}\right)^2} - \frac{c}{p \cos. \alpha},$$

dagegen aus der Ordinate $y$:

$$t = \sqrt{\frac{2(b-y)}{p \sin. \alpha}}.$$

Läuft der Körper $B$ in der Linie $AX$ dem Körper $A$ entgegen, so ist sowohl $b = 0$, als auch $\alpha = 0$, daher

$$t = \sqrt{\frac{2(a-x)}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} - \frac{c}{p},$$

und setzt man $x = 0$, so folgt die Zeit, nach welcher die Körper zusammenstoßen:

$$t = \sqrt{\frac{2a}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} - \frac{c}{p} = \frac{\sqrt{2ap + c^2} - c}{p}.$$

Läuft dagegen der Körper $B$ in der Linie $AX$ dem Körper $A$ voraus, so ist $\alpha = 180^0$, daher die Entfernung desselben vom letzten Körper: $x = a - ct + \frac{pt^2}{2}$, und umgekehrt, die Zeit, an deren Ende die Körper um $x$ von einander entfernt sind:

$$t = \pm \sqrt{-\frac{2(a-x)}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} + \frac{c}{p}.$$

Die entsprechende Geschwindigkeit $u = -c + pt$ ist $= 0$, und die Entfernung $x$ ein Minimum für $t = \frac{c}{p}$, und zwar $x = a - \frac{c^2}{2p}$.

Für jeden anderen Werth von $x$ giebt es zwei Zeitwerthe, den einen größer und den anderen kleiner als $\frac{c}{p}$.

Anmerkung. Die vorstehende Theorie der relativen Bewegung findet sowohl in der Himmels- als auch in der Maschinenmechanik vielfache Anwendung. Behandeln wir hier nur folgenden Fall. Ein Körper $A$, Fig. 84, bewegt sich in der Richtung $AX$ mit der Geschwindigkeit $c_1$, und soll von einem anderen Körper $B$ getroffen werden, welcher die Geschwindigkeit $c_2$ hat; welche Richtung ist demselben zu geben? Ziehen wir $AB$, tragen wir $c_1$ an $B$ in umgekehrter Richtung, und vollenden wir aus $c_1$ und $c_2$ ein Parallelogramm $Bc_1cc_2$, dessen Diagonale $c$ auf $AB$ fällt, so erhalten wir in der Richtung der Seite $\overline{Bc_2} = c_2$ desselben zugleich die gesuchte Richtung $BY$, in welcher der Körper $B$ zu bewegen ist, damit er den Körper $A$ treffe, und zugleich in dem Durchschnittspunkte $C$ der beiden Richtungen $AX$ und $BY$ die Stelle des Zusammenstoßes. Ist $\alpha$ der Winkel $BAX$, um welchen $AX$, und $\beta$ der Winkel $ABY$, um welchen $BY$ von $AB$ abweicht, so hat man:

$$\frac{sin.\,\beta}{sin.\,\alpha} = \frac{c_1}{c_2}.$$

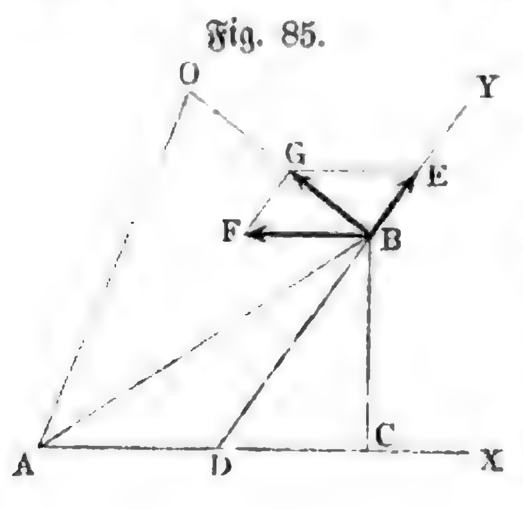
Diese Formel findet auch ihre Anwendung in der Aberration des Sternenlichtes, welche aus der Zusammensetzung der Geschwindigkeit $c_1$ der um die Sonne laufenden Erde $A$ und der Geschwindigkeit $c_2$ des Sternenlichtes $B$ hervorgeht. Es ist $c_1$ circa 4 Meilen und $c_2 = 42000$ Meilen, folglich:

Fig. 84.

$$sin.\beta = \frac{c_1}{c_2} sin.\alpha = \frac{4\, sin.\,\alpha}{42000} = \frac{sin.\,\alpha}{10500},$$

und hiernach die Aberration oder der Winkel $ABC = \beta$, um welchen die Richtung $AB$, in welcher man den als unendlich entfernt anzusehenden Stern sieht, von der Richtung $BC$ oder $AD$ abweicht, in welcher er sich wirklich befindet, $\beta = 20''\, sin.\,\alpha$; also für $\alpha = 90^0$, d. i. für einen Stern, welcher sich winkelrecht über der Erdbahn (in dem sogenannten Ekliptikpol) befindet, $\beta = 20''$. In Folge dieser Abweichung sieht man also einen Stern in der Bewegungsrichtung der Erde stets 20″ von seinem wahren Orte abgerückt, und es beschreibt folglich ein Stern in der Nähe des Ekliptikpoles im Laufe eines Jahres scheinbar einen kleinen Kreis von 20 Secunden Halbmesser um seinen wahren Ort. Bei Sternen, welche in der Ebene der Erdbahn stehen, bildet diese scheinbare Bewegung eine gerade Linie, und bei den übrigen Sternen gehen diese scheinbaren Bewegungen in Ellipsen vor sich.

Fig. 85.




Beispiel. Ein Dampfwagenzug fährt auf der Schienenbahn $AX$, Fig. 85, von $A$ aus mit 35 Fuß Geschwindigkeit; ein anderer gleichzeitig von $B$ aus auf einer Bahn $BY$, welche mit der ersteren den

Winkel $BDX = 56^0$ einschließt, mit 20 Fuß Geschwindigkeit. Wenn nun die anfänglichen Abstände $AC = 30000$ Fuß und $CB = 24000$ Fuß betragen, wie groß ist die Entfernung $AO$ beider Wagenzüge nach einer Viertelstunde? Aus der absoluten Geschwindigkeit $BE = c_1 = 20$ Fuß des zweiten Zuges, der umgekehrten Geschwindigkeit $BF = c = 35$ Fuß des ersten Zuges und dem eingeschlossenen Winkel $EBF = \alpha = 180^0 - BDC = 180^0 - 56^0 = 124^0$ folgt die relative Geschwindigkeit des zweiten Zuges:

$$BG = \sqrt{c^2 + c_1^2 + 2\,c\,c_1 \cos.\alpha} = \sqrt{35^2 + 20^2 - 2\,.\,35\,.\,20\,.\cos.56^0}$$
$$= \sqrt{1225 + 400 - 1400 \cos.56^0} = \sqrt{1625 - 782{,}9} = \sqrt{842{,}1} = 29{,}02 \text{ Fuß}.$$

Für den Winkel $GBF = \varphi$, den die Richtung der relativen Bewegung mit der ersten Bewegungsrichtung einschließt, ist:

$$\sin.\varphi = \frac{c_1 \sin.56^0}{29{,}02} = \frac{20\,.\,0{,}8290}{29{,}02};\ Log.\sin.\varphi = 0{,}75690 - 1, \text{ daher } \varphi = 34^0, 50'.$$

Der in 15 Minuten $= 900$ Sec. relativ durchlaufene Weg ist $BO = 29{,}02\,.\,900 = 26118$ Fuß, die Entfernung $AB = \sqrt{(30000)^2 + (24000)^2} = 38419$ Fuß, der Winkel $BAC = ABF$, da dessen Tangente $\frac{24000}{30000} = 0{,}8$ ist, hat den Werth $\psi = 38^0\,40'$, daher ist der Winkel $ABO = \varphi + \psi = 34^0\,50' + 38^0\,40' = 73''\,30'$, und die Entfernung der beiden Wagenzüge nach 15 Minuten:

$$AO = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 - 2\,AB\,.\,BO \cos.ABO}$$
$$= \sqrt{38419^2 + 26118^2 - 2\,.\,38419\,.\,26118 \cos.73^0\,30'}$$
$$= \sqrt{1588190000} = 39850 \text{ Fuß}.$$

## Zweiter Abschnitt.

# Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

## Erstes Capitel.

### Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

§. 47 **Mechanik.** Die Mechanik (franz. mécanique; engl. mechanics) ist die Wissenschaft, welche von den Bewegungsgesetzen materieller Körper handelt. Sie ist in sofern eine Anwendung der Phoronomie oder Cinematik auf die Körper der Außenwelt, als die letztere sich nur mit der Bewegung geometrischer Körper befaßt und die Ursachen der Bewegung außer Betracht läßt.

Die Mechanik ist ein Theil der Naturlehre (franz. physique générale; engl. natural-philosophy) oder der Lehre von den Gesetzen, nach welchen die Veränderungen in der Körperwelt erfolgen, nämlich derjenige Theil, welcher sich mit den aus meßbaren Bewegungen hervorgegangenen Veränderungen in der materiellen Welt beschäftigt.

§. 48 **Kraft.** Kraft (franz. force; engl. force) ist die Ursache der Bewegung oder der Bewegungsveränderung materieller Körper. Jede Bewegungsveränderung, z. B. jede Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers ist als die Wirkung einer Kraft anzusehen. Aus diesem Grunde messen wir denn auch jedem frei fallenden Körper eine Kraft, die sogenannte Schwerkraft, bei, weil derselbe seine Geschwindigkeit unaufhörlich ändert. Auf der anderen Seite ist aus der Ruhe oder aus der Unveränderlichkeit im Bewegungszustande eines Körpers noch nicht auf die Abwesenheit von Kräften zu schließen; denn es können sich die Kräfte eines Körpers gegenseitig aufheben, ohne eine Wirkung übrig zu lassen. Die Schwerkraft, mit welcher ein Körper zur Erde niederfällt, besitzt derselbe auch noch, wenn er auf einem Tische ruht, es wird aber hier ihre Wirkung durch die Festigkeit des Tisches oder einer anderen Unterlage aufgehoben.

§. 49

**Gleichgewicht.** Ein Körper ist im Gleichgewicht (franz. équilibre; engl. equilibrium), oder die Kräfte eines Körpers halten einander das Gleichgewicht, wenn dieselben ohne eine Wirkung übrig zu lassen, oder ohne Bewegung zu erzeugen oder zu verändern, einander aufheben oder vernichten.

Bei einem an einem Faden aufgehängten Körper ist z. B. die Schwerkraft in demselben mit der Cohäsion des Fadens im Gleichgewicht. Das Gleichgewicht unter Kräften wird aufgehoben, und es entsteht Bewegung, wenn man eine von den Kräften entfernt oder auf andere Weise aufhebt. So geht z. B. die durch ein Gewicht gebogene Stahlfeder in Bewegung über, wenn dieses Gewicht weggenommen wird, weil nun diejenige Kraft der Feder, welche man ihre Elasticität nennt, allein noch wirkt.

Statik (franz. statique; eng. statics) ist derjenige Theil der Mechanik, welcher von den Gesetzen des Gleichgewichts handelt; die Dynamik (franz. dynamique; engl. dynamics) hingegen handelt von den Kräften, inwiefern sie Bewegungen hervorbringen.

§. 50

**Eintheilung der Kräfte.** Nach ihren Wirkungen sind die Kräfte entweder bewegende (franz. forces motrices, puissances; engl. moving forces) oder widerstehende (Widerstände, franz. résistances; engl. resistances). Jene bringen Bewegungen hervor, oder vermögen dieselben zu erzeugen, diese hingegen können dieselben nur verhindern und mäßigen. Die Schwerkraft, die Elasticität einer Stahlfeder u. s. w. gehören zu den bewegenden Kräften, die Reibung, Festigkeit der Körper u. s. w. sind widerstehende Kräfte oder Widerstände, weil durch sie nur Bewegungen verhindert oder vermindert oder bewegende Kräfte aufgehoben, aber keineswegs Bewegungen hervorgerufen werden können. Die bewegenden Kräfte theilt man wieder ein in beschleunigende (franz. accéleratrices; engl. accelerating) und in verzögernde (franz. retardatrices; engl. retarding). Jene erzeugen eine positive, diese eine negative Acceleration, durch jene wird also eine beschleunigte, durch diese eine verzögerte Bewegung hervorgebracht. Die Widerstände sind stets verzögernde Kräfte, aber nicht alle verzögernde Kräfte sind widerstehende. Bei einem senkrecht in die Höhe geworfenen Körper wirkt z. B. die Schwerkraft verzögernd, deswegen ist aber die Schwerkraft noch keine widerstehende Kraft, denn beim darauf folgenden Herabfallen des Körpers nimmt sie wieder die Stelle einer bewegenden Kraft ein.

Noch unterscheidet man beständige (constante, franz. constantes; engl. uniform) und veränderliche Kräfte (franz. variables; engl. variable) von einander. Während constante Kräfte immer auf gleiche Weise wirken und eben deshalb in gleichen Zeittheilchen gleiche Wirkungen, d. i. gleiche Zusätze oder Abnahmen in der Geschwindigkeit hervorbringen, sind bei den

veränderlichen Kräften diese Wirkungen zu verschiedenen Zeiten verschieden; während also aus jenen Kräften gleichförmig veränderte Bewegungen hervorgehen, entsprechen diesen Kräften ungleichförmig beschleunigte oder ungleichförmig verzögerte Bewegungen.

§. 51 **Druck.** Druck (franz. pression; engl. pressure) und Zug (franz. traction; engl. traction) sind die ersten Wirkungen der Kräfte auf materielle Körper. Vermöge derselben werden Körper zusammengedrückt und ausgedehnt, oder überhaupt in ihrer Form verändert.

Der durch die lothrecht abwärts wirkende Schwerkraft hervorgebrachte Druck oder Zug, welchen die Unterlage eines schweren Körpers oder der Faden, woran ein Körper aufgehängt ist, auszuhalten hat, heißt das Gewicht (franz. poids; engl. weight) des Körpers.

Druck und Zug, und also auch Gewicht sind Größen eigenthümlicher Art, die zwar nur unter einander verglichen werden, aber als Wirkungen der Kräfte zum Maße derselben dienen können.

Die einfachsten und deshalb gewöhnlichsten Mittel zum Messen der Kräfte sind Gewichte.

§. 52 **Gleichheit der Kräfte.** Zwei Gewichte oder auch zwei Drücke oder Züge, und also auch die Kräfte, welche letzteren entsprechen, sind gleich, wenn man eine durch die andere ersetzen kann, ohne dadurch eine andere Wirkung zu erhalten. Wenn z. B. eine Stahlfeder durch ein angehängtes Gewicht $G$ genau so gebogen wird wie durch ein anderes, genau ebenso angehängtes Gewicht $G_1$, so sind diese Gewichte, und deshalb auch die Schwerkräfte in beiden Körpern, gleich. Wenn ebenso eine belastete Waage (franz. und engl. balance) sowohl durch das Gewicht $G$ als auch durch ein anderes Gewicht $G_1$, welches man an die Stelle von $G$ setzt, zum Einspielen gebracht wird, so sind diese Gewichte $G$ und $G_1$ gleich, die Waage mag übrigens gleich- oder ungleicharmig, und die übrige Belastung derselben mag groß oder klein sein.

Ein Druck oder Gewicht (Kraft) ist 2, 3, 4 u. s. w. und überhaupt $n$mal so groß als ein anderer Druck u. s. w., wenn er dieselbe Wirkung hervorbringt als 2, 3, 4 . . . $n$ Drücke der zweiten Art zusammen. Wenn eine übrigens beliebig belastete Waage durch ein Gewicht ($G$) ebenso zum Einspielen gebracht wird, als durch Auflegen von 2, 3, 4 u. s. w. gleichen Gewichten ($G_1$), so ist jenes Gewicht ($G$) 2, 3, 4 u. s. w. mal so groß als dieses Gewicht ($G_1$).

§. 53 **Materie.** Materie (franz. matière; engl. matter) ist Dasjenige, wodurch die Körper der Außenwelt, die wir, im Gegensatz zu den Körpern der Geometrie, auch materielle oder physische Körper nennen, auf unsere

Sinne wirken. Masse (franz. und engl. masse) ist das Quantum der einen Körper bildenden Materie.

Körper von gleichem Volumen (franz. und engl. volume) oder gleichem geometrischen Inhalte haben meist verschiedene Gewichte, wenn sie aus verschiedenartigen Materien bestehen. Man kann daher aus dem Volumen eines Körpers auf dessen Gewicht noch nicht schließen; es ist dazu vielmehr nöthig, daß man das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikfuß, Cubikmeter u. s. w. der Materie des Körpers kenne.

**Gewichtseinheit.** Das Messen von Gewichten oder Kräften besteht §. 54 in einer Vergleichung derselben mit einem gegebenen und unveränderlichen, zur Einheit angenommenen Gewichte. Die Auswahl dieser Gewichts- oder Krafteinheit ist zwar an sich willkürlich, es ist jedoch praktisch vortheilhaft, hierzu das Gewicht von einem allgemein verbreiteten Körper bei einem der gebräuchlichen Raumeinheit gleichen Volumen hierzu auszuwählen.

Eine derartige Gewichtseinheit ist das Gramm, welches durch das Gewicht von einem Cubikcentimeter reinen Wassers im Zustande der größten Dichtigkeit (bei ungefähr 4° C. Temperatur) gegeben wird. Aber auch das alte preußische Pfund ist eine auf das Gewicht des Wassers zurückgeführte Einheit, es wiegt nämlich ein preußischer Cubikfuß destillirten Wassers im luftleeren Raume und bei 15° R. Temperatur, 66 preußische Pfund. Nun ist aber ein preußischer Fuß = 139,13 Pariser Linien = 0,3137946 Meter, es folgt daher ein preußisches Pfund = 467,711 Gramm. Das preußische Neu- oder Zollpfund ist genau $\frac{1}{2}$ Kilogramm.

**Trägheit.** Trägheit oder Beharrungsvermögen (franz. inertie; §. 55 engl. inertia) ist diejenige Eigenschaft der Materie, vermöge welcher dieselbe durch sich allein weder Bewegung annehmen, noch erhaltene Bewegung abändern kann. Jeder materielle Körper bleibt so lange in Ruhe, als keine Kraft auf ihn einwirkt, und jeder einmal in Bewegung gesetzte materielle Körper bleibt in einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung, so lange als er ohne Einwirkung einer Kraft ist. Wenn also in dem Bewegungszustande eines materiellen Körpers Veränderungen vor sich gehen, wenn ein Körper seine Bewegungsrichtung verändert, oder wenn er eine größere oder kleinere Geschwindigkeit annimmt, so ist dieselbe nicht dem Körper, als einem gewissen Quantum von Materie, an sich beizumessen, sondern es muß eine fremde Ursache, d. i. eine Kraft, dieselbe herbeigeführt haben.

Insofern bei jeder Aenderung im Bewegungszustande eines materiellen Körpers eine Kraftentwickelung vor sich geht, insofern läßt sich die Trägheit auch den Kräften beizählen.

Könnten wir die auf eine bewegte Masse wirkenden Kräfte gänzlich entfernen, so würde dieselbe sich ohne Ende gleichförmig fortbewegen; wir finden

aber eine solche gleichförmige Bewegung nirgends, weil es uns nicht möglich ist, eine Masse der Einwirkung aller Kräfte zu entziehen. Bewegt sich eine Masse auf einem horizontalen Tische, so übt zwar die nun vom Tische aufgenommene Schwerkraft eine unmittelbare Wirkung auf den Körper nicht aus, allein aus dem Drucke des Körpers gegen den Tisch entsteht ein Widerstand, den wir in der Folge unter dem Namen Reibung näher kennen lernen werden, welcher dem bewegten Körper unaufhörlich Geschwindigkeit entzieht, weshalb er aus diesem Grunde eine verzögerte Bewegung annimmt und endlich zur Ruhe übergeht. Indessen auch die Luft setzt dem bewegten Körper einen Widerstand entgegen, und wenn auch die Reibung des Körpers ganz beseitigt werden könnte, so würde schon dieses Hindernisses wegen eine allmälige Abnahme an Geschwindigkeit eintreten. Wir finden aber, daß der Verlust an Geschwindigkeit um so kleiner wird, die Bewegung sich also um so mehr und mehr einer gleichförmigen nähert, je mehr wir diese Widerstände der Zahl und Stärke nach vermindern, und können daraus schließen, daß bei Beseitigung aller bewegenden Kräfte und Widerstände eine gänzlich gleichförmige Bewegung eintreten muß.

§. 56 **Kräftemaass.** Die Kraft ($P$), welche eine träge Masse ($M$) accelerirt, ist proportional der Acceleration ($p$) und proportional der Masse ($M$) selbst; sie wächst bei einerlei Massen wie die in unendlich kleinen Zeiten erlangten Zunahmen an Geschwindigkeit und nimmt bei gleichen Geschwindigkeitszunahmen in demselben Maße zu, als die Massen größer werden. Die $m$fache Acceleration einer und derselben Masse oder gleicher Massen erfordert eine $m$fache Kraft und die $n$fache Masse macht bei einerlei Acceleration auch die $n$fache Kraft nöthig.

Da wir aber bis jetzt ein Maß der Massen noch nicht ausgewählt haben, so können wir deshalb sogleich:

$$P = Mp,$$

die Kraft gleich dem Producte aus Masse und Acceleration annehmen, und zugleich statt Kraft ihre Wirkung, d. i. den von ihr hervorgebrachten Druck einsetzen.

Die Richtigkeit dieses allgemeinen Bewegungsgesetzes läßt sich allerdings wohl durch directe Versuche darthun, indem man z. B. gleiche und verschiedene, auf einem horizontalen Tische bewegliche Massen durch gebogene Stahlfedern fortschnellen läßt, indessen liegt dieselbe auch schon darin, daß alle aus diesem Gesetze gemachten Folgerungen und entwickelten Regeln für zusammengesetzte Bewegungen den Beobachtungen und Erscheinungen in der Natur vollkommen entsprechen.

§. 57 **Masse.** Alle Körper fallen an einem und demselben Orte der Erde und im luftleeren Raume gleich schnell nieder, nämlich mit der unveränderlichen

Acceleration $g = 9{,}81$ Meter $= 31^1/_4$ Fuß (§. 15); ist daher die Masse eines Körpers $= M$ und das die Schwerkraft desselben messende Gewicht $= G$, so hat man nach der letzten Formel auch:

$$G = Mg,$$

d. i. das Gewicht eines Körpers ist ein Product aus dessen Masse und der Acceleration der Schwere, und umgekehrt:

$$M = \frac{G}{g},$$

d. i. Masse eines Körpers ist Gewicht desselben dividirt durch die Beschleunigung der Schwere, oder Masse ist dasjenige Gewicht eines Körpers, welches derselbe haben würde, wenn die Acceleration der Schwere = Eins, z. B. ein Meter, ein Fuß u. s. w. wäre. An dem Punkte auf oder in der Nähe der Erde oder eines anderen Weltkörpers, wo die Körper nicht mit 9,81 Meter, sondern mit 1 Meter Geschwindigkeit (nach der ersten Secunde) niederfallen, wird hiernach die Masse, oder viel mehr nur das Maß derselben, durch das Gewicht des Körpers unmittelbar angegeben.

Je nachdem wir die Beschleunigung der Schwere in Metern oder Fußen ausdrücken, haben wir nun die Masse:

$$M = \frac{G}{9{,}81} = 0{,}1019\, G \text{ oder}$$

$$M = \frac{G}{31{,}25} = 0{,}032\, G.$$

Hiernach ist z. B. die Masse von einem 20 Pfund schweren Körper, $M = 0{,}032 . 20 = 0{,}64$ Pfund, und umgekehrt, das Gewicht einer Masse von 20 Pfund, $G = 31{,}25 . 20 = 625$ Pfund.

§. 58 Wenn wir die Beschleunigung ($g$) der Schwere als unveränderlich annehmen, so folgt, daß die Masse eines Körpers dem Gewichte desselben vollkommen proportional ist, daß also für die Massen $M$ und $M_1$ mit den Gewichten $G$ und $G_1$ ist:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{G}{G_1}.$$

Wir erhalten hiernach das Gewicht als Maß der Masse eines Körpers, so daß also ein Körper um so mehr Masse hat, je größer sein Gewicht ist.

Allerdings ist die Beschleunigung der Schwere etwas veränderlich; sie wird größer, je näher man den Erdpolen kommt, und nimmt um so mehr ab, je mehr man sich dem Erdäquator nähert, ist also an den Polen am größten und am Aequator am kleinsten. Auch nimmt sie ab, je mehr ein Körper über dem Niveau des Meeres befindlich ist, und verändert sich mit

der Tiefe des fallenden Körpers unter dem Niveau des Meeres. Da nun aber eine Masse, so lange man zu ihr Nichts hinzunimmt und von ihr Nichts wegnimmt, etwas Unveränderliches ist, also auf allen Punkten der Erde und selbst außerhalb derselben, z. B. auf dem Monde, noch dieselbe bleibt, so folgt daraus, daß auch das Gewicht eines Körpers veränderlich und von dem Orte der Körper abhängig, überhaupt aber der dem Orte entsprechenden Acceleration der Schwere proportional, oder $\frac{G}{G_1} = \frac{g}{g_1}$ sein müsse.

Es wird also hiernach eine und dieselbe Stahlfeder durch ein und dasselbe Gewicht an verschiedenen Orten der Erde, verschieden gebogen, am Aequator und auf hohen Bergen am schwächsten, in der Nähe der Erdpole und im Niveau des Meeres am stärksten.

§. 59 **Dichtigkeit.** Dichtigkeit (franz. densité; engl. density) ist die Stärke der Raumerfüllung der Materie. Ein Körper ist um so dichter, je mehr Materie derselbe in seinem Raume einschließt. Das natürliche Maß der Dichtigkeit ist dasjenige Quantum an Materie (diejenige Masse), welches die Volumeneinheit ausfüllt; weil sich aber die Materie nur durch Gewichte messen läßt, so dient das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikmeter oder Cubikfuße, einer zweiten Materie als Maß der Dichtigkeit derselben.

Hiernach ist z. B. die Dichtigkeit des Wassers = 61,75 Neupfund und die des Gußeisens = 448 Pfund, weil ein Cubikfuß Wasser 61¾, und ein Cubikfuß Gußeisen 448 Pfund wiegt.

Aus dem Volumen $V$ eines Körpers und der Dichtigkeit $\gamma$ desselben folgt sein Gewicht $G = V\gamma$.

Volumen mal Dichtigkeit giebt also das Gewicht eines Körpers.

Die Dichtigkeit der Körper ist entweder gleichförmig (franz. uniforme, homogène; engl. uniform) oder ungleichförmig (franz. variable, hétérogène; engl. variable), je nachdem gleiche Volumentheile desselben gleich oder verschieden schwer sind. Es ist z. B. die Dichtigkeit der einfachen Metalle gleichförmig oder es sind die Metalle homogen, weil gleiche, übrigens noch so kleine Theile derselben, gleichviel wiegen; hingegen ist Granit ein Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit, weil er aus Theilen von verschiedener Dichtigkeit besteht.

Beispiele. 1) Wenn die Dichtigkeit des Bleies 700 Pfund beträgt, so wiegen 3,2 Cubikfuß Blei: $G = V\gamma = 700 \,.\, 3,2 = 2240$ Pfund. 2) Ist die Dichtigkeit des Stabeisens = 472 Pfund, so hat ein Stück desselben von 205 Pfund Gewicht das Volumen $V = \frac{G}{\gamma} = \frac{205}{472} = 0,4343$ Cubikfuß $= 0,4343 \,.\, 1728 = 750,5$

Cubikzoll. 3) Wiegen 10,4 Cubikfuß vollkommen mit Wasser angeschwängertes Tannenholz 577 Pfund, so ist die Dichtigkeit dieses Holzes:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{577}{10,4} = 55,5 \text{ Pfund.}$$

**Specifisches Gewicht.** Specifisches, auch eigenthümliches Gewicht (franz. poids spécifique; engl. specific-weight, specific gravity) ist das Verhältniß der Dichtigkeit eines Körpers zu der als Einheit angenommenen Dichtigkeit eines anderen, gewöhnlich des Wassers. Nun ist aber die Dichtigkeit gleich dem Gewichte der Volumeneinheit; daher ist auch specifisches Gewicht das Verhältniß zwischen dem Gewichte eines Körpers zu dem eines anderen, z. B. des Wassers, bei gleichem Volumen. §. 60

Um das specifische Gewicht nicht mit dem Gewichte zu verwechseln, welches einem Körper von bestimmter Größe zukommt, pflegt man das letztere absolutes Gewicht (franz. poids absolu; engl. absolute-weight) zu nennen.

Ist $\gamma$ die Dichtigkeit der Materie (des Wassers), auf welche wir die Dichtigkeiten anderer Materien beziehen, und $\gamma_1$ die Dichtigkeit irgend einer dieser Materien, deren specifisches Gewicht wir durch $\varepsilon$ bezeichnen wollen, so gelten die Formeln:

$$\varepsilon = \frac{\gamma_1}{\gamma} \text{ und } \gamma_1 = \varepsilon \,.\, \gamma,$$

es ist also die Dichtigkeit eines Stoffes gleich: specifisches Gewicht desselben mal Dichtigkeit des Wassers.

Das absolute Gewicht $G$ einer Masse vom Volumen $V$ und specifischem Gewichte $\varepsilon$ ist:

$$G = V\gamma_1 = V\varepsilon\gamma.$$

Beispiele. 1) Die Dichtigkeit des reinen Silbers ist 676,5 Pfund und die des Wassers = 66 Altpfund, folglich das specifische Gewicht des ersteren (in Hinsicht auf Wasser) $= \frac{676,5}{66} = 10,25$, d. h. jede Silbermasse ist $10\frac{1}{4}$ mal so schwer als eine ebenso viel Raum einnehmende Wassermasse. 2) Das specifische Gewicht des Quecksilbers = 13,598 angenommen und die Dichtigkeit des Wassers = 61,74 Neupfund gesetzt, folgt die Dichtigkeit desselben,

$$\gamma = 13,598 \,.\, 61,74 = 839,54 \text{ Neupfund;}$$

eine Masse von 35 Cubikzoll desselben wiegt, da 1728 Cubikzoll einen Cubikfuß geben:

$$G = 839,54 \,.\, V = \frac{839,54 \,.\, 35}{1728} = 17,005 \text{ Neupfund.}$$

Anmerkung. Der Gebrauch des französischen Maßes und Gewichtes gewährt bei diesen Rechnungen den Vortheil, daß man die Multiplication von $\varepsilon$ und $\gamma$ durch bloßes Verrücken des Decimalstriches vollziehen kann, weil ein Cubikcentimeter Wasser ein Gramm und ein Cubikmeter eine Million Gramm oder 1000 Kilogramm wiegt. Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist hiernach für das französische Maß und Gewicht $\gamma_1 = 13,598 \,.\, 1000 = 13598$ Kilogramm, d. i. ein Cubikmeter Quecksilber wiegt 13598 Kilogramm.

§. 61 Folgende Tabelle enthält die specifischen Gewichte von einigen, vorzüglich in der praktischen Mechanik in Anwendung kommenden Körpern. Eine vollständige Zusammenstellung dieser Gewichte giebt der „Ingenieur“, S. 310.

| | |
|---|---|
| Mittleres specifisches Gewicht der getrockneten Laubhölzer = 0,659 | **Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Bruchsteinen:** |
| mit Wasser gesättigt . = 1,110 | frisch . . . . . . . . . . . = 2,46 |
| Mittleres specifisches Gewicht der getrockneten Nadelhölzer = 0,453 | trocken . . . . . . . . . . = 2,40 |
| mit Wasser gesättigt . . = 0,839 *) | **Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Sandsteinen:** |
| Quecksilber . . . . . . . = 13,56 | frisch . . . . . . . . . . . = 2,12 |
| Blei . . . . . . . . . . = 11,33 | trocken . . . . . . . . . . = 2,05 |
| Kupfer, gegossen und dicht . = 8,75 | **Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Ziegelsteinen:** |
| » geschmiedet . . . = 8,97 | frisch . . . . . . = 1,55 bis 1,70 |
| Messing . . . . . . . . . = 8,55 | trocken . . . . . . = 1,47 » 1,59 |
| Eisen, Gußeisen, weißes . = 7,50 | **Erde, lehmige, festgestampft:** |
| » » graues . = 7,10 | frisch . . . . . . . . . . . = 2,06 |
| » » halbirtes = 7,06 | trocken . . . . . . . . . . = 1,93 |
| » Stabeisen . . . . . = 7,60 | **Gartenerde:** |
| Zink, gegossen . . . . . . = 7,05 | frisch . . . . . . . . . . . = 2,05 |
| » gewalzt . . . . . . = 7,54 | trocken . . . . . . . . . . = 1,63 |
| Granit . . . . . = 2,50 bis 3,05 | Trockene magere Erde . . = 1,34. |
| Gneiß . . . . . = 2,39 » 2,71 | |
| Kalkstein . . . . = 2,40 » 2,86 | |
| Sandstein . . . . = 1,90 » 2,70 | |
| Ziegelstein . . . . = 1,40 » 2,22 | |

§. 62 **Aggregatzustände.** Die Körper erscheinen uns nach dem verschiedenen Zusammenhange ihrer Theile in drei Hauptzuständen, die wir die Aggregatzustände derselben nennen. Sie sind entweder fest (franz. solides; eng. rigid) oder flüssig (franz. fluides; engl. fluid) und im letzteren Falle wieder entweder tropfbar flüssig (franz. liquides; engl. liquid) oder elastisch flüssig (franz. gazeux, aëriformes; engl. aëriform). Feste oder starre Körper sind diejenigen, deren Theilchen so stark unter sich zusammenhängen, daß eine gewisse Kraft nöthig ist, die Gestalt dieser Körper zu verändern oder eine Zertheilung derselben zu bewirken. Flüssige Körper hingegen sind solche, deren Theile durch die kleinste Kraft an einander verschoben werden können. Die elastisch flüssigen Körper, deren Repräsentant die atmosphärische Luft ist, unterscheiden sich dadurch von den tropfbar flüssigen, durch das Wasser repräsentirten Körpern, daß den-

*) S. das Wasseransaugen des Holzes, polytechnische Mittheilungen Bd. II. 1845.

selben ein Bestreben, sich immer weiter und weiter auszudehnen, inne wohnt, welches Bestreben dem Wasser u. s. w. mangelt.

Während die festen Körper eine eigenthümliche Gestalt und ein bestimmtes Volumen haben, besitzen die tropfbar flüssigen oder wasserförmigen Körper nur ein bestimmtes Volumen ohne eigenthümliche Form, die elastisch- oder ausdehnsam flüssigen Körper endlich weder das eine noch das andere.

**Eintheilung der Kräfte.** Ihrer Natur nach sind die Kräfte sehr verschieden; wir führen hier nur die vorzüglichsten an: §. 63

1) Die Schwerkraft, vermöge welcher sich alle Körper dem Mittelpunkte der Erde zu nähern suchen.
2) Die Kraft der Trägheit, welche bei Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen bewegter Massen hervortritt.
3) Die Muskelkraft der beseelten Wesen, oder die mittelst der Muskel von Menschen und Thieren ausgeübte (animalische) Kraft.
4) Die Elasticität oder Federkraft, welche Körper bei ihren Form- und Volumenveränderungen äußern.
5) Die Wärmekraft, vermöge welcher sich Körper beim Wechsel der Temperatur ausdehnen oder zusammenziehen.
6) Die Cohäsionskraft, die Kraft, mit welcher die Theile eines Körpers zusammenhängen, mit welcher also auch dieselben einer Trennung widerstehen.
7) Die Adhäsionskraft, mit welcher zwei in nahe Berührung gebrachte Körper einander anziehen.
8) Die Magnetkraft, oder die Anziehungs- und Abstoßungskraft der Magnete.

Nächstdem noch die elektrischen und elektromagnetischen Kräfte u. s. w.

Die Widerstände der Reibung, Steifigkeit, Festigkeit u. s. w. entspringen vorzüglich aus der Cohäsionskraft, welche, wie die Elasticität u. s. w., aus der sogenannten Molekularkraft, oder der Kraft, mit welcher die Moleküle oder kleinsten Theile eines Körpers auf einander wirken, hervorgeht.

**Bestimmungsstücke einer Kraft.** Bei einer jeden Kraft unterscheiden wir: §. 64

1) Den Angriffspunkt (franz. point d'application; engl. point of application), den Punkt des Körpers, auf welchen eine Kraft unmittelbar wirkt.
2) Die Kraftrichtung (franz. und engl. direction), die gerade Linie, in welcher eine Kraft den Angriffspunkt fortbewegt, oder fortzubewegen oder dessen Bewegung zu verhindern sucht. Die Kraftrichtung hat,

wie jede Bewegungsrichtung, zwei Seiten; sie kann von links nach rechts oder von rechts nach links, ferner von oben nach unten oder von unten nach oben gehen. Man nennt die eine die positive und die andere die negative. Da wir von links nach rechts und von oben nach unten lesen und schreiben, so wäre es am geeignetsten, diese Bewegungen positive und die entgegengesetzten Bewegungen negative zu nennen.

3) Die absolute Größe oder Intensität (franz. grandeur absolue, intensité; engl. intensity) der Kraft, die nach dem Obigen durch Gewichte, z. B. Pfunde, Kilogramme u. s. w., gemessen wird.

Man stellt die Kräfte graphisch durch gerade Linien dar, welche durch ihre Richtung und Länge die Richtung und Größe oder Stärke, sowie durch ihre Anfangspunkte die Angriffspunkte der Kräfte angeben.

§. 65 **Wirkung und Gegenwirkung.** Die erste Wirkung, welche eine Kraft in einem Körper hervorbringt, ist eine mit Ausdehnung oder Zusammendrückung verbundene Form- oder Volumenveränderung, welche im Angriffspunkt ihren Anfang nimmt und sich von da aus immer weiter und weiter im Körper ausbreitet. Durch diese innere Veränderung des Körpers wird aber die in ihm liegende Elasticität angeregt, die sich mit der Kraft ins Gleichgewicht setzt und deshalb derselben gleich ist und ihr entgegengesetzt wirkt. Man sagt hiernach: Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich und entgegengesetzt. Dieses Gesetz findet nicht nur bei den durch Berührung erzeugten Einwirkungen der Kräfte, sondern auch bei den sogenannten Anziehungs- und Abstoßungskräften, wohin die magnetische und selbst die Schwerkraft zu rechnen sind, statt. So stark ein Magnet einen Eisenstab anzieht, ebenso stark wird der Magnet vom Eisenstabe selbst angezogen. Die Kraft, mit welcher der Mond von der Erde angezogen wird (durch die Schwerkraft), ist gleich der Kraft, mit welcher der Mond auf die Erde zurückwirkt.

Die Kraft, mit welcher ein Gewicht auf eine Unterlage drückt, giebt diese in der entgegengesetzten Richtung zurück; die Kraft, womit ein Arbeiter an einer Maschine zieht, schiebt u. s. w., wirkt auf den Arbeiter zurück und sucht denselben in entgegengesetzter Richtung zu bewegen. Wenn ein Körper gegen einen anderen stößt, so drückt der erste den anderen genau so viel, wie der andere den ersten.

§. 66 **Eintheilung der Mechanik.** Die gesammte Mechanik wird nach den zwei Aggregatzuständen der Körper in zwei Hauptabtheilungen gebracht, nämlich:

1) in die Mechanik der festen oder starren Körper, welche man auch

wohl **Geomechanik** (franz. mécanique des corps solides; engl. mechanics of rigid bodies) nennt, und

2) in die **Mechanik der flüssigen Körper**, **Hydromechanik**, auch **Hydraulik** (franz. mécanique des fluides, hydraulique; engl. mechanics of fluids). Die letztere theilt man wieder ein

a) in die **Mechanik des Wassers** und der **tropfbar flüssigen Körper** überhaupt, **Hydromechanik**, auch **Hydraulik** (franz. hydraulique; engl. hydraulic), und

b) in die **Mechanik der Luft** und **anderer luftförmigen Körper** überhaupt, **Aëromechanik** (franz. mécanique des fluides aëriformes; engl. mechanics of elastic fluids).

Nimmt man nun noch auf die Eintheilung der Mechanik in **Statik** und **Dynamik** (§. 49) Rücksicht, so erhält man folgende Theile:

1) **Statik der festen Körper**, oder **Geostatik**,
2) **Dynamik der festen Körper**, oder **Geodynamik**,
3) **Statik des Wassers** u. s. w., oder **Hydrostatik**,
4) **Dynamik des Wassers** u. s. w., oder **Hydrodynamik**,
5) **Statik der Luft (der Gase und Dämpfe)**, oder **Aërostatik**,
6) **Dynamik der Luft**, oder **Aërodynamik**, auch **Pneumatik**.

---

## Zweites Capitel.

## Mechanik des materiellen Punktes.

**Ein materieller Punkt** (franz. point matériel; engl. material point) ist ein materieller Körper, dessen Dimensionen nach allen Seiten hin unendlich klein sind in Hinsicht auf die von ihm zurückgelegten Wege. Um den Vortrag zu vereinfachen, wird im Folgenden zunächst nur von der Bewegung und dem Gleichgewichte eines materiellen Punktes die Rede sein. Ein (endlicher) Körper ist eine stetige Verbindung von unendlich vielen materiellen Punkten oder Molekülen. Wenn sich die einzelnen Punkte oder Elemente eines Körpers alle vollkommen gleich, d. i. in parallelen geraden Linien gleich schnell bewegen, so kann man die Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auch auf die des ganzen Körpers anwenden, weil sich in diesem Falle annehmen läßt, daß gleiche Massentheile des Körpers durch gleiche Kraftttheile getrieben werden. §. 67

§. 68 **Einfache constante Kraft.** Ist $p$ die Acceleration, mit welcher eine Masse $M$ durch eine Kraft fortgetrieben wird, so hat man nach §. 56 für diese:

$$P = Mp, \text{ sowie umgekehrt, die Acceleration } p = \frac{P}{M}.$$

Setzen wir ferner die Masse $M = \frac{G}{g}$, wo $G$ das Gewicht des Körpers und $g$ die Beschleunigung der Schwere bezeichnet, so ist die Kraft:

$$1)\quad P = \frac{p}{g} G,$$

und die Acceleration:

$$2)\quad p = \frac{P}{G} g.$$

Man findet also die Kraft ($P$), welche einen Körper mit einer gewissen Acceleration ($p$) forttreibt, wenn man das Gewicht ($G$) des Körpers durch das Verhältniß $\left(\frac{p}{g}\right)$ seiner Acceleration zu der der Schwere multiplicirt.

Es ergiebt sich umgekehrt die Acceleration ($p$), mit welcher ein Körper durch eine Kraft ($P$) fortbewegt wird, indem man die Acceleration ($g$) der Schwere durch das Verhältniß $\left(\frac{P}{G}\right)$ zwischen Kraft und Gewicht des Körpers multiplicirt.

Beispiel. Man denke sich einen Körper auf einem horizontalen und sehr glatten Tische liegend, welcher dem Körper keine Hindernisse in den Weg setzt, wohl aber die Schwerkraft in demselben aufhebt. Wird dieser Körper von einer horizontal wirkenden Kraft gedrückt, so muß der Körper der Einwirkung derselben nachgeben und in der Richtung dieser Kraft fortgehen. Ist das Gewicht dieses Körpers: $G = 50$ Pfund und die auf ihn unausgesetzt drückende Kraft $P = 10$ Pfund, so wird er in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Acceleration $p = \frac{P}{G} \cdot g = \frac{10}{50} \cdot 31{,}25 = 6{,}25$ Fuß übergehen. Ist hingegen die Acceleration, mit welcher ein 42 Pfund schwerer Körper durch eine Kraft ($P$) beschleunigt wird, $p = 9$ Fuß, so wird diese Kraft $P = \frac{p}{g} G$ $= \frac{9}{31{,}25} \cdot 42 = 0{,}032 \cdot 378 = 12{,}1$ Pfund betragen.

§. 69 Ist die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, constant, so entsteht eine gleichförmig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichförmig beschleunigte, wenn die Kraftrichtung in die anfängliche Bewegungsrichtung fällt, und dagegen eine gleichförmig verzögerte, wenn die Kraftrichtung der anfänglichen

Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Setzen wir nun in den phoronomischen Formeln (§. 13 und §. 14) statt $p$ den Werth $\frac{P}{M} = \frac{P}{G} g$ ein, so bekommen wir Folgendes:

I. Für gleichförmig beschleunigte Bewegungen:

1) $v = c + \frac{P}{G} g t = c + 31{,}25 \frac{P}{G} t$ Fuß $= c + 9{,}81 \frac{P}{G} t$ Meter,

2) $s = ct + \frac{P}{G} \frac{gt^2}{2} = ct + 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$ Fuß $= ct + 4{,}905 \frac{P}{G} t^2$ Meter.

II. Für gleichförmig verzögerte Bewegungen:

1) $v = c - \frac{P}{G} g t = c - 31{,}25 \frac{P}{G} t$ Fuß $= c - 9{,}81 \frac{P}{G} t$ Meter,

2) $s = ct - \frac{P}{G} \frac{g t^2}{2} = ct - 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$ Fuß $= ct - 4{,}905 \frac{P}{G} t^2$ Meter.

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich alle Fragen, welche sich in Ansehung der durch eine beständige Kraft veranlaßten geradlinigen Bewegungen von Körpern stellen lassen, beantworten.

Beispiele. 1) Ein 2000 Pfund schwerer Wagen geht mit 4 Fuß Geschwindigkeit auf einer horizontalen, ihm keine Hindernisse entgegensetzenden Bahn fort, und wird 15 Secunden lang durch eine unveränderliche Kraft von 25 Pfund vorwärts geschoben; mit welcher Geschwindigkeit wird er nach Einwirkung dieser Kraft fortgehen? Es ist diese Geschwindigkeit $v = c + 31{,}25 \frac{P}{G} t$; da hier $c = 4$, $P = 25$, $G = 2000$ und $t = 15$, so folgt $v = 4 + 31{,}25 \cdot \frac{25}{2000} \cdot 15 = 4 + 5{,}859 = 9{,}859$ Fuß. 2) Unter gleichen Umständen wird ein 5500 Pfund schwerer Wagen, der vorher während 3 Minuten gleichförmig fortgehend 950 Fuß zurückgelegt hat, durch eine 30 Secunden lang anhaltend wirkende Kraft so fortgetrieben, daß er später in 3 Minuten 1650 Fuß gleichförmig durchläuft. Welches war diese Kraft? Hier ist Anfangsgeschwindigkeit $c = \frac{950}{3 \cdot 60} = 5.277$ Fuß, und Endgeschwindigkeit $v = \frac{1650}{3 \cdot 60} = 9{,}166$ Fuß, daher $\frac{P}{G} g t = v - c = 3{,}889$, und die Kraft $P = \frac{3{,}889 \cdot G}{gt} = 0{,}032 \cdot 3{,}889 \cdot \frac{5500}{30} = 0{,}12445 \cdot \frac{550}{3} = 22{,}81$ Pfund. 3) Ein mit 15 Fuß Geschwindigkeit fortgleitender, 1500 Pfund schwerer Schlitten verliert in Folge der Reibung auf der horizontalen Unterlage innerhalb 25 Secunden seine ganze Bewegung; wie groß ist diese Reibung? Hier ist die Bewegung gleichförmig verzögert und die Endgeschwindigkeit $v = 0$, daher $c = 31{,}25 \frac{Pt}{G}$, und $P = 0{,}032 \frac{Gc}{t} = 0{,}032 \cdot \frac{1500 \cdot 15}{25} = 0{,}032 \cdot 900 = 28{,}8$ Pfund die in Frage stehende Reibung. 4) Ein anderer

Schlitten von 1200 Pfund Gewicht und 12 Fuß Anfangsgeschwindigkeit hat bei seiner Bewegung eine Reibung von 45 Pfund zu überwinden; welche Geschwindigkeit hat derselbe nach 8 Secunden, und wie groß ist sein zurückgelegter Weg? Die Endgeschwindigkeit ist $v = 12 - 31{,}25 \cdot \frac{45 \cdot 8}{1200} = 12 - 9{,}375 = 2{,}625$ Fuß, und der zurückgelegte Weg $s = \left(\frac{c + v}{2}\right) t = \left(\frac{12 + 2{,}625}{2}\right) . 8 = 58{,}5$ Fuß.

§. 70 **Mechanische Arbeit.** Leistung oder Arbeit einer Kraft (franz. travail mécanique; engl. work done, labouring force) ist diejenige Wirkung einer Kraft, welche dieselbe bei Ueberwindung eines Widerstandes, z. B. der Schwerkraft, der Reibung, der Trägheit u. s. w., hervorbringt. Man verrichtet also eine mechanische Arbeit, indem man Lasten emporhebt, Massen eine größere Geschwindigkeit ertheilt, Körper in ihrer Form verändert, zertheilt u. s. w. Die Leistung oder Arbeit hängt nicht allein von der Kraft, sondern auch von dem Wege ab, auf welchem diese thätig ist oder einen Widerstand überwindet; sie wächst überhaupt mit der Kraft und dem Wege gleichzeitig. Heben wir einen Körper langsam genug in die Höhe, um seine Trägheit vernachlässigen zu können, so ist die verrichtete Arbeit seinem Gewichte und der Höhe, auf welche der Körper gehoben wird, proportional; denn 1) die Wirkung ist dieselbe, ob ein Körper vom $m$ (3) fachen Gewichte ($m\,G$) auf eine gewisse Höhe gehoben wird oder ob $m$ (3) Körper vom einfachen Gewichte ($G$) auf dieselbe Höhe gehoben werden; sie ist nämlich $m$mal so groß als die nöthige Wirkung zum Aufheben des einfachen Gewichtes auf die nämliche Höhe; und ebenso ist 2) die Leistung dieselbe, ob ein und dasselbe Gewicht auf die $n$ (5) fache Höhe ($n\,h$) oder ob es $n$ (5) mal auf die einfache Höhe gehoben wird, überhaupt aber $n$ (5) mal so groß, als wenn dasselbe Gewicht um die einfache Höhe ($h$) emporsteigt. Ebenso ist die von einem langsam sinkenden Gewichte verrichtete Arbeit der Größe dieses Gewichtes und der Höhe, von welcher es herabgesunken ist, proportional. Diese Proportionalität findet aber auch bei jeder anderen Art der Arbeitsverrichtung statt; um bei einerlei Tiefe einen Sägeschnitt von doppelter Länge auszuführen, sind noch einmal so viel Theilchen zu trennen, als beim Schnitt von der einfachen Länge, ist also auch die Arbeit doppelt so groß; die doppelte Länge erfordert aber auch den doppelten Weg der Kraft, es ist folglich die Arbeit dem Wege proportional. Ebenso wird die Arbeit eines Mahlganges offenbar mit der Menge der Körner einer gewissen Getreideart, welche derselbe bis zu einem gewissen Grade zerreibt, wachsen. Diese Menge ist aber unter übrigens gleichen Umständen der Zahl der Umdrehungen oder vielmehr dem Wege, welchen der obere Mühlstein (Läufer) während des Mahlens dieser Getreidemenge gemacht hat, proportional; es wächst folglich auch die mechanische Arbeit mit dem Wege gleichmäßig.

§. 71 Die angegebene Abhängigkeit der Arbeit einer Kraft von der Größe und dem Wege der Kraft erlaubt uns diejenige Arbeit, welche bei Ueberwindung eines Widerstandes von der Größe der Gewichtseinheit (z. B. Kilogramm, Pfund u. s. w.) längs eines Weges von der Größe der Längeneinheit (z. B. Meter oder Fuß) aufgewendet wird, als Einheit der mechanischen Arbeit oder Leistung (franz. unité dynamique; engl. dynamical unit, unit of work) anzunehmen und nun das Maß dieser gleichzusetzen dem Producte aus Kraft oder Widerstand und aus dem während der Ueberwindung des Widerstandes in der Kraftrichtung zurückgelegten Wege.

Setzen wir die Größe des Widerstandes selbst $= P$, und den bei seiner Ueberwindung von der Kraft oder vielmehr von ihrem Angriffspunkte zurückgelegten Wege, $= s$, so ist hiernach die bei Ueberwindung dieses Widerstandes aufgewendete Arbeit oder die Leistung

$$A = Ps \text{ Arbeitseinheiten.}$$

Um die Arbeitseinheit, für welche man auch den einfachen Namen Dynamie gebräuchen kann, näher zu bezeichnen, giebt man gewöhnlich die Einheiten beider Factoren $P$ und $s$ an, und sagt deshalb statt Arbeitseinheiten Kilogrammmeter, Pfundfuß, auch umgekehrt, Meterkilogramm, Fußpfund u. s. w., je nachdem Gewicht und Weg in Kilogramm und Meter oder in Pfund und Fuß ausgedrückt werden. Der Einfachheit wegen schreibt man statt Meterkilogramm $mk$ oder $km$, und ebenso statt Fußpfund, Fpfd.

Beispiele. 1) Um einen Pochstempel von 210 Pfund Gewicht 15 Zoll hoch zu heben, ist die mechanische Arbeit $A = 210 . \frac{15}{12} = 262{,}5$ Fußpfund nöthig. 2) Durch eine mechanische Leistung von 1500 Fußpfund kann ein Schlitten, welcher bei seiner Bewegung 75 Pfund Reibung zu überwinden hat, um

$$s = \frac{A}{P} = \frac{1500}{75} = 20 \text{ Fuß fortgezogen werden.}$$

§. 72 Nicht nur bei unveränderlicher Kraft oder constantem Widerstande ist die Arbeit ein Product aus Kraft und Weg, sondern auch dann, wenn der Widerstand während seiner Ueberwindung veränderlich ist, läßt sich die Arbeit als das Product aus Kraft und Weg ausdrücken, wenn man nur als Kraft einen mittleren Werth aus der stetigen Folge von Kräften annimmt. Das Verhältniß ist hier dasselbe wie das zwischen Zeit, Geschwindigkeit und Raum; denn auch der letztere läßt sich ja als ein Product aus Zeit und einem mittleren Werthe der Geschwindigkeiten ansehen. Auch hier sind dieselben graphischen Darstellungen anwendbar. Es läßt sich die mechanische Arbeit als Flächeninhalt eines Rechteckes $ABCD$, Fig. 86 (a. f. S.), ansehen, dessen Grundlinie $AB$ der zurückgelegte Weg ($s$) und dessen Höhe entweder die unveränderliche Kraft ($P$) selbst oder das Mittel von den verschiedenen Kraftwerthen ist. Im Allgemeinen läßt sich aber die Arbeit durch

den Flächenraum einer Figur $ABCND$, Fig. 87, darstellen, die zur Grundlinie den Weg $s$ hat und deren Höhe über jeder Stelle der Grundlinie gleich

Fig. 86.

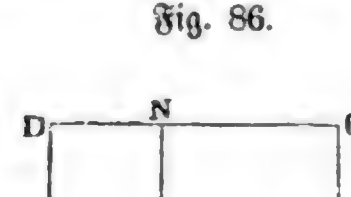
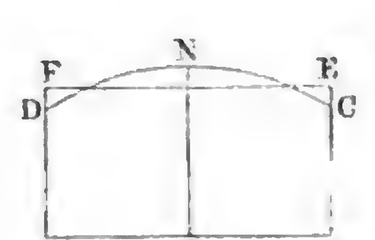



Fig. 87.

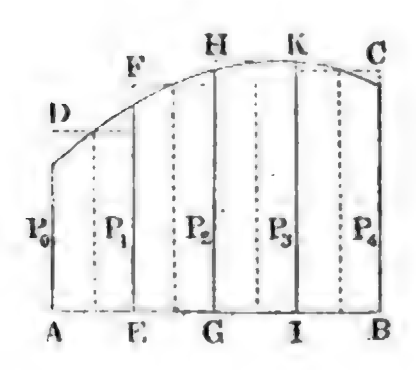



ist der dieser Stelle des Weges entsprechenden Kraft. Verwandelt man die Figur $ABCND$ in ein Rechteck $ABEF$ von gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte, so erhält man in der Höhe $AF = BE$ desselben den **mittleren Werth** dieser Kraft.

§. 73 Die Arithmetik und Geometrie geben verschiedene Mittel an, um aus einer stetigen Folge von Größen einen mittleren Werth derselben ausfindig zu machen; man findet auch die vorzüglichsten im „Ingenieur" angegeben. Unter ihnen ist aber die sogenannte **Simpson'sche** Regel dasjenige, welches man in der Praxis am häufigsten anwendet, weil sie in vielen Fällen große Einfachheit mit einem hohen Grade von Genauigkeit in sich vereinigt.

In jedem Falle ist es nöthig, den Weg $AB = s$ (Fig. 88) in $n$ (möglichst viel) gleiche Theile, wie $AE = EG = GI$ u. s. w., einzutheilen und die Kräfte $EF = P_1$, $GH = P_2$, $IK = P_3$ u. s. w. an den Enden dieser Wegtheile zu ermitteln. Setzen wir dann noch die anfängliche Kraft $AD = P_0$ und die Kraft $BC$ am Ende $= P_n$, so erhalten wir die mittlere Kraft: $P = (\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{n-1} + \frac{1}{2} P_n) : n$, und daher die Arbeit derselben:

Fig. 88.




$$Ps = (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + \tfrac{1}{2} P_n) \frac{s}{n}.$$

Ist die Anzahl ($n$) der Theile eine gerade, nämlich 2, 4, 6, 8 u. s. w., so giebt die **Simpson'sche** Regel noch genauer die mittlere Kraft:

$$P = (P_0 + 4 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + \cdots + 4 P_{n-1} + P_n) : 3n,$$

und daher die entsprechende Arbeit:

$$Ps = (P_0 + 4 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + \cdots + 4 P_{n-1} + P_n) \frac{s}{3n}.$$

Ist $n$ ungerade, so läßt sich setzen:

$$Ps = [{}^3/_8 (P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3) + {}^1/_3 (P_3 + 4P_4 + 2P_5 + \cdots + 4P_{n-1} + P_n)] \frac{s}{n}.$$ (S. Art. 38 der analyt. Hülfslehren.)

Beispiel. Um die mechanische Arbeit eines Zugpferdes zu finden, welche dieses beim Fortziehen eines Wagens auf einer gewissen Straße verrichtet, bedient man sich eines Kraftmessers (Dynamometers), welcher auf der einen Seite mit dem Wagen und auf der anderen Seite mit den Strängen der Pferde in Verbindung gesetzt ist, und beobachtet an demselben von Zeit zu Zeit die Größe der Kraft. Wenn die anfängliche Kraft $P_0 = 110$ Pfund, die nach Zurücklegung von 25 Fuß Weg, 122 Pfund, nach Zurücklegung von 50 Fuß, 127 Pfund, bei einem Wege von 75 Fuß, 120 Pfund und am Ende des ganzen Weges von 100 Fuß, = 114 Pfund beträgt, so hat man den mittleren Kraftwerth nach der ersten Formel:

$$P = (1/2 \,.\, 110 + 122 + 127 + 120 + 1/2 \,.\, 114) : 4 = 120{,}25 \text{ Pfund},$$

und die mechanische Arbeit:

$$Ps = 120{,}25 \,.\, 100 = 12025 \text{ Fußpfund};$$

nach der zweiten Formel aber:

$$P = (110 + 4 \,.\, 122 + 2 \,.\, 127 + 4 \,.\, 120 + 114) : (3 \,.\, 4) = \frac{1446}{12} = 120{,}5 \text{ Pfd.}$$

und die mechanische Leistung:

$$Ps = 120{,}5 \,.\, 100 = 12050 \text{ Fußpfund}.$$

**Princip der lebendigen Kräfte.** Setzen wir in der §. 14 entwickelten Formel der Phoronomie $s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$ oder $ps = \frac{v^2 - c^2}{2}$ für die Acceleration $p$ ihren Werth $\frac{P}{G} g$ ein, so erhalten wir die mechanische Arbeit: §. 74

$A = Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G$, oder, wenn wir die Geschwindigkeitshöhen $\frac{v^2}{2g}$ und $\frac{c^2}{2g}$ durch $h$ und $k$ bezeichnen:

$$Ps = (h - k)\, G.$$

Diese für die praktische Mechanik überaus fruchtbringende Gleichung sagt: Die mechanische Arbeit ($Ps$), welche eine Masse entweder in sich aufnimmt, wenn sie aus einer kleineren Geschwindigkeit ($c$) in eine größere ($v$) übergeht, oder hervorbringt, wenn sie aus einer größeren Geschwindigkeit in eine kleinere überzugehen genöthigt wird, ist stets gleich dem Producte aus dem Gewichte dieser Masse und der Differenz der beiden Geschwindigkeiten entsprechenden Geschwindigkeitshöhen $\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right)$.

Beispiele. 1) Um einen 4000 Pfund schweren Wagen auf einer vollkommen glatten Schienenbahn in eine Geschwindigkeit von 30 Fuß zu versetzen, ist eine

mechanische Arbeit $Ps = \frac{v^2}{2g} G = 0{,}016\, v^2\, G = 0{,}016 \,.\, 900 \,.\, 4000 = 57600$ Fußpfund nöthig; und ebenso viel Arbeit wird dieser Wagen verrichten, wenn man ihm einen Widerstand entgegensetzt und ihn dadurch allmälig in Ruhe überzugehen nöthigt. 2) Ein anderer Wagen von 6000 Pfund geht mit 15 Fuß Geschwindigkeit fort und wird durch eine auf ihn wirkende Kraft in eine Geschwindigkeit von 24 Fuß versetzt; wie groß ist die von diesem Wagen in sich aufgenommene oder von der Kraft verrichtete Arbeit? Den Geschwindigkeiten 15 Fuß und 24 Fuß entsprechen die Geschwindigkeitshöhen $k = \frac{c^2}{2g} = 3{,}6$ Fuß und $h = \frac{v^2}{2g} = 9{,}216$ Fuß; demnach ist die gesuchte mechanische Arbeit:

$Ps = (h - k)\, G = (9{,}216 - 3{,}600) \,.\, 6000 = 5{,}616 \,.\, 6000 = 33696$ Fpfd.

Kennt man nun den Weg, auf welchem diese Geschwindigkeitsveränderung vor sich geht, so läßt sich die Kraft finden, kennt man dagegen diese, so kann man den Weg bestimmen. Soll. z. B. im letzten Falle der Weg des Wagens nur 100 Fuß betragen, während dessen Zurücklegung die Geschwindigkeit von 15 Fuß in die von 24 Fuß übergeht, so hat man die Kraft $P = (h - k)\frac{G}{s} = \frac{33696}{100}$ $= 336{,}96$ Pfund. Wäre aber die Kraft selbst 2000 Pfund, so würde der Weg $s = (h - k)\frac{G}{P} = \frac{33696}{2000} = 16{,}848$ Fuß betragen. 3) Wenn ein 500 Pfund schwerer Schlitten in Folge der Reibung auf der Bahn seine Geschwindigkeit von 16 Fuß nach Zurücklegung von 100 Fuß Weg gänzlich verloren hat, so ist der Reibungswiderstand:

$$P = \frac{h\,G}{s} = 0{,}016 \,.\, 16^2 \;\frac{500}{100} = 0{,}016 \,.\, 256 \,.\, 5 = 20{,}48 \text{ Pfund}$$

§. 75 Die im vorigen Paragraphen gefundene Arbeitsformel:

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - k)\, G$$

gilt nicht allein für constante, sondern auch für **veränderliche Kräfte**, wenn man nur (nach §. 73) statt $P$ den mittleren Kraftwerth einführt; denn da nach III*) in §. 19 für jede stetige Bewegung überhaupt

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = ps \text{ ist,}$$

wenn $p = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$ die gleichen Wegelementen $\sigma$ entsprechende mittlere Acceleration bei dem Durchlaufen des Weges $s$ bezeichnet, so hat man auch

$$p = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n\,M}, \text{ folglich}$$

$$\left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}\right) s, \text{ und}$$

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \frac{v^2 - c^2}{2g} G = (h - k) G,$$

wenn $P = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}$, das Mittel aller nach Zurücklegung der Wege $\frac{s}{n}, \frac{2s}{n}, \frac{3s}{n} \cdots \frac{ns}{s}$ gemessenen Kraftwerthe bezeichnet.

Uebrigens läßt sich natürlich $P$ auch nach einer der letzteren Formeln des §. 73 berechnen, wenn zumal die Zahl $n$ der Theile nicht sehr groß angenommen wird.

Sehr oft ist die Geschwindigkeitsveränderung zu ermitteln, welche eine gegebene Masse $M$ bei Aufnahme einer gewissen mechanischen Arbeit $Ps$ erleidet. Die gefundene Hauptgleichung wird dann in der Form

$$h = k + \frac{Ps}{G} \text{ oder } v = \sqrt{c^2 + 2g\frac{Ps}{G}} \text{ angewendet.}$$

Hat man mittels dieser Formel die den Wegen $\frac{s}{n}, \frac{2s}{n}, \frac{3s}{n} \cdots s$ entsprechenden Endgeschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \cdots v_n$ bestimmt, so kann man durch Anwendung der Formel

$$t = \frac{s}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right)$$

die Zeit, in welcher der Weg $s$ zurückgelegt wird, berechnen.

In der Form $G = Mg = \frac{2Ps}{v^2 - c^2} = \frac{Ps}{\frac{1}{2}(v + c)(v - c)}$ dient endlich die gefundene Hauptgleichung noch dazu, um die Masse $M$ zu bestimmen, bei welcher die mechanische Arbeit $Ps$ eine gegebene Geschwindigkeitsveränderung $v - c$ hervorbringt.

Wenn bei der (stetigen) Bewegung eines Körpers die Endgeschwindigkeit $v$ gleich ist der Anfangsgeschwindigkeit $c$, so fällt die hierbei in Anspruch genommene Arbeit = Null aus, d. h. es nimmt der beschleunigte Theil der Bewegung gerade so viel Arbeit in Anspruch, als der verzögerte Theil derselben verrichtet.

Beispiel. Wenn ein ohne Reibung auf einer Eisenbahn fortgehender Wagen von 2500 Pfund Gewicht zur Vermehrung seiner Geschwindigkeit, die anfangs nur 10 Fuß betrug, eine mechanische Arbeit von 8000 Fußpfund in sich aufgenommen hat, so wird seine Geschwindigkeit nach Aufnahme dieser Arbeit

$$v = \sqrt{10^2 + 62.5 \cdot \frac{8000}{2500}} = \sqrt{100 + 200} = 17{,}32 \text{ Fuß betragen.}$$

Anmerkung. Man nennt, ohne einen besonderen Begriff damit zu verbinden, das Product aus Masse $M = \frac{G}{g}$ und Quadrat der Geschwindigkeit ($v^2$), also $Mv^2$, die lebendige Kraft (franz. force vive; engl., eigentlich lat. vis

viva) der bewegten Masse, und kann hiernach die mechanische Arbeit, welche eine bewegte Masse in sich aufnimmt, gleichsetzen der halben lebendigen Kraft derselben. Geht eine träge Masse aus einer Geschwindigkeit $c$ in eine andere $v$ über, so ist sowohl die gewonnene als auch die verlorene Arbeit gleich der halben Differenz zwischen den lebendigen Kräften am Ende und am Anfange der Geschwindigkeitsveränderung. Dieses Gesetz von der mechanischen Leistung der Körper durch ihre Trägheit nennt man das **Princip der lebendigen Kräfte** (franz. principe des forces vives; engl. principle of vis viva).

§. 76 **Zusammensetzung der Kräfte.** Wirken zwei Kräfte $P_1$ und $P_2$ auf einen und denselben Körper 1) in gleicher oder 2) in entgegengesetzter Richtung, so ist die Wirkung dieselbe, als wenn nur eine Kraft auf den Körper wirkte, welche 1) der Summe oder 2) Differenz dieser Kräfte gleich ist, denn diese Kräfte ertheilen der Masse $M$ die Acceleration:

$$p_1 = \frac{P_1}{M} \text{ und } p_2 = \frac{P_2}{M};$$

es ist folglich nach §. 29 die aus beiden resultirende Acceleration:

$$p = p_1 \pm p_2 = \frac{P_1 \pm P_2}{M},$$

und demnach die derselben entsprechende Kraft:

$$P = Mp = P_1 \pm P_2.$$

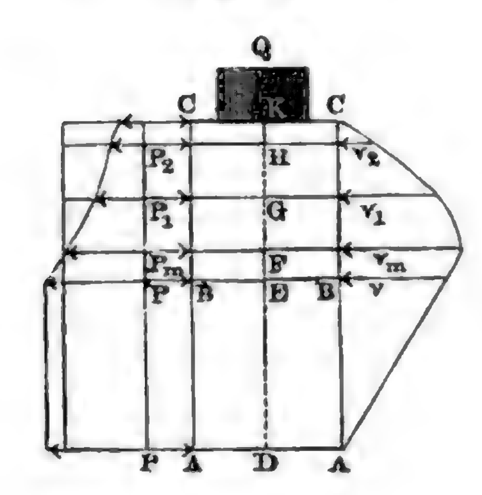
Man nennt die aus den beiden Kräften hervorgehende, gleich viel vermögende (äquipollente) Kraft $P$ die **Resultirende** (franz. résultante; engl. resultant), ihre Bestandtheile $P_1$ und $P_2$ aber die **Componenten** (franz. composantes; engl. components).

Beispiele. 1) Ein auf der flachen Hand liegender Körper drückt nur so lange mit seinem absoluten Gewichte auf dieselbe, so lange die Hand in Ruhe ist oder mit dem Körper gleichförmig auf- oder abwärts bewegt wird; hebt man aber die Hand beschleunigt empor, so erleidet dieselbe einen stärkeren Druck, geht man dagegen beschleunigt mit der Hand senkrecht nieder, so wird der Druck kleiner als das Gewicht; er wird sogar Null, wenn man die Hand mit der Acceleration der Schwere herabführt. Ist der Druck auf die Hand $= P$, so fällt der Körper nur mit der Kraft $G - P$ nieder, während seine Masse $M = \frac{G}{g}$ ist; setzen wir daher die Acceleration, mit welcher die Hand mit dem darauf liegenden Körper niedergeht, $= p$, so folgt $G - P = \frac{G}{g} p$, und daher der Druck $P = G - \frac{p}{g} G = \left(1 - \frac{p}{g}\right) G$. Läßt man dagegen den Körper auf der Hand mit der Acceleration $p$ aufsteigen, so ist $p$ der Acceleration $g$ entgegengesetzt, daher der Druck auf die Hand, $P = \left(1 + \frac{p}{g}\right) G$. Je nachdem man einen Körper mit 20 Fuß Beschleunigung ab- oder aufwärts steigen läßt, ist der Druck auf die Hand $= \left(1 - \frac{20}{31{,}25}\right) G = (1 - 0{,}64)\, G = 0{,}36$ des Kör-

vergewichtes oder $= 1 + 0{,}64 = 1{,}64$ desselben. 2) Wenn ich mit der flachen Hand einen Körper von 3 Pfund Gewicht 14 Fuß hoch senkrecht in die Höhe schleudere, indem ich ihn auf die ersten zwei Fuß Höhe mit der Hand unausgesetzt forttreibe, so ist die verrichtete mechanische Arbeit $Ps = Gh = 3 \cdot 14 = 42$ Fußpfund, und demnach der Druck des Körpers auf die Hand: $P = \frac{42}{2} = 21$ Pfund. Während also der ruhende Körper mit 3 Pfund drückt, wirkt er während des Werfens mit 21 Pfund Kraft auf die Hand zurück.

3) Welche Last $Q$ vermag der in einem Cylinder $AACC$, Fig. 89, bewegliche Kolben um $DK = s = 6$ Fuß hoch zu heben, wenn er auf der ersten Weghälfte von innen durch die aus einem großen Reservoir zuströmende Luft mit der Kraft $P = 6000$ Pfund, und auf der zweiten Weghälfte durch die im Cylinder abgesperrte und nach dem Mariotte'schen Gesetze mit allmälig abnehmender Kraft wirkende Luft fortbewegt wird, während die äußere Luft constant auf den Kolben mit 2000 Pfund entgegenwirkt? Da sich die im Cylinder abgesperrte Luft am Ende der zweiten Hälfte des ganzen Kolbenweges um das Doppelte ausgedehnt hat, so ist die Kraft derselben zuletzt nur $\frac{1}{2} . P = 3000$ Pfund. Es drückt die im Cylinder abgesperrte Luft am Ende des Kolbenweges von 3 Fuß noch mit 6000 Pfund, dagegen am Ende des Weges von 4 Fuß mit $\frac{3}{4} \cdot 6000 = 4500$ Pfund, am Ende des Weges von 5 Fuß mit $\frac{3}{5} \cdot 6000 = 3600$ Pfund, und am Ende des ganzen Weges von 6 Fuß mit $\frac{3}{6} \cdot 6000 = 3000$ Pfund, wonach sich die mittlere Kraft während der Expansion $= \frac{1}{8} [6000 + 3 (4500 + 3600) + 3000] = \frac{33300}{8} = 4162$ Pfund, und folglich die mittlere Kraft bei der ganzen Kolbenbewegung, $= \frac{6000 + 4162}{2} = 5081$ Pfund ergiebt. Zieht man hiervon den constanten Gegendruck von 2000 Pfund ab, so folgt das vom Kolben aufzuhebende Gewicht

Fig. 89.




$$Q = 5081 - 2000 = 3081 \text{ Pfund.}$$

Die bewegende Kraft bei der ersten Weghälfte ist: $P - (Q + 2000) = 6000 - 5081 = 919$ Pfund, folglich die Acceleration der Bewegung: $p = \left(\frac{P - Q}{Q}\right) g = \frac{919}{3081} \cdot 31{,}25 = 9{,}32$ Fuß, ferner die Geschwindigkeit am Ende des Kolbenweges $s_1 = \frac{s}{2} = 3$ Fuß: $v = \sqrt{2 p s_1} = \sqrt{6 . 9{,}32} = \sqrt{55{,}92} = 7{,}478$ Fuß, und die Zeit, in welcher dieser Kolbenweg zurückgelegt wird: $t_1 = \frac{2 s_1}{v} = \frac{6}{7{,}478} = 0{,}802$ Secunden. Der Kolbenweg, bei welchem sich Kraft und Last das Gleichgewicht halten, also die bewegende Kraft und folglich auch die Acceleration Null, und die Kolbengeschwindigkeit ein Maximum ist, hat die Größe:

$$x = \left(\frac{P}{Q + 2000}\right) \frac{s}{2} = \frac{6000 . 3}{5081} = \frac{18000}{5081} = 3{,}543 \text{ Fuß.}$$

Am Ende des Kolbenweges $\frac{6,543}{2} = 3,2715$ Fuß ist die innere Kolbenkraft $= \frac{6000.3}{3,2715} = 5502$, folglich die bewegende Kraft $= 5502 - 5081 = 421$ Pfund, und der mittlere Werth derselben, während der Bewegung des Kolbens von 3 bis 3,543 Fuß, $= \frac{919 + 4 . 421 + 0}{6} = 434$ Pfund. Die entsprechende mittlere Acceleration ist $= \frac{434}{3081} g = \frac{434 . 31,25}{3081} = 4,402$ Fuß, folglich die Maximalkolbengeschwindigkeit am Ende des Weges $x = s_1 + s_2 = 3,543$ Fuß:

$$v_m = \sqrt{v^2 + 2 p s_2} = \sqrt{55,92 + 2 . 4,402 . 0,543} = \sqrt{60,70} = 7,791 \text{ Fuß}.$$

Die Zeit zum Durchlaufen des Weges $s_2 = 0,543$ Fuß läßt sich setzen:

$$t_2 = \frac{s_2}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_m}\right) = 0,2715\left(\frac{1}{7,478} + \frac{1}{7,791}\right) = 0,071 \text{ Secunden.}$$

Hat der Kolben den Weg 5,5 zurückgelegt, so ist die bewegende Kraft: $= \frac{18000}{5,500} - 5081 = -1808$ Pfund, und steht der Kolben im Mittel zwischen diesem Punkte und dem Punkte der Maximalgeschwindigkeit, so ist diese Kraft: $= \frac{18000}{4,5215} - 5081 = -1100$ Pfund und es sind die entsprechenden Accelerationen folgende:

$$= -\frac{1808 . 31,25}{3081} = -18,34 \text{ Fuß und } \frac{-1100 . 31,25}{3081} = -11,16 \text{ Fuß}.$$

Beim Durchlaufen des Wegstückes $5,500 - 3,543 = 1,957$ Fuß, ist folglich die mittlere Acceleration $= -\frac{0 + 4 . 11,16 + 18,34}{6} = -10,50$ Fuß, und demnach die am Ende dieses Weges erlangte Geschwindigkeit:

$= \sqrt{60,70 - 2 . 10,50 . 1,957} = \sqrt{19,60} = 4,427$ Fuß. Für die erste Hälfte 0,9785 F. des letzteren Wegstückes ist dagegen die mittlere Acceleration $= -\frac{0 + 11,16}{2} = -5,58$ Fuß, daher die Geschwindigkeit am Ende des Weges von 4,5215 Fuß: $= \sqrt{60,70 - 2 . 5,58 . 0,9785} = \sqrt{49,78} = 7,055$ Fuß.

Nun ergiebt sich die Zeit zum Durchlaufen des Wegstückes $s_3 = 1,957$ Fuß:

$$t_3 = \frac{s_3}{6}\left(\frac{1}{v_m} + \frac{4}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = 0,326\left(\frac{1}{7,791} + \frac{4}{7,055} + \frac{1}{4,427}\right) = 0,326 . 0,9212$$

$= 0,300$ Secunden. Ferner läßt sich die Zeit für das letzte Stück $s_4 = 0,5$ Fuß des ganzen Kolbenweges, $t_4 = \frac{2 s_4}{v_2} = \frac{1}{4,427} = 0,226$ Secunden setzen, und es folgt nun die Zeit des ganzen Kolbenhubes:

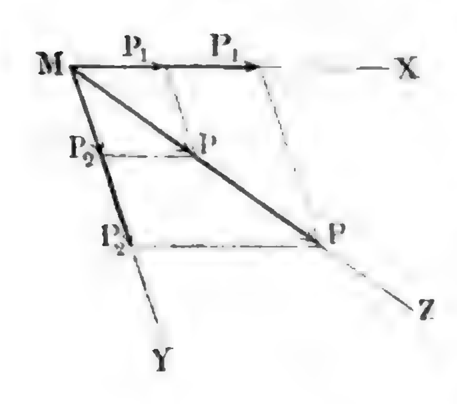
$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0,802 + 0,071 + 0,300 + 0,226 = 1,40 \text{ Secunden.}$$

§. 77 **Parallelogramm der Kräfte.** Wird eine Masse (ein materieller Punkt) $M$, Fig. 90, von zwei Kräften $P_1$ und $P_2$ ergriffen, deren Richtungen $MX$ und $MY$ einen Winkel $XMY = \alpha$ zwischen sich einschließen, so erzeugen diese nach eben diesen Richtungen die Accelerationen:

$$p_1 = \frac{P_1}{M} \text{ und } p_2 = \frac{P_2}{M},$$

aus deren Vereinigung eine mittlere Acceleration (§. 35) in einer Richtung $MZ$ entsteht, welche durch die Diagonale eines aus $p_1, p_2$ und $\alpha$ construirten Parallelogramms gegeben ist; auch ist diese mittlere oder resultirende Acceleration:

Fig. 90.




$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2\, p_1\, p_2 \cos. \alpha}$$

und für den Winkel $\varphi$, den die Richtung derselben mit der Richtung $MX$ der einen Acceleration $p_1$ einschließt, hat man:

$$\sin. \varphi = \frac{p_2 \sin. \alpha}{p}.$$

Setzen wir in diese beiden Formeln die angegebenen Werthe von $p_1$ und $p_2$, so folgt:

$$p = \sqrt{\left(\frac{P_1}{M}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{M}\right)^2 + 2\left(\frac{P_1}{M}\right)\left(\frac{P_2}{M}\right) \cos. \alpha} \text{ und}$$

$$\sin. \varphi = \left(\frac{P_2}{M}\right) \frac{\sin. \alpha}{p}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung durch $M$, so ergiebt sich:

$$Mp = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\, P_1\, P_2 \cos. \alpha},$$

oder, da $Mp$ die der Acceleration $p$ entsprechende Kraft $P$ ist:

$$1)\ P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\, P_1\, P_2 \cos. \alpha}, \text{ und}$$

$$2)\ \sin. \varphi = \frac{P_2 \sin. \alpha}{P}.$$

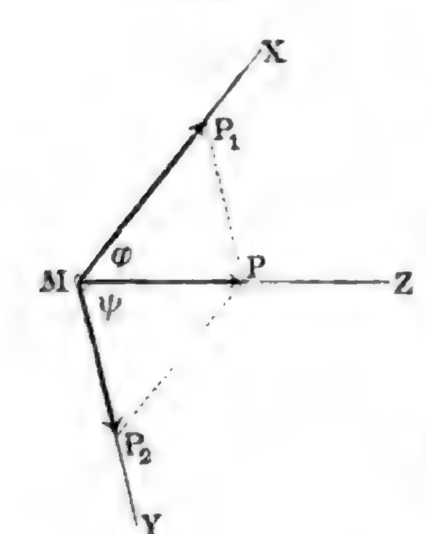
Es wird also die Resultirende oder Mittelkraft sowohl ihrer Größe als auch ihrer Richtung nach aus den Componenten oder Seitenkräften genau so bestimmt, wie die mittlere Acceleration aus den Seitenaccelerationen.

Repräsentiren wir die Kräfte durch gerade Linien, indem wir diese in denselben Verhältnissen zu einander stehen lassen, wie sie in Gewichten, z. B. Pfunden, in Wirklichkeit zu einander stehen, so läßt sich demnach die Resultirende durch die Diagonale desjenigen Parallelogramms darstellen, dessen Seiten durch die Seitenkräfte gebildet werden und wovon ein Winkel dem von den Richtungen der Seitenkräfte gebildeten Winkel gleich ist. Das so aus den Seitenkräften construirte und durch seine Diagonale die Mittelkraft ausdrückende Parallelogramm wird das **Parallelogramm der Kräfte** genannt.

**Beispiel.** Wenn ein auf einem vollkommen glatten Tische ruhender Körper, Fig. 91 (a. f. S.), von 150 Pfund Gewicht von zwei Kräften $P_1 = 30$ Pfund und $P_2 = 24$ Pfund ergriffen wird, welche einen Winkel $P_1 M P_2 = \alpha = 105$ Grad zwischen sich einschließen, so ist die Frage, nach welcher

Richtung und mit welcher Acceleration die Bewegung vor sich gehen werde? Da $cos. \alpha = cos. 105^0 = - cos. 75^0$, so folgt die Mittelkraft:

Fig. 91.




$$P = \sqrt{30^2 + 24^2 - 2 . 30 . 24 \, cos. 75^0}$$
$$= \sqrt{900 + 576 - 1440 \, cos. 75^0}$$
$$= \sqrt{1476 - 372,7} = 33,22 \text{ Pfund};$$

und die ihr entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{Pg}{G} = \frac{33,22 . 31,25}{150} = 6,92 \text{ Fuß}.$$

Die Bewegungsrichtung schließt mit der Richtung der ersten Kraft einen Winkel $\varphi$ ein, der bestimmt ist durch

$$sin. \varphi = \frac{24}{33,22} sin. 105^0 = 0,7224 \, sin. 75^0 = 0,6978;$$

es ist also $\varphi = 44^0 15'$.

Anmerkung. Die Mittelkraft ($P$) hängt, den gefundenen Formeln zufolge, nur von den Seitenkräften, nie aber von der Masse ($M$) des Körpers, auf welche die Kräfte wirken, ab. Deshalb findet man in vielen Werken über Mechanik die Richtigkeit des Parallelogramms der Kräfte ohne Rücksicht auf die Masse, wohl aber mit Zugrundlegung irgend eines Grundgesetzes bewiesen. Solcher rein statischen Beweise giebt es viele. In jedem der folgenden Werke findet man einen anderen Beweis: Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Gerstner's Handbuch der Mechanik, Kayser's Handbuch der Statik, Möbius' Lehrbuch der Statik, Rühlmann's technische Mechanik. Der Beweis in Gerstner's Mechanik setzt die Theorie des Hebels voraus; er ist übrigens sehr einfach und findet sich in sehr vielen alten und auch in neuen Schriften, z. B. in denen von Kästner, Monge, Whewell u. s. w. Kayser's Beweis ist der Poisson'sche in elementarem Gewande. Möbius' Entwickelung ist auf eine besondere, von Poinsot (Elémens de Statique) eingeführte Theorie, auf die der Kräftepaare (des couples), gegründet. Einen eigenthümlichen Beweis liefert Duchayla in der Correspondance sur l'école polytechnique No. 4, denselben hat auch Brix in seinem Lehrbuch der Statik fester Körper, 2. Auflage, aufgenommen; er wird aber auch noch in vielen anderen Werken angewendet, z. B. in Moseley's Mechanical Principles u. s. w. Den Beweis des Parallelogramms der Kräfte, welchen Navier in seinem Leçons des mécanique (deutsch von Mejer, 1858) liefert, findet man auch in Rühlmann's Grundzüge der Mechanik, Leipzig 1860. Eine auf die Bewegungsgesetze gegründete Theorie dieses Parallelogramms findet man schon in Newton's Principien; sie wird aber auch von vielen Neueren gebraucht, z. B. von Venturoli, Poncelet, Burg u. s. w. S. Elementi di Mecanica e d'Idraulica di Venturoli; Mécanique industrielle par Poncelet; Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre von Burg. Ein neuer Beweis von Möbius findet sich in den Berichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (1850), ein anderer von Ettingshausen in den Wiener akademischen Schriften (1851), und ein dritter von Schlömilch in dessen Zeitschrift für Mathematik und Physik (1857).

§. 78 **Zerlegung der Kräfte.** Mit Hülfe des Kräfteparallelogramms lassen sich nicht nur zwei oder mehrere Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen,

sondern auch gegebene Kräfte unter gegebenen Verhältnissen in zwei oder mehrere Kräfte zerlegen. Sind die Winkel $\varphi$ und $\psi$ gegeben, welche die Seitenkräfte $MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$, Fig. 91, mit der gegebenen Kraft $MP = P$ einschließen, so ergeben sich die Streitkräfte oder Componenten durch die Formeln:

$$P_1 = \frac{P \sin. \psi}{\sin. (\varphi + \psi)},\ P_2 = \frac{P \sin. \varphi}{\sin. (\varphi + \psi)}.$$

Stehen die Seitenkräfte winkelrecht auf einander, ist also $\varphi + \psi = 90^0$ und $\sin. (\varphi + \psi) = 1$, so hat man:

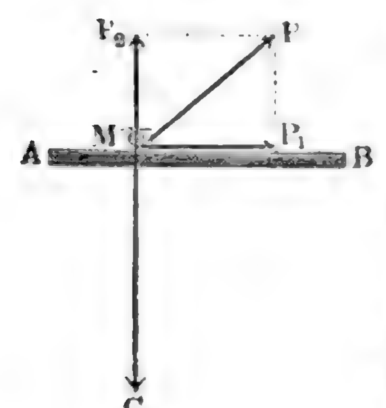
$$P_1 = P \cos. \varphi \text{ und } P_2 = P \sin. \varphi.$$

Sind endlich $\psi$ und $\varphi$ einander gleich, so ist auch:

$$P_2 = P_1, \text{ nämlich } = \frac{P \sin. \varphi}{\sin. 2\varphi} = \frac{P}{2 \cos. \varphi}.$$

Beispiele. 1) Wie stark wird der Tisch $AB$, Fig. 92, von einem Körper $M$ gedrückt, dessen Gewicht $G = 70$ Pfund ist, und auf den eine Kraft $P = 50$ Pfund wirkt, deren Richtung unter dem Winkel $PMP_1 = \varphi = 40^0$ gegen den Horizont geneigt ist? Der horizontale Component von $P$ ist:

Fig. 92.




$$P_1 = P \cos. \varphi = 50 \cos. 40^0 = 38{,}30 \text{ Pfund},$$

und der verticale Component:

$$P_2 = P \sin. \varphi = 50 \sin. 40^0 = 32{,}14 \text{ Pfund};$$

der letztere sucht den Körper vom Tische abzuziehen, es bleibt folglich der Druck auf den Tisch:

$$G - P_2 = 70 - 32{,}14 = 37{,}86 \text{ Pfund}.$$

2) Wenn ein Körper $M$, Fig. 91, von 110 Pfund Gewicht, auf einer horizontalen Unterlage durch zwei Kräfte so bewegt wird, daß er in der ersten Secunde einen Weg von 6,5 Fuß in einer Richtung durchläuft, welche von den beiden Kräfterichtungen um die Winkel $\varphi = 52^0$ und $\psi = 77^0$ abweicht, so ergeben sich die Kräfte selbst durch Folgendes: Die Acceleration ist der doppelte Weg in der ersten Secunde, also hier $p = 2 \cdot 6{,}5 = 13$ Fuß. Die Mittelkraft ist nun:

$$P = \frac{p G}{g} = 0{,}032 \cdot 13 \cdot 110 = 45{,}76 \text{ Pfund};$$

daher die eine Seitenkraft:

$$P_1 = \frac{P \sin. 77^0}{\sin. (52^0 + 77^0)} = \frac{45{,}76 \sin. 77^0}{\sin. 51^0} = 57{,}37 \text{ Pfund},$$

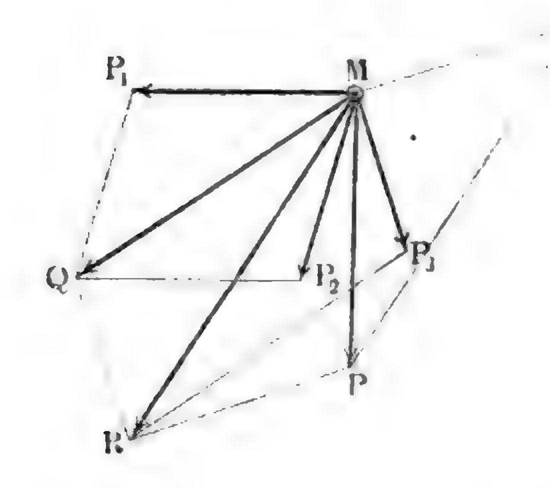
und die andere Seitenkraft:

$$P_2 = \frac{45{,}76 \sin. 52^0}{\sin. 51^0} = 46{,}40 \text{ Pfund}.$$

**Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene.** Um die Mittelkraft $P$ zu einem Systeme von Seitenkräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. w. (Fig. 93 a. f. S.) zu finden, kann man genau denselben Weg (§. 34) einschlagen, welcher bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten befolgt wird; man kann nämlich durch wiederholte Anwendung des Kräfteparallelogramms je zwei und zwei Kräfte zu §. 79

einer vereinigen, bis zuletzt nur noch eine übrig bleibt. Die Kräfte $P_1$ und $P_2$ geben z. B. durch das Parallelogramm $M P_1 Q P_2$ die Mittelkraft $\overline{MQ} = Q$; wenn man diese wieder mit $P_3$ vereinigt, erhält man im Parallelogramm $MQRP_3$ die Mittelkraft $\overline{MR} = R$, und die letztere wieder mit $P_4$ zu einem Parallelogramm verbunden, stellt sich in der Diagonale $\overline{MP} = P$ die letzte allen vier Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ zusammen äquivalente Mittelkraft heraus.

Fig. 93.




Es ist nicht nöthig, bei dieser Zusammensetzungsweise das Parallelogramm stets zu vollenden und dessen Diagonale anzugeben. Man bilde ein Polygon $MP_1 QRP$, indem man die Seiten $MP_1, P_1 Q, QR, RP$ den gegebenen Componenten $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ parallel legt und gleichmacht; die letzte, das Polygon zuschließende Seite $MP$ ist die gesuchte Mittelkraft $P$ oder vielmehr das Maß derselben.

Anmerkung. Es ist sehr nützlich, die Aufgaben der Mechanik auch durch Construction aufzulösen; wenn die construirende Auflösung auch nicht so viel Genauigkeit gewährt als die rechnende, so sichert sie dagegen sehr vor groben Fehlern und kann deshalb immer als Prüfung der Rechnung dienen. In Fig. 93 hat man die Kräfte unter den gegebenen Winkeln $P_1 MP_2 = 72^0\, 30'$, $P_2 MP_3 = 33^0\, 20'$ und $P_3 MP_4 = 92^0\, 40'$ an einander gestoßen und so aufgetragen, daß ein Pfund durch eine Linie des preuß. Zolles repräsentirt wird. Die Kräfte $P_1 = 11{,}5$ Pfund, $P_2 = 10{,}8$ Pfund, $P_3 = 8{,}5$ Pfund und $P_4 = 12{,}2$ Pfund sind daher durch Seiten von 11,5 Linien, 10,8 Linien, 8,5 Linien und 12,2 Linien Länge ausgedrückt. Eine sorgfältige Construction des Kräftepolygons giebt die Größe der Mittelkraft $P = 14{,}6$ Pfund und die Abweichung ihrer Richtung $MP$ von der Richtung $MP_1$ der ersten Kraft, $= 86\frac{1}{2}$ Grad.

§. 80 Einfacher und schärfer bestimmt sich die Mittelkraft $P$, wenn man jeden der gegebenen Componenten $P_1, P_2, P_3$ u. s. w. nach zwei rechtwinklig gegen einander stehenden Axenrichtungen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, Fig. 94, in Seitenkräfte wie $Q_1$ und $R_1$, $Q_2$ und $R_2$, $Q_3$ und $R_3$ u. s. w. zerlegt, die in eine und dieselbe Axenrichtung fallenden Kräfte algebraisch addirt und nun aus den sich ergebenden, unter einem Rechtwinkel aus einander ziehenden zwei Kräften die Größe und Richtung der Resultirenden sucht. Sind die Winkel $P_1 MX$, $P_2 MX$, $P_3 MX$ u. s. w., welche die Richtungen von den Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. w. mit der Axe $X\overline{X}$ einschließen, $= \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. s. w., so hat man die Seitenkräfte $Q_1 = P_1 \cos. \alpha_1$, $R_1 = P_1 \sin. \alpha_1$; $Q_2 = P_2 \cos. \alpha_2$, $R_2 = P_2 \sin. \alpha_2$ u. s. w., weshalb folgt aus:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots,$$

1) $Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + P_3 \cos. \alpha_3 + \cdots,$
und ebenso aus $R = R_1 + R_2 + R_3 \cdots,$

2) $R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + P_3 \sin. \alpha_3 + \cdots$

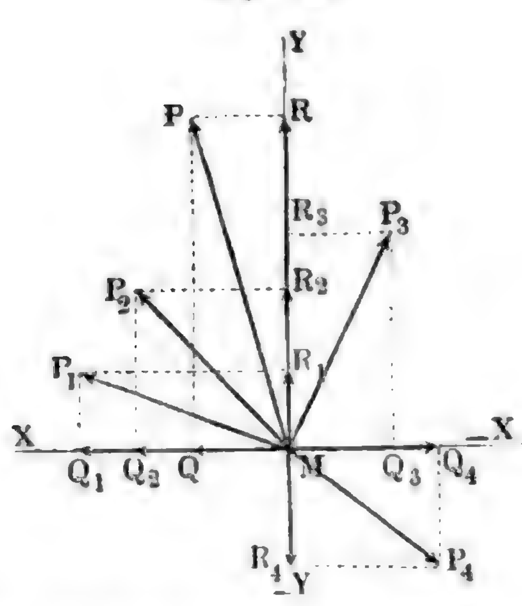
Aus den so gefundenen zwei Seitenkräften $Q$ und $R$ ergiebt sich nun die Größe der gesuchten Mittelkraft:

3) $P = \sqrt{Q^2 + R^2}$

und der Winkel $PMX = \alpha$, den ihre Richtung mit $X\bar{X}$ einschließt, durch

4) $tang. \alpha = \frac{R}{Q}$.

Fig. 94.




Bei der algebraischen Addition der Kräfte hat man die Vorzeichen genau zu berücksichtigen; denn sind dieselben bei zwei Kräften verschieden, d. h. sind diese Kräfte vom Angriffspunkte $M$ aus nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, so geht diese Addition in eine arithmetische Subtraction über (§. 76). Der Winkel $\alpha$ ist spitz, so lange $Q$ und $R$ positiv sind, er ist zwischen einem und zwei Rechtwinkeln, wenn $Q$ negativ und $R$ positiv, zwischen zwei und drei Rechten, wenn $Q$ und $R$ beide negativ sind, und liegt endlich zwischen drei und vier Rechten, wenn bloß $R$ negativ ist.

Beispiel. Welches ist die Größe und Richtung der Mittelkraft aus den Seitenkräften $P_1 = 30$ Pfund, $P_2 = 70$ Pfund und $P_3 = 50$ Pfund, deren Richtungen, in einer Ebene liegend, die Winkel $P_1 M P_2 = 56^0$ und $P_2 M P_3 = 104^0$ zwischen sich einschließen? Legen wir die Axe $X\bar{X}$, Fig. 94, in die Richtung der ersten Kraft, so erhalten wir $\alpha_1 = 0^0$, $\alpha_2 = 56^0$ und $\alpha_3 = 56^0 + 104^0 = 160^0$; daher:

1) $Q = 30 . \cos. 0^0 + 70 . \cos. 56^0 + 50 . \cos. 160^0 = 30 + 39,14 - 46,98 = 22,16$ Pfund, und

2) $R = 30 . \sin. 0^0 + 70 . \sin. 56^0 + 50 . \sin. 160^0 = 0 + 58,03 + 17,10 = 75,13$ Pfund. Ferner:

3) $tang. \alpha = \frac{75,13}{22,16} = 3,3903,$

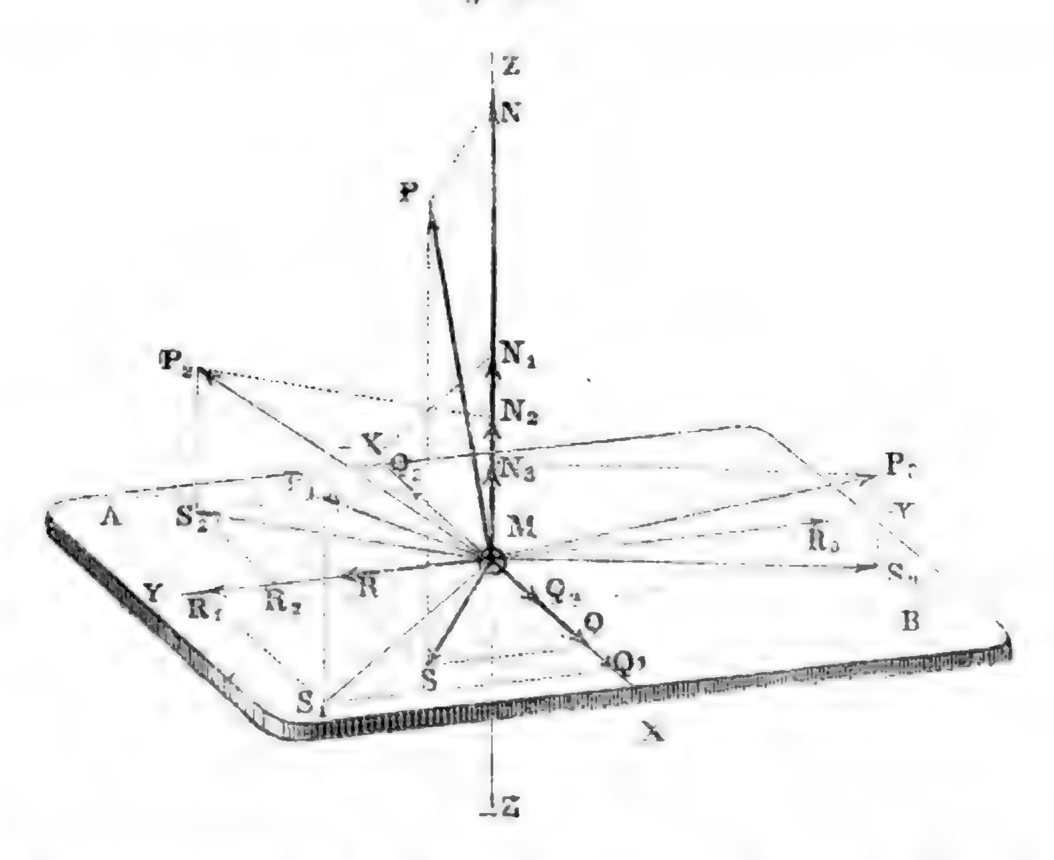
und hiernach den Winkel, welchen die Mittelkraft mit dem positiven Axentheile $MX$ oder der Kraft $P_1$ einschließt, $\alpha = 73^0 34'$, endlich diese Kraft selber:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \frac{Q}{\cos. \alpha} = \frac{R}{\sin. \alpha} = \frac{75,13}{\sin. 73^0 34'} = \frac{75,13}{0,9591} = 78,33 \text{ Pfund}.$$

§. 81 **Kräfte im Raume.** Liegen die Kraftrichtungen nicht in einer und derselben Ebene, so lege man durch den Angriffspunkt der Kräfte eine Ebene und zerlege jede derselben in zwei andere, die eine derselben in der Ebene liegend, die andere rechtwinklig zur Ebene. Die so erhaltenen Seitenkräfte in der Ebene sind nun nach der Regel des vorigen Paragraphen zu einer und die Seitenkräfte rechtwinklig zur Ebene durch bloße Addition zu einer anderen Mittelkraft zu vereinigen; zu den auf diese Weise erhaltenen zwei rechtwinkligen Componenten ist endlich nach der bekannten Regel (§. 77) die Mittelkraft zu finden.

Fig. 95 führt das eben angegebene Verfahren mehr vor Augen. $\overline{MP_1} = P_1$, $\overline{MP_2} = P_2$, $\overline{MP_3} = P_3$ seien die einzelnen Kräfte, $AB$ die

Fig. 95.




Ebene (Projectionsebene) und $\overline{ZZ}$ die Axe winkelrecht zu ihr. Aus der Zerlegung der Kräfte $P_1$, $P_2$ u. s. w. ergeben sich die Kräfte $S_1$, $S_2$ u. s. w. in der Ebene, und die Kräfte $N_1$, $N_2$ u. s. w. in der Normalen $\overline{ZZ}$. Jene werden wieder nach zwei Axen $\overline{XX}$ und $\overline{YY}$ in die Seitenkräfte $Q_1$, $Q_2$ u. s. w. $R_1$, $R_2$ u. s. w. zerlegt und geben die Componenten $Q$ und $R$, woraus sich endlich die Mittelkraft $S$ bestimmen läßt, welche, mit der Summe $N$ aller Normalkräfte $N_1$, $N_2$ u. s. w. vereinigt, die gesuchte Mittelkraft $P$ giebt.

Setzen wir die Winkel, unter welchen die Kraftrichtungen gegen die Ebene $AB$, z. B. gegen den Horizont geneigt sind, $\beta_1$, $\beta_2$ u. s. w., so ergeben sich Kräfte in der Ebene $S_1 = P_1 \cos. \beta_1$, $S_2 = P_2 \cos. \beta_2$ u. s. w., und die Normalkräfte $N_1 = P_1 \sin. \beta_1$, $N_2 = P_2 \sin. \beta_2$ u. s. w.; be-

zeichnen wir endlich die Winkel, welche die in der Ebene $AB$ liegenden Projectionen der Kräfterichtungen mit der Axe $XX$ einschließen, mit $\alpha_1$, $\alpha_2$ u. s. w., setzen wir also $S_1 MX = \alpha_1$, $S_2 MX = \alpha_2$ u. s. w., so stoßen wir auf folgende drei, die Kanten eines geraden Parallelepipeds (des Kräfteparallelepipeds) bildende Kräfte:

$Q = S_1 \cos. \alpha_1 + S_2 \cos. \alpha_2 + \cdots$, oder

1) $Q = P_1 \cos. \beta_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \beta_2 \cos. \alpha_2 + \cdots$, ebenso

2) $R = P_1 \cos. \beta_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \cos. \beta_2 \sin. \alpha_2 + \cdots$, endlich

3) $N = P_1 \sin. \beta_1 + P_2 \sin. \beta_2 + \cdots$

Aus diesen drei Kräften folgt die letzte Resultirende:

4) $P = \sqrt{Q^2 + R^2 + N^2}$, ferner

der Neigungswinkel $PMS = \beta$ derselben gegen die Projectionsebene durch

5) $tang. \beta = \frac{N}{S} = \frac{N}{\sqrt{Q^2 + R^2}}$, endlich

der Winkel $SMX = \alpha$, welchen die Projection der Resultirenden in der Ebene $AB$ mit der ersten Axe $XX$ einschließt, durch

6) $tang. \alpha = \frac{R}{Q}$.

Sind $\lambda_1$, $\lambda_2$ .. die Winkel, welche die Kräfte $P_1$, $P_2$ .. mit der Axe $AX$, ferner $\mu_1$, $\mu_2$ .. die Winkel, welche dieselben mit der Axe $AY$, und $\nu_1, \nu_2$ .. die Winkel, welche sie mit der Axe $AZ$ einschließen, so hat man auch:

1*) $Q = P_1 \cos. \lambda_1 + P_2 \cos. \lambda_2 + \cdots$,

2*) $R = P_1 \cos. \mu_1 + P_2 \cos. \mu_2 + \cdots$, und

3*) $N = P_1 \cos. \nu_1 + P_2 \cos. \nu_2 + \cdots$.

Die Größe der Mittelkraft ist wieder durch die Formel

4*) $P = \sqrt{Q^2 + R^2 + N^2}$

bestimmt, wogegen sich die Richtung derselben mittels der Formeln

5*) $\cos. \lambda = \frac{Q}{P}$, $\cos. \mu = \frac{R}{P}$ und $\cos. \nu = \frac{N}{P}$

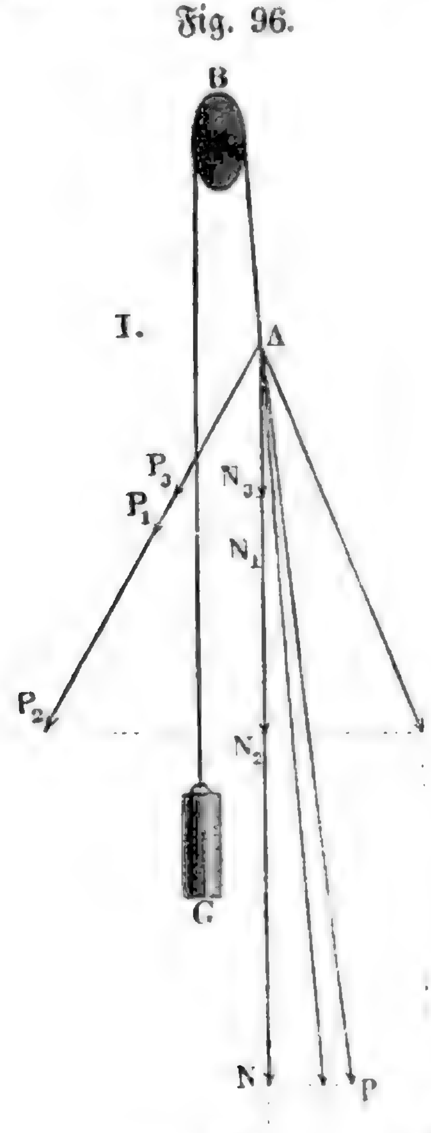
berechnen läßt, in welchen $\lambda$, $\mu$ und $\nu$ die Winkel bezeichnen, welche $P$ mit den Axen $AX$, $AY$ und $AZ$ einschließt.

Auch ist $\cos. \lambda = \cos. \alpha \cos. \beta$, $\cos. \mu = \sin. \alpha \cos. \beta$ und $\nu = 90^0 - \beta$, also $\cos. \nu = \sin. \beta$.

Beispiel. Um ein Gewicht $G$, Fig. 96 I u. II (a. f. S.), mittels des über der Leitrolle $B$ weggezogenen Seiles $GBA$ senkrecht emporzuheben, ziehen an dem Seilende $A$ drei Arbeiter mit den Kräften $P_1 = 50$ Pfund, $P_2 = 100$ Pfund und $P_3 = 40$ Pfund, deren Richtungen eine Neigung von 60 Grad gegen den Horizont haben, und welche die Horizontalwinkel $S_1 AS_2 = S_2 AS_3 = 135$ Grad und $S_3 AS_1 = 90$ Grad unter sich einschließen; welches ist die Größe und Richtung der dem Gewichte $G$ gleichzusetzenden Mittelkraft, und

wie groß könnte dieses Gewicht sein, wenn die Kräfte eine und dieselbe Richtung hätten?

Fig. 96.




Die verticalen Componenten der Kräfte sind:
$N_1 = P_1 \, sin. \, \beta_1 = 50 \, sin. \, 60^0 = 43{,}30$ Pfund, $N_2 = P_2 \, sin. \, \beta_2 = 100 \, sin. \, 60^0 = 86{,}60$ Pfund und $N_3 = P_3 \, sin. \, \beta_3 = 40 \, sin. \, 60^0 = 34{,}64$ Pfund, folglich ist die in $A$ vertical niederziehende Kraft

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 164{,}54 \text{ Pfund.}$$

Ferner sind die horizontalen Componenten:
$S_1 = P_1 \, cos. \, \beta_1 = 50 \, cos. \, 60^0 = 25$ Pfd., $S_2 = P_2 \, cos. \, \beta_2 = 100 \, cos. \, 60^0 = 50$ Pfd., und $S_3 = P_3 \, cos. \, \beta_3 = 40 \, cos. \, 60^0 = 20$ Pfund. Legt man eine Axe $X\overline{X}$ in der Richtung der Kraft $S_1$, so folgt die Seitenkraft in dieser Axe:
$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = S_1 \, cos. \, \alpha_1 + S_2 \, cos. \, \alpha_2 + S_3 \, cos. \, \alpha_3 = 25 \, cos. \, 0^0 + 50 \, cos. \, 135^0 + 20 \, cos. \, 270^0 = 25 \, . \, 1 - 50 \, . \, 0{,}7071 - 20 \, . \, 0 = 25 - 35{,}355 = -10{,}355$ Pfund, sowie die Seitenkraft in der zweiten Axe $Y\overline{Y}$:
$R = R_1 + R_2 + R_3 = S_1 \, sin. \, \alpha_1 + S_2 \, sin. \, \alpha_2 + S_3 \, sin. \, \alpha_3 = 25 \, sin. \, 0 + 50 \, sin. \, 135 + 20 \, sin. \, 270^0 = 50 \, . \, 0{,}7071 - 20 = 15{,}355$ Pfund,
und die horizontale Mittelkraft:
$S = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{10{,}355^2 + 15{,}355^2} = 18{,}520$ Pfund.

Der Winkel $\alpha$, welchen diese Kraft mit der Axe $X\overline{X}$ einschließt, ist bestimmt durch
$tang. \, \alpha = \frac{R}{Q} = -\frac{15{,}355}{10{,}355} = -1{,}4828$, wonach $\alpha = 180 - 56^0 = 124^0 \, 0'$ folgt.

Die vollständige Mittelkraft ist:

$$P = \sqrt{N^2 + S^2} = \sqrt{164{,}54^2 + 18{,}520^2} = 165{,}58 \text{ Pfund.}$$

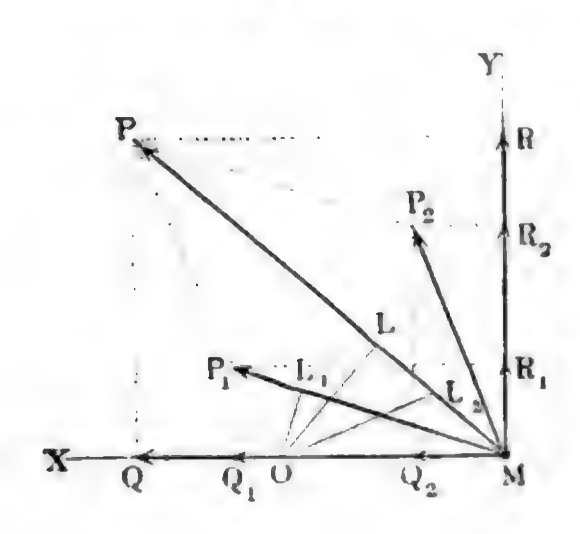
Der Neigungswinkel dieser Kraft gegen den Horizont wird bestimmt durch
$tang. \, \beta = \frac{N}{S} = \frac{164{,}54}{18{,}520} = 8{,}8848$, wonach $\beta = 83^0 \, 35'$ folgt.

Wenn die drei Kräfte in einer und derselben Richtung wirkten, wäre die Mittelkraft $= 50 + 100 + 40 = 190$ Pfund, also um $190 - 165{,}58 = 24{,}42$ Pfund größer als die gefundene.

§. 82 **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** Aus den in dem Vorigen gefundenen Regeln über die Zusammensetzung der Kräfte lassen sich noch zwei andere, im praktischen Gebrauch wesentliche Dienste leistende, ab-

leiten. Es sei in Fig. 97, $M$ ein materieller Punkt, es seien $\overline{MP_1} = P_1$ und $\overline{MP_2} = P_2$ die auf ihn wirkenden Kräfte, endlich sei $\overline{MP} = P$ die Mittelkraft aus den Kräften $P_1$ und $P_2$. Legen wir durch $M$ zwei Axen $MX$ und $MY$ winkelrecht gegen einander, und zerlegen wir die Kräfte $P_1$ und $P_2$ sowie ihre Mittelkraft $P$ in nach diesen Axen gerichtete Seitenkräfte, also $P_1$ in $Q_1$ und $R_1$, $P_2$ in $Q_2$ und $R_2$, und $P$ in $Q$ und $R$, so erhalten wir die Kräfte in der einen Axe $Q_1$, $Q_2$ und $Q$, und die in der anderen $R_1$, $R_2$ und $R$, und es ist $Q = Q_1 + Q_2$ sowie $R = R_1 + R_2$.

Fig. 97.




Nehmen wir nun in der Axe $MX$ irgend einen Punkt $O$ an, und fällen von demselben Perpendikel $OL_1$, $OL_2$ und $OL$ gegen die Richtungen der Kräfte $P_1$, $P_2$ und $P$, so erhalten wir rechtwinkelige Dreiecke $MOL_1$, $MOL_2$, $MOL$, welche den von den drei Kräften gebildeten Dreiecken ähnlich sind, nämlich:

$$\triangle MOL_1 \backsim \triangle MP_1Q_1,$$
$$\triangle MOL_2 \backsim \triangle MP_2Q_2,$$
$$\triangle MOL \backsim \triangle MPQ.$$

Diesen Aehnlichkeiten zufolge ist aber $\frac{MQ_1}{MP_1}$, d. i. $\frac{Q_1}{P_1}, = \frac{ML_1}{MO}$, ebenso $\frac{Q_2}{P_2} = \frac{ML_2}{MO}$ und $\frac{Q}{P} = \frac{ML}{MO}$; setzen wir die hiernach bestimmten Werthe von $Q_1$, $Q_2$ und $Q$ in die Gleichung $Q = Q_1 + Q_2$, so erhalten wir:

$$P \,.\, \overline{ML} = P_1 \,.\, \overline{ML_1} + P_2 \,.\, \overline{ML_2}.$$

Ebenso ist auch:

$$\frac{R_1}{P_1} = \frac{OL_1}{MO}, \quad \frac{R_2}{P_2} = \frac{OL_2}{MO} \text{ und } \frac{R}{P} = \frac{OL}{MO},$$

daher:

$$P \,.\, \overline{OL} = P_1 \,.\, \overline{OL_1} + P_2 \,.\, \overline{OL_2}.$$

Diese Gleichungen gelten auch dann noch, wenn $P$ die Mittelkraft aus drei oder mehreren Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. w. ist, weil man allgemein

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$$
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \text{ hat.}$$

Man kann daher allgemein:

1) $P.\overline{ML} = P_1.\overline{ML_1} + P_2.\overline{ML_2} + P_3.\overline{ML_3} + \cdots,$

2) $P.\overline{OL} = P_1.\overline{OL_1} + P_2.\overline{OL_2} + P_3.\overline{OL_3} + \cdots$ setzen.

Beiden Gleichungen muß die Mittelkraft $P$ aus den Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. w. entsprechen, es lassen sich daher auch diese Gleichungen zur Bestimmung von $P$ anwenden.

Die erstere dieser beiden Gleichungen ist auch auf ein Kräftesystem im Raume, wie $N, Q, R$, Fig. 95, anwendbar, da auch hier $N = N_1 + N_2 + N_3 + \cdots$, oder

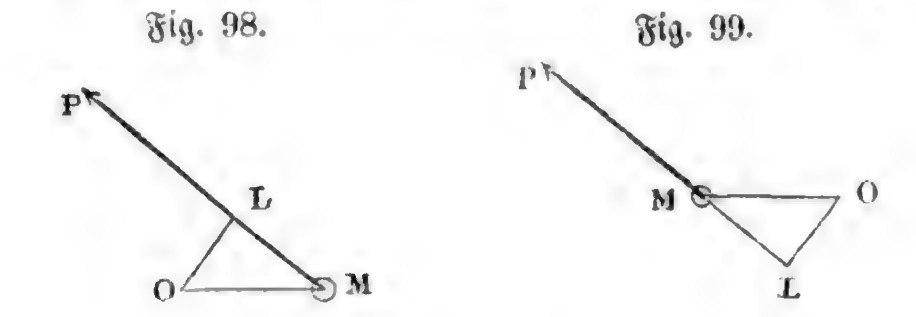
$$P \cos. v = P_1 \cos. v_1 + P_2 \cos. v_2 + P_3 \cos. v_3 + \cdots,\text{ also auch}$$

$$P . \overline{MO} \cos. v = P_1 . \overline{MO} \cos. v_1 + P_2 \overline{MO} \cos. v_2 + P_3 \overline{MO} \cos. v_3 + \cdots$$

ist u. s. w.

§. 83 Rückt der Angriffspunkt $M$, Fig. 98 und Fig. 99, in einer geraden Linie nach $O$, oder denkt man sich den Angriffspunkt um den Weg $MO = x$

Fig. 98. Fig. 99.




fortgegangen, so nennt man die Projection $ML = s$ dieses Weges $x$ nach der Kraftrichtung $MP$ den **Weg der Kraft** $P$, und das Product $Ps$ aus der Kraft und ihrem Wege: die **Arbeit der Kraft**. Führen wir nun diese Bezeichnungen in der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen ein, so erhalten wir:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots,$$

es ist also die **Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der Seitenkräfte.**

Bei der Summation dieser mechanischen Arbeiten hat man, wie bei der Summation von Kräften, auf die Zeichen derselben Rücksicht zu nehmen. Wirkt eine von den Kräften $Q_1$, $Q_2$ u. s. w. des vorigen Paragraphen den übrigen entgegengesetzt, so hat man sie als negative Kraft einzuführen; diese Kraft, wie z. B. $Q_3$ in Fig. 94, §. 80, ist aber Component einer Kraft $P_3$, die unter den Verhältnissen, wie sie im vorigen Paragraphen vorausgesetzt wurden, der Bewegung $ML$, ihres Angriffspunktes entgegengesetzt wirkt; man ist daher genöthigt, diejenige Kraft, Fig. 99, welche der Bewegung $ML$ entgegengesetzt wirkt, als **negativ** zu behandeln, wenn man diejenige Kraft $P$, Fig. 98, welche in der Bewegungsrichtung $ML$ wirkt, **positiv** setzt.

Sind die Kräfte ihrer Größe oder Richtung nach veränderlich, so hat die Formel

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots$$

nur für unendlich kleine Wege $s$, $s_1$, $s_2$ u. s. w. ihre Richtigkeit.

Man nennt die einer unendlich kleinen Verrückung $\sigma$ des materiellen Punktes entsprechenden Wege $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ u. s. w. der Kräfte die **virtuellen Geschwindigkeiten** (franz. vitesses virtuelles; engl. virtual velocities) derselben und das der Formel $P\sigma = P_1\sigma_1 + P_1\sigma_2 + P_3\sigma_3$ entsprechende Gesetz das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten**.

§. 84 **Uebertragung der mechanischen Arbeit.** Nach dem Principe der lebendigen Kräfte ist für eine geradlinige Bewegung (§. 74) die mechanische Arbeit ($Ps$), welche eine Kraft ($P$) verrichtet, indem sie eine Masse $M$ aus der Geschwindigkeit $c$ in die Geschwindigkeit $v$ versetzt:

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Ist nun aber $P$ die Mittelkraft aus anderen, auf die Masse $M$ wirkenden Kräften $P_1$, $P_2$ u. s. w., und sind die Wege, welche diese zurücklegen, $s_1$, $s_2$ u. s. w., während die Masse $M$ selbst den Weg $s$ macht, so hat man nach dem vorigen Paragraphen:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots,$$

es läßt sich daher folgende allgemeine Formel:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$$

angeben, und ihr zu Folge die **Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte gleichsetzen dem halben Gewinn der lebendigen Kraft der Masse.**

Ist die Geschwindigkeit während der Bewegung unveränderlich, also $v = c$, und die Bewegung selbst gleichförmig, so hat man $v^2 - c^2 = 0$, also weder Gewinn noch Verlust an lebendiger Kraft, und daher:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots = 0;$$

dann ist also die Summe der mechanischen Arbeiten von den einzelnen Kräften = Null.

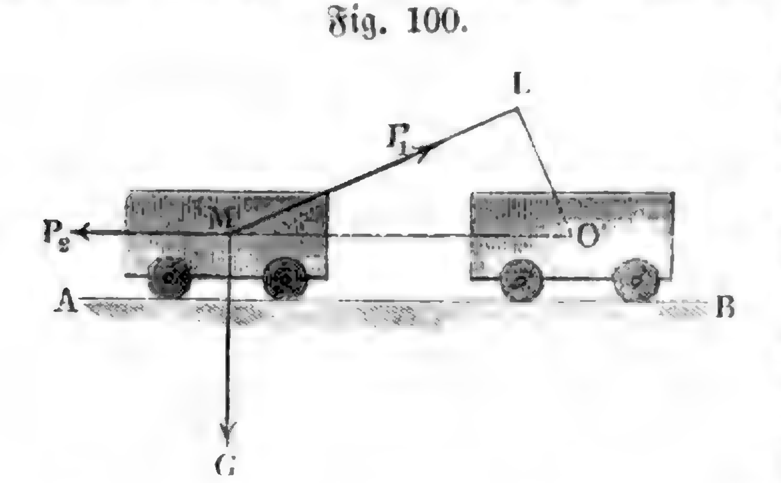
Wenn umgekehrt die Summe der Arbeiten gleich Null ist, so verändern die Kräfte die Bewegung des Körpers in der gegebenen Richtung nicht; hatte der Körper nach der gegebenen Richtung keine Bewegung, so wird er auch durch Einwirkung der Kräfte in dieser Richtung keine bekommen; hatte er vorher eine gewisse Geschwindigkeit nach einer gewissen Richtung, so wird er dieselbe auch behalten.

Sind die Kräfte veränderlich, so kann die veränderliche Geschwindigkeit $v$ nach einer gewissen Zeit wieder in die Anfangsgeschwindigkeit $c$ übergehen, was bei allen periodischen Bewegungen, wie sie namentlich an vielen Maschinen vorkommen, eintritt. Nun giebt aber $v = c$, die Arbeit $\left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$

= Null, es ist daher innerhalb einer Periode der Bewegung der Arbeitsverlust oder Gewinn = Null.

Beispiel. Ein Wagen, Fig. 100, von dem Gewichte $G = 5000$ Pfund wird auf einem horizontalen Wege durch eine unter dem Winkel $\alpha = 24$ Grad aufsteigende Kraft $P_1 = 660$ Pfund vorwärts bewegt und hat während der Bewegung den der Reibung entsprechenden horizontalen Widerstand $P_2 = 450$ Pfund zu überwinden. Welche Arbeit wird die Kraft ($P_1$) verrichten müssen, um jenen anfänglich mit 2 Fuß Geschwindigkeit fortgehenden Wagen in eine Geschwindigkeit von 5 Fuß zu versetzen?

Fig. 100.




Setzen wir den Weg $MO$ des Wagens $= s$, so haben wir die Arbeit der Kraft $P_1$:

$$= P_1 \,.\, \overline{ML} = P_1\, s \cos. \alpha = 660 \,.\, s \cos. 24^0 = 602{,}94 \,.\, s,$$

ferner die Arbeit der als Widerstand wirkenden Kraft $P_2$:

$$= (-\, P_2) \,.\, s = -\, 450 \,.\, s.$$

Hiernach bleibt dann die Arbeit der bewegenden Kraft:

$$Ps = P_1\, s \cos. \alpha - P_2\, s \cos. 0 = (602{,}94 - 450)\, s = 152{,}94 \text{ Fußpfund.}$$

Die Masse erfordert aber zu ihrer Geschwindigkeitsveränderung die Arbeit:

$$\left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = \left(\frac{5^2 - 2^2}{2g}\right) \,.\, 5000 = 0{,}016 \,.\, (25 - 4) \,.\, 5000 = 1680 \text{ Fußpfund;}$$

setzen wir daher beide Arbeiten einander gleich, so erhalten wir $152{,}94 \,.\, s = 1680$, folglich den Weg des Wagens:

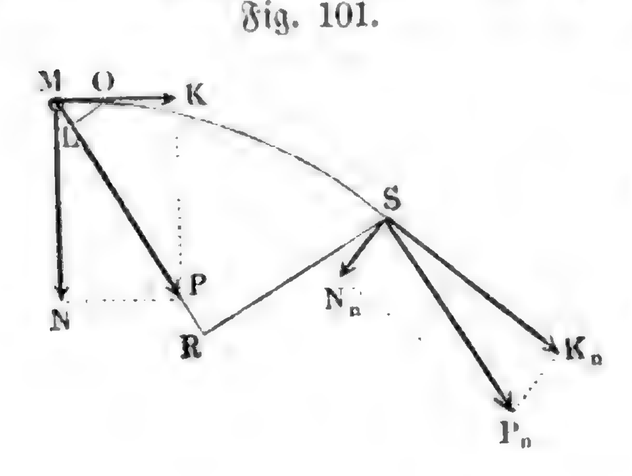
$$MO = s = \frac{1680}{152{,}94} = 10{,}98 \text{ Fuß,}$$

und endlich die mechanische Arbeit der Kraft $P_1$:

$$P_1\, s \cos. \alpha = 602{,}94 \,.\, 10{,}98 = 6620 \text{ Fußpfund.}$$

§. 85 **Krummlinige Bewegung.** Setzen wir unendliche kleine Wege ($\sigma, \sigma_1$ u. s. w.) voraus, so können wir die zuletzt gefundene Formel auch auf krumme Bahnen anwenden. Es sei $MOS$, Fig. 101, die Bahn des materiellen Punktes, und $\overline{MP} = P$, die Mittelkraft aller auf ihn wirkenden Kräfte. Zerlegen wir diese Kraft in zwei andere, wovon die eine $\overline{MK} = K$ tangential und die andere $\overline{MN} = N$ normal zur Curve gerichtet ist, so nennen wir jene Tangentialkraft und diese Normalkraft.

Fig. 101.




Während der materielle Punkt

das Element $MO = \sigma$ seines krummen Weges $MOS$ durchläuft und seine Geschwindigkeit $c$ in $v_1$ übergeht, nimmt die Masse $M$ desselben die Arbeit $\left(\frac{v_1^2 - c^2}{2}\right) M$ in Anspruch, gleichzeitig verrichtet aber die Tangentialkraft $K$ die Arbeit $K\sigma$, und die Normalkraft die Arbeit $N . 0 = 0$; es ist folglich:

$$K\sigma = \left(\frac{v_1^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Wenn während der Zurücklegung des Weges $MOS = s = n\sigma$ die Tangentialgeschwindigkeit des Körpers aus $c$ in $v$ übergeht, und hierbei die Tangentialkraft nach und nach die Werthe $K_1, K_2 + \cdot\cdot\cdot + K_n$ annimmt, so ist daher auch

$$(K_1 + K_2 + \cdot\cdot + K_n)\,\sigma = \left(\frac{K_1 + K_2 + \cdot\cdot + K_n}{n}\right) s = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M,$$

also die mechanische Arbeit:

$$A = Ks = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M, \text{ wobei } K = \frac{K_1 + K_2 + \cdot\cdot + K_n}{n}$$

den Mittelwerth der veränderlichen Tangentialkraft bezeichnet (vergl. §. 75).

Setzt man die Projection des Wegelementes $\overline{MO} = \sigma$ in der Kraftrichtung $\overline{ML} = \xi$, so hat man auch $P\xi = K\sigma$; wenn daher bei Durchlaufung des Weges $MOS = s = n\sigma$ die Mittelkraft $P$ allmälig die Werthe $P_1, P_2 \cdot\cdot\cdot P_n$ annimmt und die Projectionen der Wegelemente nach und nach $\xi_1, \xi_2 \cdot\cdot\cdot \xi_n$ sind, so hat man auch:

$$P_1\,\xi_1 + P_2\,\xi_2 + \cdot\cdot + P_n\,\xi_n = (K_1 + K_2 + \cdot\cdot + K_n)\,\sigma,$$

und daher:

$$A = P_1\,\xi_1 + P_2\,\xi_2 + \cdot\cdot + P_n\,\xi_n = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Wenn hierbei die Richtung der Kraft $P$ constant bleibt, so bilden die sämmtlichen Projectionen $\xi_1, \xi_2 \cdot\cdot \xi_n$ der Wegtheile $\sigma, \sigma$ .. oder des ganzen Weges $s = n\sigma$ eine gerade Linie

$$MR = x = \xi_1 + \xi_2 + \cdot\cdot + \xi_n.$$

Setzt man dann noch $x = m\xi$, so kann man auch

$$A = (P_1 + P_2 + \cdot\cdot + P_m)\,\xi = (P_1 + P_2 + \cdot\cdot + P_m)\,\frac{x}{m} = Px$$

setzen, wo dann $P$ das Mittel $\frac{P_1 + P_2 + \cdot\cdot P_m}{m}$ aus den gleichen Theilen $\xi = \frac{x}{m}$ die entsprechende Kraftrichtung bezeichnet.

Es ist daher dann auch

$$Px = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = (h - k)\, G,$$

wenn $k$ die der Anfangsgeschwindigkeit $c$, sowie $h$ die der Endgeschwindigkeit $v$ entsprechende Geschwindigkeitshöhe, und $G$ das Gewicht $Mg$ des bewegten Körpers bezeichnet.

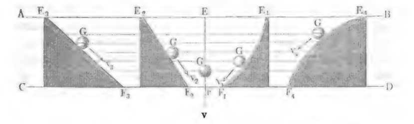
Also auch bei einer krummlinigen Bewegung ist die ganze Arbeit der bewegenden Kraft gleich dem Producte aus dem Gewichte des bewegten Körpers und aus der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Anmerkung. Die gewonnene Formel, welche aus der Verbindung des Princips der lebendigen Kräfte mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgeht, ist vorzüglich in den Fällen anwendbar, wenn Körper durch feste Unterlagen oder durch Aufhängen gezwungen werden, eine bestimmte Bahn zu durchlaufen. Treibt einen solchen Körper die Schwerkraft allein, so ist die Arbeit, welche das Gewicht $G$ desselben beim Herabsinken von einer Höhe, deren Verticalprojection $s$ ist, verrichtet, $= Gs$, und daher:

$$Gs = (h - k)\, G, \text{ d. i. } s = h - k.$$

Welches also auch der Weg sei, in welchem ein Körper von einer horizontalen Ebene $AB$, Fig. 102, bis zu einer zweiten Horizontalebene $CD$ herab-

Fig. 102.




sinkt, immer ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen gleich der senkrechten Fallhöhe. Körper, welche die Bahnen $EF$, $E_1F_1$, $E_2F_2$ u. s. w. mit gleicher Geschwindigkeit ($c$) zu durchlaufen anfangen, erlangen auch am Ende dieser Bahnen, obwohl zu verschiedenen Zeiten, gleiche Endgeschwindigkeiten. Ist z. B. die Anfangsgeschwindigkeit $c = 10$ Fuß und die senkrechte Fallhöhe $s = 20$ Fuß, also $h = s + k = 20 + 0{,}016 \cdot 10^2 = 21{,}6$ Fuß, so folgt die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh} = 7{,}906\, \sqrt{21{,}6} = 36{,}74 \text{ Fuß},$$

in welcher geraden oder krummen Linie auch das Herabfallen vor sich gehe.

## Dritter Abschnitt.

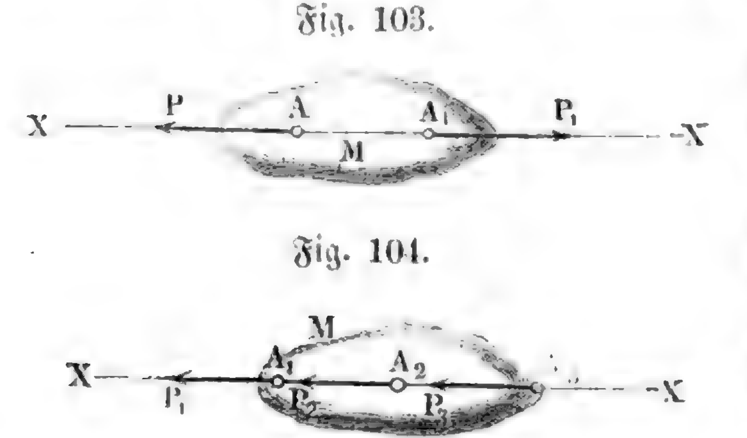
# Statik fester Körper.

### Erstes Capitel.

## Allgemeine Lehren der Statik fester Körper.

**Verlegung des Angriffspunktes.** Obgleich jeder feste Körper §. 86 durch die auf ihn wirkenden Kräfte in seiner Form verändert, nämlich zusammengedrückt, ausgedehnt, gebogen wird u. s. w., so ist es doch gestattet, denselben in vielen Fällen als vollkommen starr anzusehen, weil diese Formveränderung oder Verrückung der Theile nicht allein oft sehr klein ist, sondern auch innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes vor sich geht. Wir werden deshalb zunächst und wenn es auch nicht besonders erwähnt wird, der Einfachheit wegen, jeden festen Körper als ein System fest unter einander verbundener Punkte ansehen.

Eine Kraft $P$, Fig. 103, welche auf einen Punkt $A$ eines festen Körpers $M$ wirkt, pflanzt sich in ihrer eigenen Richtung $\overline{XX}$ unverändert durch den ganzen Körper hindurch, und eine ihr gleiche Gegenkraft $P_1$ setzt sich mit ihr nur dann ins Gleichgewicht, wenn der Angriffspunkt $A_1$ derselben in der Richtung $\overline{XX}$ der ersten Kraft liegt.




Die Entfernung dieser Angriffspunkte $A$ und $A_1$ ist ohne Einfluß auf diesen Gleichgewichtszustand; die beiden Gegenkräfte halten sich bei jeder Ent-

fernung das Gleichgewicht, wenn nur beide Punkte fest unter einander verbunden sind. Hiernach läßt sich also behaupten: **die Wirkung einer Kraft $P$ (Fig. 104) bleibt dieselbe, in welchem Punkte $A_1, A_2, A_3$ u. s. w. ihrer Richtung sie auch angreift oder unmittelbar auf den Körper $M$ wirkt.**

§. 87 Ergreifen **zwei, in derselben Ebene wirkende Kräfte** $P_1$ und $P_2$, Fig. 105, einen Körper in verschiedenen Punkten $A_1$ und $A_2$, so ist deren Wirkung auf den Körper dieselbe, als wenn sie den Punkt $C$ zum gemeinschaftlichen Angriffspunkte hätten, in welchem sich die Richtungen beider schneiden; denn es läßt sich nach dem oben ausgesprochenen Satze jeder dieser Angriffspunkte nach $C$ verlegen, ohne eine Aenderung in den Wirkungen dadurch hervorzubringen. Macht man deshalb

Fig. 105.

$$\overline{CQ_1} = \overline{A_1 P_1} = P_1 \text{ und}$$

$$\overline{CQ_2} = \overline{A_2 P_2} = P_2,$$

und vollendet jetzt das Parallelogramm $C Q_1 Q Q_2$, so giebt uns dessen Diagonale die Mittelkraft $\overline{CQ} = P$ von $\overline{CQ_1}$ und $\overline{CQ_2}$ und also auch von den Kräften $P_1$ und $P_2$, deren Angriffspunkt übrigens auch jeder andere Punkt $A$ in der Richtung dieser Diagonale sein kann.

Setzt man der so gefundenen Mittelkraft $\overline{AP} = P$ eine gleich große, in irgend einem Punkte $B$ der Diagonalrichtung $CQ$ angreifende Gegenkraft $\overline{BP} = -P$ entgegen, so wird dadurch den gegebenen Kräften $P_1$ und $P_2$ das Gleichgewicht gehalten, und es sind folglich $P_1, P_2$ und $-P$ drei Kräfte im Gleichgewichte.

§. 88 **Statische Momente.** Fällt man von irgend einem Punkte $O$, Fig. 106, in der Kräfteebene Perpendikel $OL_1$, $OL_2$ und $OL$ gegen die Richtungen der Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$ und ihrer Mittelkraft $P$, so hat man dem §. 82 zufolge:

$$P \,.\, \overline{OL} = P_1 \,.\, \overline{OL_1} + P_2 \,.\, \overline{OL_2},$$

und es läßt sich demnach aus den Perpendikeln oder Abständen $OL_1$ und $OL_2$ der Seitenkräfte der Abstand $OL$ der Mittelkraft finden, indem man setzt:

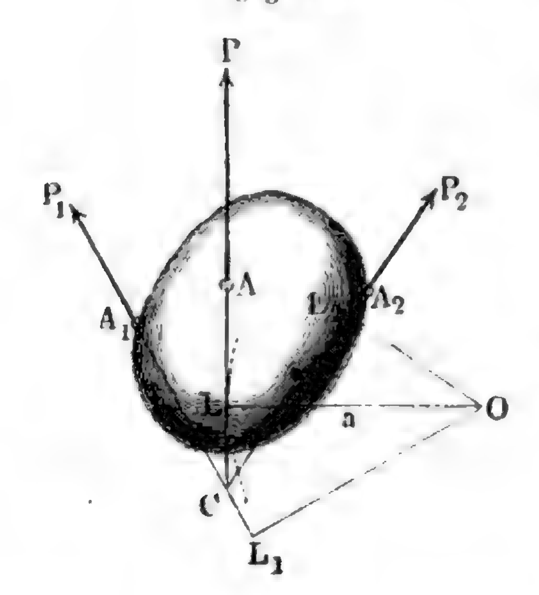
$$OL = \frac{P_1 \,.\, \overline{OL_1} + P_2 \,.\, \overline{OL_2}}{P}.$$

Während man die Richtung und Größe der Mittelkraft durch Anwendung des Kräfteparallelogramms findet, ergiebt sich der Ort $L$ ihres Angriffspunktes mit Hülfe der letzten Formel durch Bestimmung des Abstandes $OL$.

Schließen die gehörig verlängerten Kraftrichtungen den Winkel $P_1 C P_2 = \alpha$ zwischen sich ein, so hat man die Größe der Mittelkraft:

$$1)\quad P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos.\alpha}.$$

Fig. 106.




Bildet ferner die Mittelkraft den Winkel $PCP_1 = \alpha_1$ mit der Richtung der Seitenkraft $P_1$, so ist:

$$2)\quad \sin.\alpha_1 = \frac{P_2 \sin.\alpha}{P}.$$

Stehen endlich die Richtungen $CP_1$ und $CP_2$ der gegebenen Kräfte um $OL_1 = a_1$ und $OL_2 = a_2$ von einem willkürlichen Punkte $O$ ab, so ist der Abstand $OL = a$ der Richtung $CP$ der Mittelkraft von eben diesem Punkte:

$$3)\quad a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{P}.$$

Mit Hülfe dieses letzten Abstandes $a$ ergiebt sich aber der Ort der Mittelkraft ohne Rücksichtnahme auf den Hülfspunkt $C$, wenn man mit $a$ aus $O$ einen Kreis construirt und an diesen eine Tangente $LP$ legt, deren Richtung durch den Winkel $\alpha_1$ bestimmt ist.

Beispiel. Es wirken auf einen Körper die Kräfte $P_1 = 20$ Pfund und $P_2 = 34$ Pfund, deren Richtungen unter einem Winkel $P_1 C P_2 = \alpha = 70$ Grad zusammenstoßen und von einem gewissen Punkte $O$ um $OL_1 = a_1 = 4$ Fuß und $OL_2 = a_2 = 1$ Fuß abstehen, welches ist die Größe, die Richtung und der Ort der Mittelkraft? Die Größe der Mittelkraft ist:

$$P = \sqrt{20^2 + 34^2 + 2.20.34 \cos.70^0} = \sqrt{400 + 1156 + 1360.0,34202}$$
$$= \sqrt{2021,15} = 44,96 \text{ Pfund};$$

für ihre Richtung ist ferner:

$$\sin.\alpha_1 = \frac{34.\sin.70^0}{44,96},\ Log.\sin.\alpha_1 = 0,85163 - 1,$$

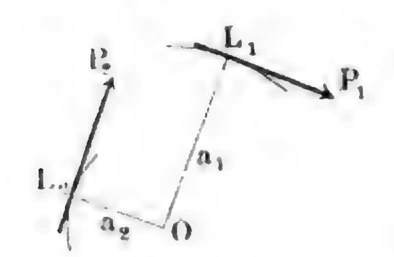
daher $\alpha_1 = 45^0\,17'$ der Winkel, um welchen diese Mittelkraft von der Richtung der Kraft $P_1$ abweicht. Der Ort oder die Angriffslinie dieser Mittelkraft ist endlich bestimmt durch ihren Abstand $OL$ von $O$, welcher ist:

$$a = \frac{20.4 + 34.1}{44,96} = \frac{114}{44,96} = 2,536 \text{ Fuß}.$$

§. 89 Man nennt die Normalabstände $OL_1 = a_1$, $OL_2 = a_2$ u. s. w. der Kraftrichtungen von einem willkürlichen Punkte $O$, Fig. 107 (a. f. S.), die **Hebelarme der Kräfte** (franz. bras du levier; engl. arms of lever), weil sie

bei der in der Folge abzuhandelnden Theorie des Hebels ein wesentliches Element ausmachen. Das Product $Pa$ aus Kraft und Hebelarm hat den Namen **statisches** oder **Kraftmoment** (franz. moment des forces; engl. momentum of the forces) erhalten. Nun ist aber $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2$; folglich **das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der beiden Seitenkräfte.**

Fig. 107.




Bei der Addition der Momente ist noch auf Plus und Minus Rücksicht zu nehmen. Wirken die Kräfte $P_1$ und $P_2$, wie in Fig. 107, nach gleicher Richtung um den Punkt $O$ herum, stimmen z. B. die Kraftrichtungen mit den Bewegungsrichtungen der Zeiger einer Uhr überein, so nennt man diese Kräfte, und deshalb auch ihre Momente, gleichbezeichnete; wird also die eine positiv angenommen, so muß die andere ebenfalls positiv gesetzt werden. Wirken hingegen, wie in Fig. 108, die Kräfte in entgegengesetzten Richtungen um den

Fig. 108.

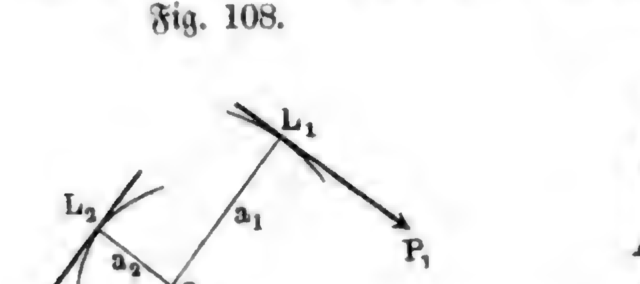
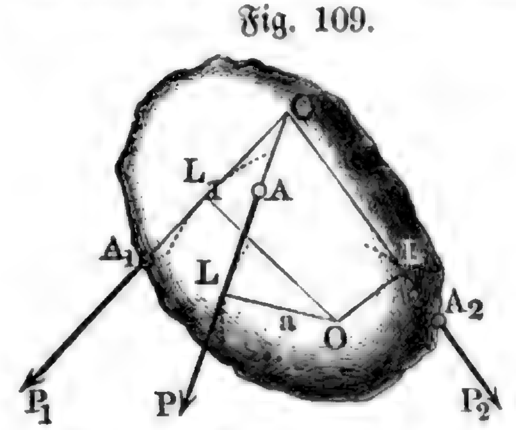



Fig. 109.




Punkt $O$ herum, so nennt man dieselben, sowie ihre statischen Momente, entgegengesetzte, und es ist nun die eine negativ zu setzen, wenn man die andere positiv annimmt. Bei der in Fig. 109 repräsentirten Zusammensetzung hat man z. B. $Pa = P_1 a_1 - P_2 a_2$, weil $P_2$ der Kraft $P_1$ entgegengesetzt, also ihr Moment $P_2 a_2$ negativ ist, während bei der Zusammensetzung in Fig. 106, $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2$ ausfällt.

§. 90 **Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene.** Ergreifen drei Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$, Fig. 110, einen Körper in verschiedenen Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$ einer Ebene, so vereinige man nach der letzten Regel erst zwei ($P_1$, $P_2$) dieser Kräfte zu einer Mittelkraft $\overline{CQ} = Q$, und diese nachher, nach derselben Regel, mit der dritten Kraft ($P_3$), indem man aus $DR_1 = CQ$ und $DR_2 = A_3 P_3$ das Parallelogramm $DR_1 RR_2$ construirt. Die Diagonale $DR$ ist nun die gesuchte Mittelkraft $P$ zu $P_1$, $P_2$ und $P_3$. Es ist hiernach auch leicht einzusehen, wie beim Hinzukommen einer vierten Kraft $P_4$ die Mittelkraft gefunden werden kann, u. s. w.

Bei dieser Zusammensetzung der Kräfte wird die Größe und Richtung der Mittelkraft genau so gefunden, als wenn die Kräfte in einem einzigen Punkte angriffen (s. §. 80), es sind daher die in §. 80 angegebenen Rechnungsregeln anzuwenden, um diese beiden ersten Elemente der Mittelkraft zu bestimmen; um aber das dritte Element, nämlich den Ort der Mittelkraft oder ihre Angriffslinie zu finden, hat man von der Gleichung zwischen den statischen Momenten Gebrauch zu machen. Sind auch hier $OL_1 = a_1$, $OL_2 = a_2$, $OL_3 = a_3$ und $OL = a$ die Hebelarme der drei Seitenkräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ und ihrer Mittelkraft $P$ in Hinsicht auf einen willkürlichen Punkt $O$ und ist $Q$ die Mittelkraft aus $P_1$ und $P_2$ sowie $OK$ der Hebelarm derselben, so hat man:

Fig. 110.

$$Pa = Q . \overline{OK} + P_3 a_3 \text{ und } Q . \overline{OK} = P_1 a_1 + P_2 a_2.$$

Verbinden wir aber diese beiden Gleichungen mit einander, so erhalten wir:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3,$$

und ebenso stellt sich für mehrere Kräfte heraus:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \cdots,$$

d. h. es ist allemal das (statische) Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe aus den (statischen) Momenten der Seitenkräfte.

§. 91 Sind nun $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. w., Fig. 111 (a. f. S.), die einzelnen Kräfte eines Kräftesystemes, sind ferner $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ u. s. w. die Winkel $P_1 D_1 X$, $P_2 D_2 X$, $P_3 D_3 X$ u. s. w., unter welchen eine beliebig angenommene Axe $X\overline{X}$ von den Kraftrichtungen geschnitten wird, und bezeichnen endlich $a_1$, $a_2$, $a_3$ u. s. w. die Hebelarme $OL_1$, $OL_2$, $OL_3$ u. s. w. dieser Kräfte hinsichtlich des Durchschnittspunktes $O$ zwischen beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, so hat man nach den §§. 80 und 90:

1) die Seitenkraft parallel zur Axe $X\overline{X}$:

$$Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + \cdots,$$

2) die Seitenkraft parallel zur Axe $Y\overline{Y}$:

$$R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + \cdots,$$

3) die **Mittelkraft** des ganzen Systemes:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

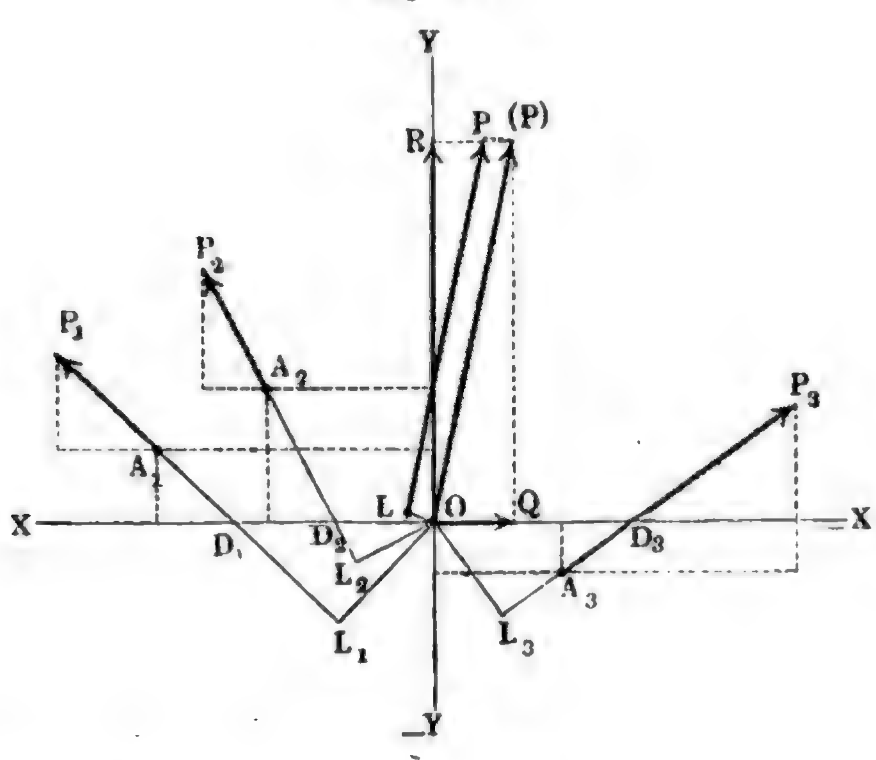
4) den **Winkel** $\alpha$, unter welchem die Mittelkraft die Axe schneidet, durch

$$tang.\ \alpha = \frac{R}{Q},$$

5) den **Hebelarm der Mittelkraft**, oder den Halbmesser des Kreises, welchen die Richtung der Mittelkraft tangirt:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{P}.$$

Fig. 111.




Bezeichnen $b$, $b_1$, $b_2$ u. s. w. die Abschnitte $OD$, $OD_1$, $OD_2$ u. s. w. von der Axe $X\overline{X}$, so ist:

$$a = b\, sin.\, \alpha,\ a_1 = b_1\, sin.\, \alpha_1,\ a_2 = b_2\, sin.\, \alpha_2 \text{ u. s. w.},$$

und daher auch:

$$b = \frac{P_1 b_1\ sin.\, \alpha_1 + P_2 b_2\ sin.\, \alpha_2 + \cdots}{P\ sin.\, \alpha} = \frac{R_1 b_1 + R_2 b_2 + \cdots}{R}.$$

Ersetzt man die Mittelkraft $(P)$ durch eine ihr gleiche Gegenkraft $(-P)$, so halten sich die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ . . . $(-P)$ das Gleichgewicht.

Bezeichnen noch $x_1, x_2 \ldots$ sowie $y_1, y_2 \ldots$ die Coordinaten der Angriffspunkte $A_1, A_2 \ldots$ der gegebenen Kräfte $P_1, P_2 \ldots$, so sind die Momente der Componenten der letzteren: $R_1 x_1, R_2 x_2 \ldots$ sowie $Q_1 y_1, Q_2 y_2 \ldots$, und es ist das Moment der Mittelkraft:

$$Pa = (R_1 x_1 + R_2 x_2 + \cdots) - (Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \cdots),$$

daher der **Hebelarm** derselben:

$$a = \frac{(R_1 x_1 + R_2 x_2 + \cdots) - (Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \cdots)}{\sqrt{(R_1 + R_2 + \cdots)^2 + (Q_1 + Q_2 + \cdots)^2}}.$$

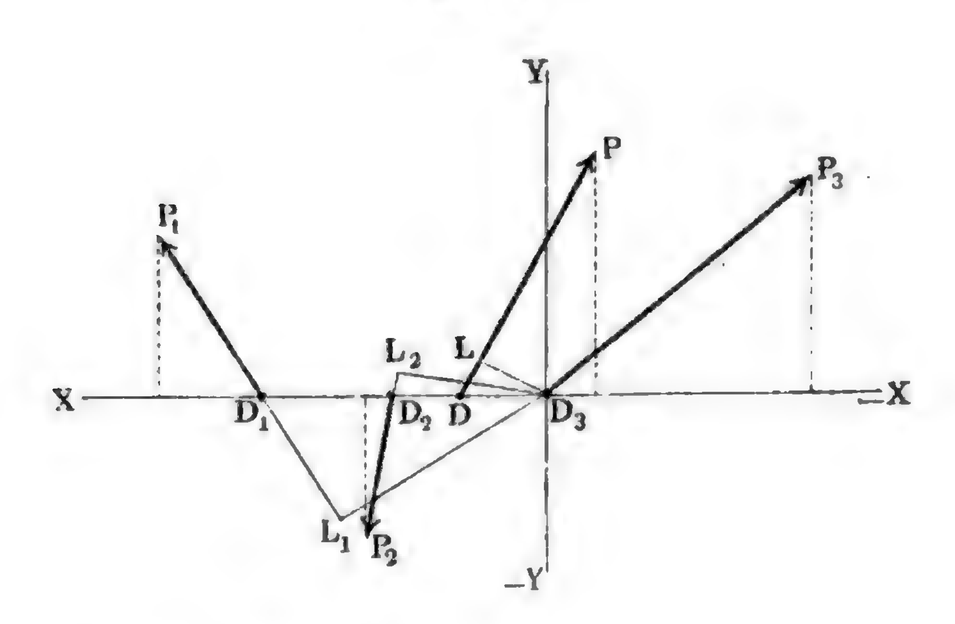
**Beispiel.** Die Kräfte $P_1 = 40$ Pfund, $P_2 = 30$ Pfund, $P_3 = 70$ Pfund, Fig. 112 durchschneiden die Axe $X\overline{X}$ unter den Winkeln $\alpha_1 = 60^0$, $\alpha_2 = -80^0$, $\alpha_3 = 142^0$, und es sind die Entfernungen zwischen den Durchschnittspunkten $D_1$, $D_2$, $D_3$ der Kraftrichtungen mit der Axe, $D_1 D_2 = 4$ Fuß und $D_2 D_3 = 5$ Fuß. Man sucht die sämmtlichen Bestimmungsstücke der Mittelkraft. Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $X\overline{X}$ ist:

$$Q = 40\, cos.\, 60^0 + 30\, cos.\, (-80^0) + 70\, cos.\, 142^0$$
$$= 40\, cos.\, 60^0 + 30\, cos.\, 80^0 - 70\, cos.\, 38^0$$
$$= 20 + 5{,}209 - 55{,}161 = -29{,}952 \text{ Pfund}.$$

Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $Y\overline{Y}$:

$$R = 40\, sin.\, 60^0 + 30\, sin.\, (-80^0) + 70\, sin.\, 142^0$$
$$= 40\, sin.\, 60^0 - 30\, sin.\, 80^0 + 70\, sin.\, 38^0$$
$$= 34{,}641 - 29{,}544 + 43{,}096 = 48{,}193.$$

Fig. 112.




Nun folgt die gesuchte Mittelkraft:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{29{,}952^2 + 48{,}193^2} = \sqrt{3219{,}68} = 56{,}742 \text{ Pfund}.$$

Der Winkel $\alpha$, unter welchem sie die Axe schneidet, ist ferner bestimmt durch:

$$tang.\, \alpha = \frac{R}{Q} = \frac{48{,}193}{-29{,}952} = -1{,}6090, \text{ es ergiebt sich daher:}$$

$$\alpha = 180^0 - 58^0 8' = 121^0 52'.$$

Verlegt man den Axpunkt $O$ nach $D_3$, so hat man den Hebelarm der Mittelkraft:

$$\overline{OL} = a = \frac{P_1\, sin.\, \alpha_1 \,.\, b_1 + P_2\, sin.\, \alpha_2 \,.\, b_2 + \ldots}{P} = \frac{R_1 b_1 + R_2 b_2 + \cdots}{P}$$

$$= \frac{34{,}641 \,.\, (4+5) - 29{,}544 \,.\, 5 + 0}{56{,}742} = \frac{164{,}049}{56{,}742} = 2{,}891 \text{ Fuß},$$

und dagegen den Abschnitt:

$$OD = b = \frac{164,049}{48,193} = 3,404 \text{ Fuß}.$$

§. 92 **Parallelkräfte.** Sind die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. w., Fig. 113, eines festen Systemes unter sich parallel, so fallen die Hebelarme $OL_1$, $OL_2$, $OL_3$ u. s. w. über einander; zieht man nun durch den Anfangspunkt $O$ eine willkürliche Linie $X\overline{X}$, so schneiden hiervon die Kraftrichtungen die Stücke $OD_1$, $OD_2$, $OD_3$ u. s. w. ab, welche den Hebelarmen $OL_1$, $OL_2$, $OL_3$ u. s. w. proportional sind, weil $\triangle\, OD_1L_1 \backsim \triangle\, OD_2L_2 \backsim \triangle\, OD_3L_3$ u. s. w. ist. Bezeichnet man den Winkel $D_1OL_1 = D_2OL_2$ u. s. w. durch $\alpha$, die Hebelarme $OL_1$, $OL_2$ u. s. w. durch $a_1$, $a_2$ u. s. w., die Abschnitte $OD_1$, $OD_2$ u. s. w. durch $b_1$, $b_2$ u. s. w., so hat man:

$$a_1 = b_1 \cos. \alpha,\ a_2 = b_2 \cos. \alpha \text{ u. s. w.}$$

Setzt man endlich diese Werthe in die Formel:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots,$$

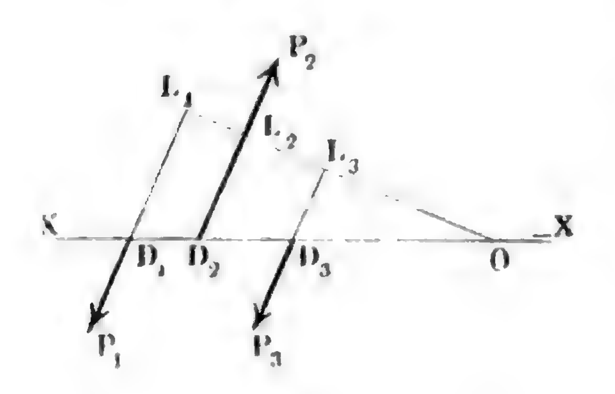
so erhält man:

$$Pb \cos. \alpha = P_1 b_1 \cos. \alpha + P_2 b_2 \cos. \alpha + \cdots,$$

oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $\cos. \alpha$ wegläßt:

$$Pb = P_1 b_1 + P_2 b_2 + \cdots$$

Fig. 113.




Es ist also bei jedem Systeme paralleler Kräfte gestattet, die Hebelarme durch die von irgend einer Linie $X\overline{X}$ abgeschnittenen schiefen Entfernungen, wie $OD_1$, $OD_2$ u. s. w., zu ersetzen. Da die Größe und Richtung der Mittelkraft eines Kräftesystemes mit verschiedenen Angriffspunkten dieselbe ist, wie die eines Systemes von Kräften, welche in einem Punkte angreifen, so hat die Mittelkraft des Systemes paralleler Kräfte mit den einzelnen Kräften gleiche Richtung und ist gleich der algebraischen Summe derselben; es ist also:

1) $P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$ und

2) $a = \dfrac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}$, oder auch:

$$b = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Beispiel. Es seien die Kräfte $P_1 = 12$ Pfund, $P_2 = -32$ Pfund, $P_3 = 25$ Pfund, und ihre Richtungen mögen eine gerade Linie in den Punkten $D_1$, $D_2$ und $D_3$, Fig. 113 (a. v. S.), schneiden, deren Abstände von einander folgende sind: $D_1 D_2 = 21$ Zoll, $D_2 D_3 = 30$ Zoll. Man soll die Mittelkraft angeben. Die Größe dieser Kraft ist:

$$P = 12 - 32 + 25 = 5 \text{ Pfund},$$

und die Entfernung $D_1 D$ ihres Angriffspunktes $D$ in der Axe $X\overline{X}$, vom Punkte $D_1$ aus gemessen:

$$b = \frac{12 \cdot 0 - 32 \cdot 21 + 25 \cdot (21 + 30)}{5} = \frac{0 - 672 + 1275}{5} = 120{,}6 \text{ Zoll}.$$

**Kräftepaare.** Zwei gleich große, zwar parallel, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte $P_1$ und $P_1$, Fig. 114, haben die Mittelkraft: §. 93

$$P = P_1 + (-P_1) = P_1 - P_1 = \text{Null},$$

mit dem Hebelarme

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{0} = \infty \text{ (unendlich groß)}.$$

Fig. 114.

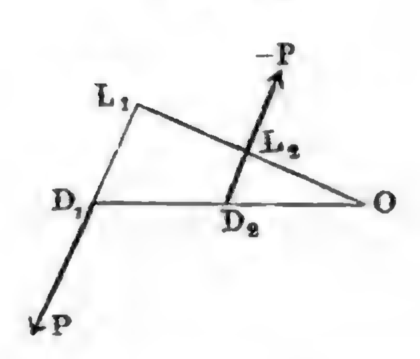
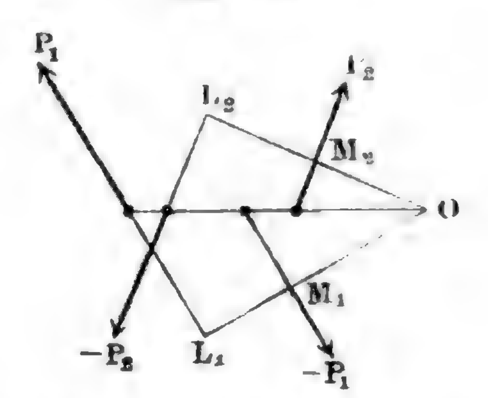



Fig. 115.




Zur Herstellung des Gleichgewichtes mit einem solchen Kräftepaare ist diesemnach eine einzige endliche und in endlicher Entfernung wirkende Kraft $P$ nicht hinreichend, wohl aber können zwei solcher Kräftepaare einander das Gleichgewicht halten. Sind $P_1$ und $-P_1$ sowie $-P_2$ und $P_2$, Fig. 115, zwei solche Paare, und $OL_1 = a_1$, $OM_1 = OL_1 - L_1 M_1 = a_1 - b_1$, ferner $OL_2 = a_2$ und $OM_2 = OL_2 - L_2 M_2 = a_2 - b_2$ die Hebelarme derselben, von einem gewissen Punkte $O$ aus genommen, so hat man für das Gleichgewicht:

$$P_1 a_1 - P_1 (a_1 - b_1) - P_2 a_2 + P_2 (a_2 - b_2) = 0, \text{ d. i.:}$$
$$P_1 b_1 = P_2 b_2.$$

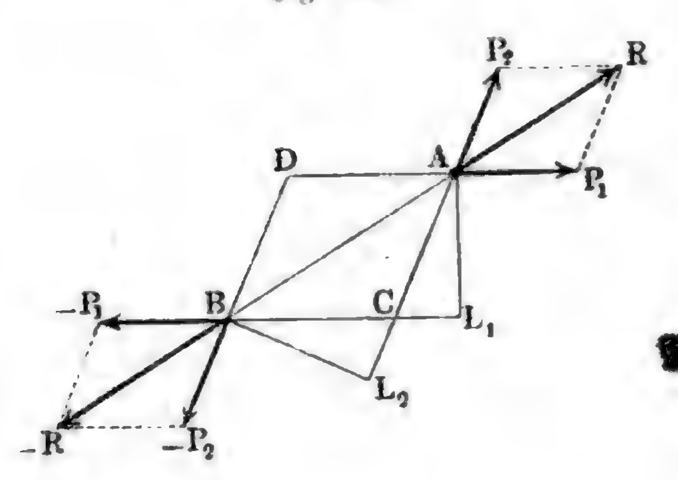
Zwei solche Kräftepaare sind also im Gleichgewichte, wenn das Product aus einer Kraft und ihrem Abstande von der Gegenkraft bei einem Paare so groß ist wie bei dem anderen.

Ein Paar von gleichen Gegenkräften nennt man schlechtweg ein Kräftepaar (franz. und engl. couple), und das Product aus einer Kraft desselben und dem Normalabstande von der anderen Kraft heißt das Moment des

Kräftepaares. Nach dem Vorigen sind zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräftepaare im Gleichgewichte, wenn sie gleiche Momente besitzen.

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auch direct auf folgende Weise darthun. Verlegen wir die Angriffspunkte der Kräfte $P_1$, $P_2$ und $-P_1$, $-P_2$ der Kräftepaare $(P_1, -P_1)$ und $(P_2, -P_2)$, Fig. 116, nach den Durchschnitten $A$ und $B$ ihrer Angriffslinien, und vereinigen wir sowohl $P_1$ mit $P_2$, als auch $-P_1$ mit $-P_2$ durch ein Kräfteparallelogramm zu den Mittelkräften $R$ und $-R$. Fallen nun die Richtungen dieser Mittelkräfte in die Fortsetzungen der Linie $AB$, so sind diese Kräfte und folglich auch die ihnen entsprechenden Kräftepaare $(P_1, -P_1)$, $(P_2, -P_2)$, mit einander im Gleichgewichte. Damit dies eintrete, muß das durch $AB$ und durch die Richtungen der Kräfte $-P_1$ und $P_2$ gebildete Dreieck $ABC$ ähnlich sein den Dreiecken $RAP_1$ und $BRP_1$, und daher der Proportion:

Fig. 116.




$$\frac{CB}{CA} = \frac{P_1}{P_2} \text{ oder der Gleichung: } P_1 . \overline{CA} = P_2 . \overline{CB}$$

Genüge geschehen.

Nun sind aber die Perpendikel $AL_1 = b_1$ und $BL_2 = b_2$ zwischen den Richtungen der Kräftepaare den Hypotenusen $CA$ und $CB$ der einander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke $ACL_1$ und $BCL_2$ proportional, folglich ist auch

$$P_1 b_1 = P_2 b_2$$

zu setzen. Es sind also Momente der beiden im Gleichgewichte befindlichen Kräftepaare einander gleich.

Setzen wir in der Formel (§. 91) für den Hebelarm $a$ der Mittelkraft:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{P}$$

$P = 0$, während die Summe der statischen Momente einen endlichen Werth hat, so bekommen wir ebenfalls $a = \infty$, ein Beweis, daß in diesem Falle gleichfalls keine Mittelkraft, sondern nur ein Kräftepaar möglich ist.

Damit sich die Kräfte eines Kräftesystems das Gleichgewicht halten, ist also nicht bloß nöthig, daß die Mittelkraft $P = \sqrt{Q^2 + R^2}$, oder jeder der Componenten $Q$ und $R$, sondern auch ihr Moment

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots = \text{Null sei.}$$

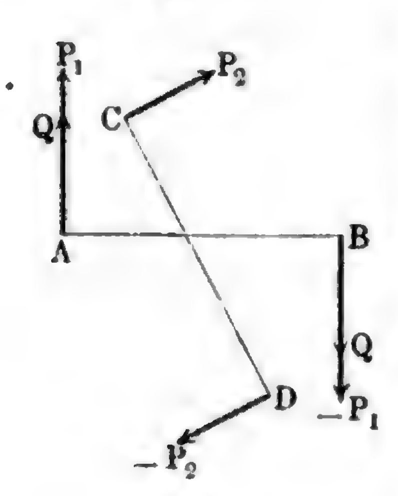
Beispiel. Besteht ein Kräftepaar aus den Kräften $P_1 = 25$ Pfund und $-P_1 = -25$ Pfund, ein anderes aber aus den Kräften $-P_2 = -18$ Pfund und $P_2 = 18$ Pfund, und ist der Normalabstand $b_1$ des ersteren Paares $= 3$ Fuß, so muß für den Gleichgewichtszustand, der Normalabstand oder Hebelarm des zweiten

$$b_2 = \frac{25 \,.\, 3}{18} = 4\tfrac{1}{6} \text{ Fuß betragen.}$$

**Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare.** Die Zusammensetzung und Zerlegung der in einer und derselben Ebene wirkenden Kräftepaare wird durch eine einfache algebraische Addition bewirkt, und ist daher viel einfacher als die Zusammensetzung und Zerlegung einzelner Kräfte. Da sich zwei entgegengesetzte Kräftepaare einander das Gleichgewicht halten, wenn sie einerlei Momente haben, so sind auch die Wirkungen zweier gleichgerichteten Kräftepaare einander gleich, wenn das Moment des einen Kräftepaares gleich ist dem Moment des anderen. Sind daher zwei Kräftepaare $(P_1, -P_1)$ und $(P_2, -P_2)$, Fig. 117, mit einander zu vereinigen, so kann man das eine $(P_2, -P_2)$ durch ein anderes ersetzen, welches mit dem ersteren Paar $(P_1, -P_1)$ den Hebelarm $AB = b_1$ gemeinschaftlich hat, und dann die Kräfte desselben zu denen des anderen addiren, so daß man ein einziges Kräftepaar erhält. Ist $b_2$ der Hebelarm $CD$ des anderen Kräftepaares und ist $(Q, -Q)$ das reducirte Kräftepaar, so hat man $Q b_1 = P_2 b_2$, folglich

§. 94

Fig. 117.




$$Q = \frac{P_2\, b_2}{b_1},$$ daher einen Componenten des zusammengesetzten Kräftepaares:

$$P_1 + Q = P_1 + \frac{P_2\, b_2}{b_1}$$

und das gesuchte Moment des resultirenden Kräftepaares:

$$(P_1 + Q)\, b_1 = P_1\, b_1 + P_2\, b_2.$$

Auf gleiche Weise findet man das aus drei Kräftepaaren resultirende Kräftepaar. Sind $P_1\, b_1$, $P_2\, b_2$ und $P_3\, b_3$ die Momente dieser Kräftepaare, so kann man:

$$P_2\, b_2 = Q\, b_1 \text{ und } P_3\, b_3 = R\, b_1, \text{ oder:}$$

$$Q = \frac{P_2\, b_2}{b_1} \text{ und } R = \frac{P_3\, b_3}{b_1}$$

setzen, so daß nun das Moment des resultirenden Kräftepaares

$$(P_1 + Q + R)\, b_1 = P_1\, b_1 + P_2\, b_2 + P_3\, b_3$$

sich ergiebt.

Bei dieser Vereinigung von Kräftepaaren zu einem einzigen Kräftepaare ist natürlich auch auf die Vorzeichen Rücksicht zu nehmen, da die Momente

derjenigen Kräftepaare, welche nach der einen Umdrehungsrichtung wirken, das positive, und die Momente derjenigen Kräftepaare, welche den Körper nach der entgegengesetzten Richtung umzudrehen suchen, das negative Zeichen erhalten müssen. Ueber die Umdrehungsrichtung eines Kräftepaares kann man sich sogleich Rechenschaft ablegen, wenn man zwischen den Angriffslinien des Paares einen Drehungspunkt willkürlich annimmt. Haben dann die Kräfte des Paares die Richtung, in welcher sich die Zeiger einer Uhr umdrehen, so kann man das Kräftepaar, und also auch sein Moment, ein positives nennen, und wirken die Kräfte eines Paares der Umdrehungsbewegung der Uhrzeiger entgegengesetzt, d. i. von rechts nach links, so erhält dann dieses Kräftepaar, und also auch sein Moment, das negative Zeichen.

Die vorstehende Regel über die Zusammensetzung der Kräftepaare ist dann noch anwendbar, wenn die Kräftepaare in parallelen Ebenen wirken. Wenn die parallelen Kräftepaare ($P_1$, $-P_1$) und ($P_2$, $-P_2$), Fig. 118, in parallelen Ebenen $MM$ und $NN$ mit gleichen Momenten $P_1 b_1$ und $P_2 b_2$ einander entgegenwirken, so halten sie einander ebenfalls das Gleichgewicht; denn es resultiren aus denselben zwei Mittelkräfte $P_1 + P_2$ und $-(P_1 + P_2)$, welche einander vollständig aufheben, da sie in demselben Punkte $E$ angreifen, der bestimmt ist durch die Gleichungen:

Fig. 118.

$$\overline{EA} . P_1 = \overline{EC} . P_2, \ \overline{EB} . P_1 = \overline{ED} . P_2, \text{ und}$$
$$P_1 b_1 = P_2 b_2, \text{ d. i. } \overline{AB} . P_1 = \overline{CD} . P_2, \text{ wonach}$$
$$EA : EB : AB = EC : ED : CD$$

folgt, und daher dieser Punkt mit dem Durchschnitte der Transversalen $AC$ und $BD$ zusammenfällt.

Da dem Kräftepaare ($P_2$, $-P_2$) jedes andere Kräftepaar das Gleichgewicht hält, welches mit demselben in einerlei Ebene wirkt, und das entgegengesetzte Moment hat, so folgt auch, daß jedes Kräftepaar durch ein anderes ersetzt werden kann, welches mit demselben einerlei Moment hat, und in einer Ebene wirkt, welche der Ebene des ersten parallel läuft.

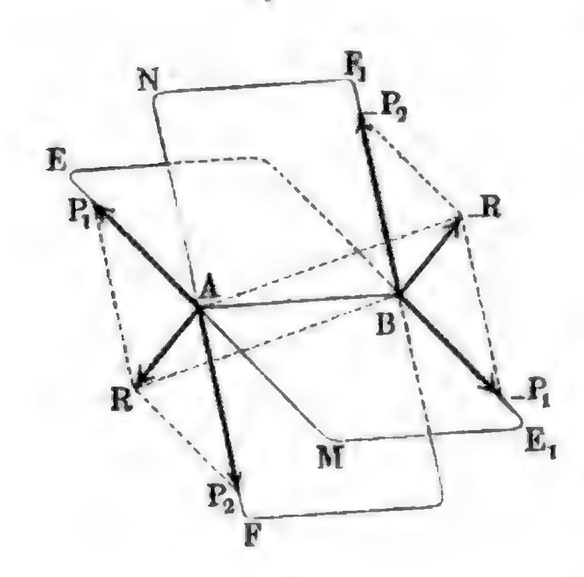
Wenn daher auf einen Körper mehrere Kräftepaare wirken, deren Wirkungsebenen parallel sind, so lassen sich dieselben durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment die algebraische Summe von den Momenten dieser Paare ist, und dessen übrigens willkürliche Wirkungsebene mit den Ebenen des gegebenen Systems parallel läuft.

Wirken zwei Kräftepaare ($P_1$, $- P_1$) und ($P_2$, $- P_2$) in zwei Ebenen $EME_1$ und $FNF_1$, Fig. 119, welche sich unter einem gewissen Winkel

$$EAF = E_1 B F_1 = \alpha$$

in der geraden Linie $AB$ schneiden, so lassen sich dieselben, nachdem man sie auf einen und denselben Hebelarm $AB$ reducirt hat, durch das Kräfteparallelogramm zu einem Kräftepaare vereinigen. Durch dieses erhält man aus $P_1$ und $P_2$ die Mittelkraft $R$, sowie aus $-P_1$ und $-P_2$ die Mittelkraft $-R$. Beide Mittelkräfte sind gleich groß und einander entgegengesetzt gerichtet, und bilden folglich wieder ein Kräftepaar ($R$, $- R$), dessen Ebene durch die Richtungen von $R$ und $- R$ bestimmt ist.

Fig. 119.




Durch Rechnung bestimmt sich nach §. 77 die Mittelkraft $R$ mittelst der Formeln:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos. \alpha} \text{ und}$$

$$\sin. \beta = \frac{P_2 \sin. \alpha}{R},$$

wo $\beta$ den Winkel $EAR = E_1 B \overline{R}$ bezeichnet, welchen die Richtung der Mittelkraft $R$ mit der der Seitenkraft $P_1$ einschließt.

Ist nun der Hebelarm $AB = c$, und setzt man das Moment $P_1 c = Pa$ und das Moment $P_2 c = Qb$, oder $P_1 = \frac{Pa}{c}$ und $P_2 = \frac{Qb}{c}$, so erhält man:

$$R = \sqrt{\left(\frac{Pa}{c}\right)^2 + \left(\frac{Qb}{c}\right)^2 + 2 \frac{Pa}{c} \cdot \frac{Qb}{c} \cos. \alpha},$$

also das Moment des aus den Kräftepaaren ($P$, $-P$) und ($Q$, $-Q$) resultirenden Kräftepaares:

$$Rc = \sqrt{(Pa)^2 + (Qb)^2 + 2 Pa \,.\, Qb \,.\, \cos. \alpha},$$

und ebenso für den Winkel $\beta$, um welchen die Ebene desselben von der des ersten Kräftepaares ($P$, $-P$) abweicht:

$$\sin. \beta = \frac{Qb}{Rc} \sin. \alpha.$$

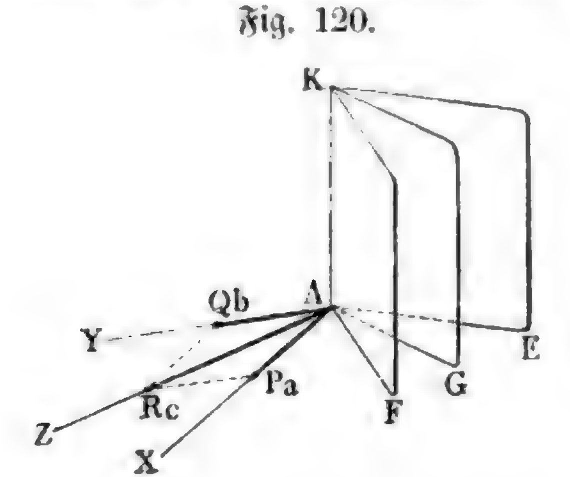
Es lassen sich also die in verschiedenen Ebenen wirkenden Kräftepaare genau so zusammensetzen und zerlegen, wie die in einem Punkte angreifenden einfachen Kräfte, wenn man statt der letzteren die Momente der ersteren, und

statt der Winkel, unter welchen sich die Richtungen der ersteren schneiden, die Winkel einsetzt, um welchen die Ebenen der letzteren von einander abweichen.

Diese Zurückführung der Theorie der Kräftepaare auf die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung einfacher Kräfte läßt sich noch durch Einführen von Umdrehungsaxen statt der Umdrehungsebenen der Paare besonders vereinfachen. Unter der Umdrehungsaxe oder Axe eines Kräftepaares versteht man jedes Perpendikel auf der Ebene desselben. Da sich jedes Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verrücken läßt, ohne seine Wirkung auf den Körpern zu verändern, so kann man auch die Axe des Paares durch jeden beliebigen Punkt legen.

In Folge der Rechtwinklichkeit zwischen der Ebene und der Axe eines Kräftepaares schließen die Axen $AX$, $AY$ und $AZ$, Fig. 120, der Kräftepaare eines Körpers genau denselben Winkel zwischen sich ein, wie die Ebene $AEK$, $AFK$ und $AGK$ derselben. Ist das eine Kräftepaar die Resultante aus den beiden anderen, so bildet, dem Vorstehenden zufolge, dessen Moment $Rc$ die Diagonale des aus den Momenten $Pa$ und $Qb$ construirten Parallelogramms, trägt man daher die Momente $Pa$ und $Qb$ auf die Axen $AX$ und $AY$ auf und vollendet man das dadurch angefangene Parallelogramm, so erhält man in der Diagonale desselben nicht allein die Axe $AZ$ des resultirenden Kräftepaares, sondern auch dessen Moment $Rc$. Hiernach sind also die **Kräftepaare genau so zusammen zu setzen und zu zerlegen, wie die einzelnen in einem Punkte angreifenden Kräfte**, vorausgesetzt, daß man die Axen dieser Paare mit den Richtungen, und die Momente derselben mit den Größen der einfachen Kräfte vertauscht. Alle in §. 76, §. 77 u. s. w. abgehandelten Lehren über die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte finden daher auch in diesem Sinne ihre Anwendung bei der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare.

Fig. 120.




§. 96 **Mittelpunkt paralleler Kräfte.** Liegen die Parallelkräfte in verschiedenen Ebenen, so ist deren Vereinigung auf folgende Weise auszuführen. Verlängert man die Gerade $A_1 A_2$, Fig. 121, welche die Angriffspunkte zweier Parallelkräfte $P_1$ und $P_2$ verbindet, bis zur Ebene $XY$ zwischen den rechtwinklig gegen einander stehenden Axen $MX$ und $MY$, und nimmt man den Durchschnittspunkt $K$ als den Anfangspunkt an, so erhält man für den Angriffspunkt $A$ der Mittelkraft $P_1 + P_2$ dieser Kräfte:

$$(P_1 + P_2) . \overline{KA} = P_1 . \overline{KA_1} + P_2 . \overline{KA_2}.$$

Da nun $B$, $B_1$ und $B_2$ die Projectionen der Angriffspunkte $A$, $A_1$ und $A_2$ in der Ebene $XY$ sind, so hat man:

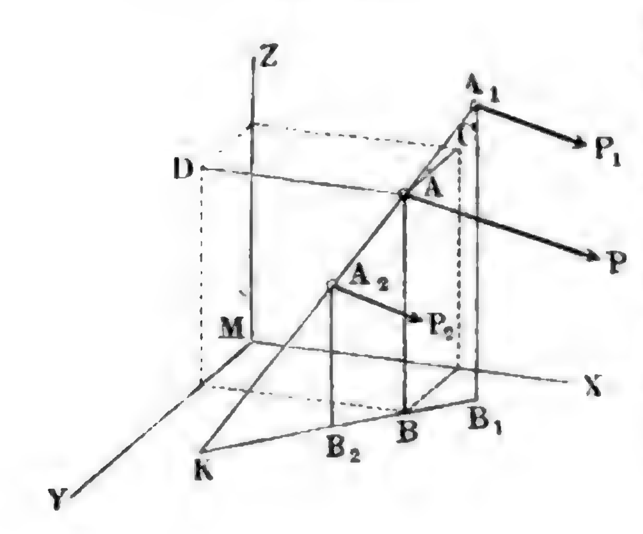
$$AB : A_1 B_1 : A_2 B_2 = KA : KA_1 : KA_2,$$

und daher auch:

$$(P_1 + P_2) . \overline{AB} = P_1 . \overline{A_1 B_1} + P_2 . \overline{A_2 B_2}.$$

Bezeichnen wir die Normalabstände $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ u. s. w. der Angriffspunkte von der Grundebene $XY$ durch $z_1$, $z_2$, $z_3$ u. s. w., und den Normalabstand des Angriffspunktes $A$ von eben dieser Ebene durch $z$, so haben wir hiernach für zwei Kräfte:

Fig. 121.




$$(P_1 + P_2) z = P_1 z_1 + P_2 z_2 ;$$

erner für drei Kräfte, da $P_1 + P_2$ als eine Kraft mit dem Momente $P_1 z_1 + P_2 z_2$ angesehen werden kann:

$$(P_1 + P_2 + P_3) z = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 \text{ u. s. w.}$$

Es ist also allgemein:

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \cdots) z = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 \ldots,$$

folglich:

$$1) \quad z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Bezeichnen wir ebenso die Abstände $AC$ und $AD$ des Angriffspunktes $A$ der Mittelkraft von den Ebenen $XZ$ und $YZ$ durch $y$ und $x$, sowie die Abstände der Angriffspunkte $A_1$, $A_2 \ldots$ von eben diesen Ebenen durch $y_1$, $y_2 \ldots$ und $x_1$, $x_2 \ldots$, so erhalten wir:

$$2) \quad y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots} \text{ und}$$

$$3) \quad x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Die Abstände, $x$, $y$, $z$, von drei Grundebenen, wie z. B. von dem Fußboden und zwei Seitenwänden eines Zimmers, bestimmen aber den Punkt $(A)$ vollständig, denn er ist der achte Eckpunkt des aus $x$, $y$ und $z$ zu construirenden Parallelepipedes; es giebt folglich nur einen einzigen Angriffspunkt der Mittelkraft eines solchen Kräftesystems.

Da die drei Formeln für $x$, $y$ und $z$ die Winkel, welche die Kräfte mit den Grundebenen einschließen, gar nicht enthalten, so ist der Angriffspunkt von diesen, und also auch von den Kraftrichtungen, gar nicht abhängig, es

läßt sich demnach auch das ganze System um diesen Punkt drehen, ohne daß er aufhört, Angriffspunkt zu sein, wenn nur bei dieser Drehung der Parallelismus unter den Kräften bleibt.

Man nennt bei einem Systeme paralleler Kräfte das Product aus einer Kraft und dem Abstande ihres Angriffspunktes von einer Ebene oder Linie das **Moment** dieser Kraft hinsichtlich dieser Ebene oder Linie, auch ist es gewöhnlich, den Angriffspunkt der Mittelkraft selbst den **Mittelpunkt** des ganzen Systems (franz. centre des forces parallèles; engl. centre of parallel forces) zu nennen. Man erhält also den Abstand des **Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte von irgend einer Ebene oder Linie** (letzteres, wenn die Kräfte in einer Ebene liegen), **wenn man die Summe der (statischen) Momente durch die Summe der Kräfte dividirt.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Beispiel. Sind die Kräfte | $P_n$ | 5 | — 7 | 10 | 4 | Pfund. |
| die Abstände oder Coordinaten der Angriffspunkte derselben . . . . | $x_n$ | 1 | 2 | 0 | 9 | Fuß. |
| | $y_n$ | 2 | 4 | 5 | 3 | „ |
| | $z_n$ | 8 | 3 | 7 | 10 | „ |
| so hat man die Momente . . . . | $P_n x_n$ | 5 | — 14 | 0 | 36 | Fußpfd. |
| | $P_n y_n$ | 10 | — 28 | 50 | 12 | „ |
| | $P_n z_n$ | 40 | — 21 | 70 | 40 | „ |

Nun ist aber die Kraftsumme $= 19 - 7 = 12$ Pfund; es folgen daher die Abstände des **Mittelpunktes** dieses Systems von den drei Grundebenen:

$$x = \frac{5 + 36 - 14}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ Fuß},$$

$$y = \frac{10 + 50 + 12 - 28}{12} = \frac{44}{12} = \frac{11}{3} = 3{,}66 \text{ Fuß, und}$$

$$z = \frac{40 + 70 + 40 - 21}{12} = \frac{129}{12} = \frac{43}{4} = 10{,}75 \text{ Fuß}.$$

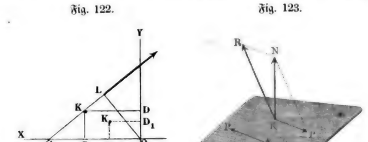
§. 97 **Kräfte im Raume.** Kommt es darauf an, ein aus verschieden gerichteten Kräften bestehendes System zu vereinigen, so lege man eine Ebene durch dasselbe, verlege sämmtliche Angriffspunkte in diese Ebene und zerlege jede Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine winkelrecht auf diese Ebene und die zweite in die Ebene selbst fallend. Sind $\beta_1, \beta_2 \ldots$ die Winkel, unter welchen die Ebene von den Kraftrichtungen geschnitten wird, so folgen die Normalkräfte $P_1 \sin. \beta_1$, $P_2 \sin. \beta_2 \ldots$, dagegen die Kräfte in der Ebene $P_1 \cos. \beta_1$, $P_2 \cos. \beta_2$ u. s. w. Die letzteren lassen sich nach §. 91 und die ersteren nach dem letzten Paragraphen (96) zu einer Mittelkraft vereinigen. In der Regel werden sich die Richtungen beider Mittelkräfte nirgends schneiden, und es

wird demnach auch eine Vereinigung dieser Kräfte nicht möglich sein; geht aber die Mittelkraft aus den parallelen Kräften durch einen Punkt $K$, Fig. 122, in der Richtung $AB$ der Mittelkraft $P$ aus den in der Ebene (der Papierebene) befindlichen Kräften, so ist eine Zusammensetzung möglich. Setzen wir die Abstände $OC = DK = u$ und $OD = CK = v$ für den Angriffspunkt $K$ der ersten Mittelkraft, dagegen den Hebelarm $ON$ der zweiten $= a$ und den Winkel $BAO$, unter welchem dieselbe die Axe $X\overline{X}$ schneidet, $= \alpha$, so ist die Bedingung für die Möglichkeit der Zusammensetzung:

$$u \sin. \alpha + v \cos. \alpha = a.$$

Wird dieser Gleichung nicht Genüge geleistet, geht z. B. die Mittelkraft aus den Normalkräften durch $K_1$, so ist die Zurückführung des ganzen Kräftesystems auf eine Mittelkraft gar nicht möglich, wohl aber läßt sich dasselbe

Fig. 122. Fig. 123.

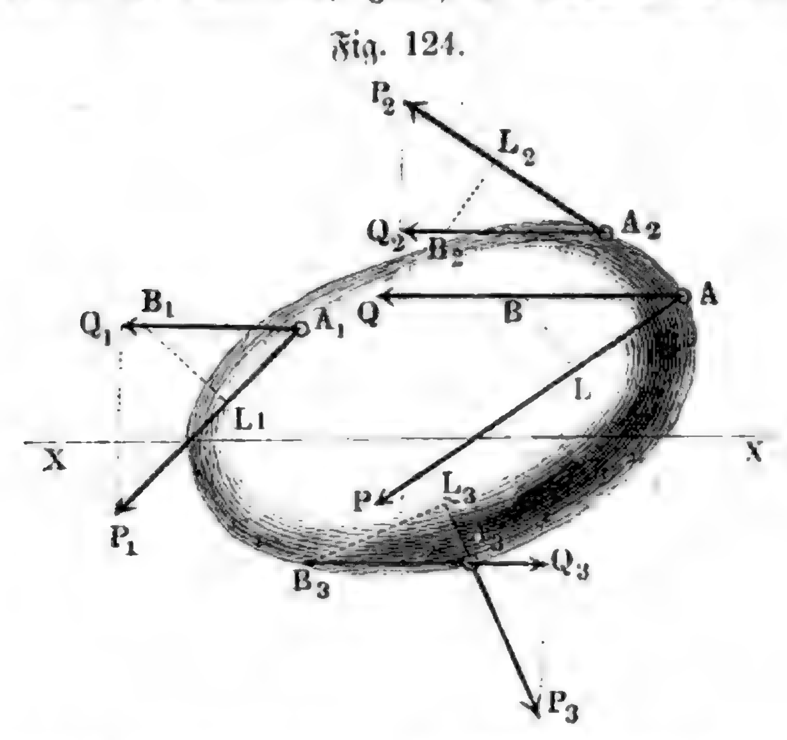



auf eine Mittelkraft $R$, Fig. 123, und ein Kräftepaar ($P$, — $P$) zurückführen, wenn man die Mittelkraft $N$ der parallelen Seitenkräfte in die Kräfte — $P$ und $R$ zerlegt, von denen die eine der Mittelkraft $P$ von den Kräften in der Ebene an Größe gleich, parallel und entgegengesetzt gerichtet ist.

Diese Zurückführung eines beliebigen Kräftesystemes auf eine einzige Kraft und auf ein Kräftepaar läßt sich auch unmittelbar dadurch bewirken, daß man sich in einem beliebigen Punkte des Körpers, auf welchen dieses System von Kräften wirkt, noch ein System von Kräftepaaren angreifend denkt, deren positive Componenten den gegebenen Kräften in Größe und Richtung vollkommen gleich sind. Diese Kräftepaare ändern natürlich in dem Gleichgewichtszustande des Körpers nichts, da sie in demselben Punkte angreifen, sich folglich selbst aufheben; dagegen lassen sich die positiven Componenten derselben nach den bekannten Regeln (§. 81) zu einer Mittelkraft vereinigen, und es bilden die negativen Componenten derselben mit den gegebenen Kräften, Kräftepaare, die sich nach §. 95 zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen lassen. Es bleibt also zuletzt nur noch jene Mittelkraft und dieses Kräftepaar übrig.

§. 98 **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** Wird ein System von in einer Ebene wirkenden Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$, Fig. 124, progressiv, d. h. so fortgerückt, daß alle Angriffspunkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ ... gleiche Parallelwege $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ durchlaufen, so ist (in dem Sinne des Paragraphen 83) die Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der

Fig. 124.




Seitenkräfte, folglich im Zustande des Gleichgewichts dieselbe = Null. Sind die in die Kraftrichtungen fallenden Projectionen $A_1 L_1$, $A_2 L_2$ u. s. w. des gemeinschaftlichen Weges $A_1 B_1 = A_2 B_2$ u. s. w. $= s_1$, $s_2$ u. s. w., so ist also die mechanische Arbeit der Mittelkraft:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots$$

Dieses Gesetz folgt aus einer der Formeln des §. 91. Nach dieser ist der mit einer Axe $XX$ parallel laufende Component $Q$ der Mittelkraft gleich der Summe:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$$

der gleichlaufenden Componenten der Seitenkräfte $P_1$, $P_2$ u. s. w.; nun folgt aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A_1 B_1 L_1$ und $A_1 P_1 Q_1$ die Proportion:

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{A_1 L_1}{A_1 B_1} = \frac{s_1}{AB},$$

und hieraus:

$$Q_1 = \frac{P_1 s_1}{AB}, \text{ ebenso } Q_2 = \frac{P_2 s_2}{AB} \text{ u. s. w., sowie auch } Q = \frac{Ps}{AB},$$

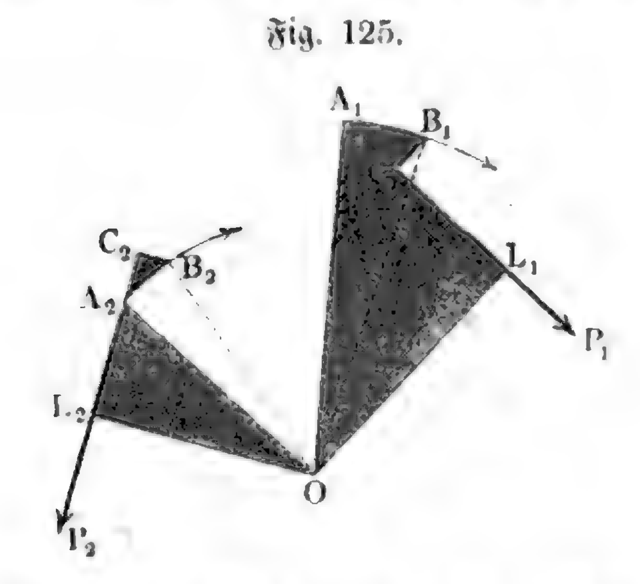
man kann daher statt

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$$
$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots$$

setzen.

§. 99 **Gleichgewicht bei einer Drehbewegung.** Wird das in einer Ebene wirkende Kräftesystem $P_1, P_2$ u. s. w., Fig. 125, um einen Punkt $O$ sehr wenig gedreht, so gilt das in den Paragraphen 83 und 98 ausgesprochene Gesetz des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ebenfalls, wie sich auf folgende Weise beweisen läßt. Nach §. 89 ist das Kraftmoment $P . \overline{OL} = Pa$ der Mittelkraft gleich der Summe von den Momenten der Seitenkräfte, also:

Fig. 125.




$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots$$

Der einer Drehung um den kleinen Winkel $A_1 O B_1 = \beta^0$ oder Bogen $\beta = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi$ entsprechende Weg $A_1 B_1$ ist auf dem Halbmesser $O A_1$ winkelrecht, daher das Dreieck $A_1 B_1 C_1$, welches entsteht, wenn man ein Loth $B_1 C_1$ gegen die Kraftrichtung fällt, dem durch den Hebelarm $O L_1 = a_1$ bestimmten Dreiecke $O A_1 L_1$ ähnlich und diesemnach:

$$\frac{O L_1}{O A_1} = \frac{A_1 C_1}{A_1 B_1}.$$

Setzt man die virtuelle Geschwindigkeit $\overline{A_1 C_1} = \sigma_1$ und den Bogen $\overline{A_1 B_1} = \overline{O A_1} . \beta$, so erhält man:

$$a_1 = \frac{O A_1 . \sigma_1}{O A_1 . \beta} = \frac{\sigma_1}{\beta}, \text{ ebenso } a_2 = \frac{\sigma_2}{\beta} \text{ u. s. w.}$$

Wenn man nun diese Werthe für $a_1$, $a_2$ u. s. w. in der obigen Gleichung einsetzt, so erhält man:

$$\frac{P \sigma}{\beta} = \frac{P_1 \sigma_1}{\beta} + \frac{P_2 \sigma_2}{\beta} + \cdots \text{ u. s. w.,}$$

oder, da $\beta$ ein gemeinschaftlicher Divisor ist,

$$P \sigma = P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2 + \cdots,$$

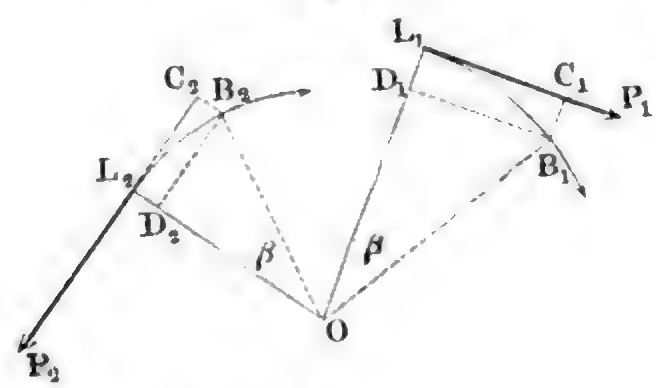
genau wie in §. 83.

Es ist also auch für kleine Drehungen die mechanische Arbeit ($P \sigma$) der Mittelkraft gleich der Summe aus den mechanischen Arbeiten der Seitenkräfte.

§. 100 Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gilt sogar bei beliebig großen Drehungen, wenn man statt der virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte die Projectionen $L_1 D_1$, $L_2 D_2$ u. s. w., Fig. 126 (a. f. S.), der in

den Lothpunkten $L_1$, $L_2$ u. s. w. anfangenden Wege einführt; denn multiplicirt man die bekannte Gleichung der statischen Momente

Fig. 126.




$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots$$

durch $sin. \beta$, und setzt in der neuen Gleichung:

$$Pa\, sin.\beta = P_1 a_1\, sin.\beta + P_2 a_2\, sin.\beta + \cdots,$$

statt $a_1\, sin.\beta$, $a_2\, sin.\beta \ldots$ die Wege

$$OB_1\, sin.\, L_1 O B_1 = D_1 B_1 = L_1 C_1 = s_1,$$
$$OB_2\, sin.\, L_2 O B_2 = D_2 B_2 = L_2 C_2 = s_2 \text{ u. s. w.},$$

so folgt die Gleichung: $Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots$

Ebenso behält dieses Princip bei endlichen Drehungen seine Richtigkeit, wenn sich die Kraftrichtungen mit dem Systeme gleichzeitig umdrehen, oder wenn sich der Angriffs- oder Lothpunkt $L$ unaufhörlich und so verändert, daß die Hebelarme $OL_1 = OB_1$ u. s. w. unveränderlich bleiben; denn aus

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2,$$

folgt durch Multiplication mit $\beta$:

$$Pa\beta = P_1 a_1 \beta + P_2 a_2 \beta + \cdots, \text{ d. i.}$$
$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots,$$

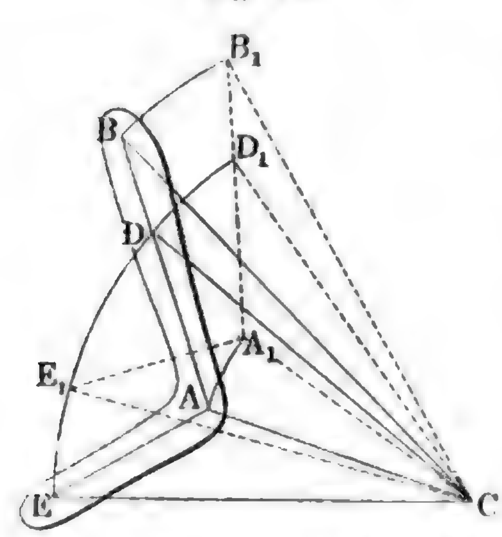
wenn $s_1$, $s_2$ u. s. w. die bogenförmigen Wege $L_1 B_1$, $L_2 B_2$ u. s. w. der Loth- oder Angriffspunkte $L_1$, $L_2$ u. s. w. bezeichnen.

## §. 101 Zurückführung einer kleinen Verrückung auf eine Drehung.

Jede in einer Ebene vor sich gehende kleine Bewegung oder Verrückung eines Körpers läßt sich als eine kleine Drehung um einen beweglichen Mittelpunkt ansehen, wie in Folgendem bewiesen werden soll. Seien zwei Punkte $A$ und $B$, Fig. 127, dieses Körpers (dieser Fläche oder Linie) bei einer kleinen Bewegung nach $A_1$ und $B_1$ fortgerückt, sei also auch $A_1 B_1 = AB$. Errichten wir in diesen Punkten Perpendikel auf die durchlaufenen kleinen Wege $AA_1$ und $BB_1$, so schneiden sich dieselben in einem Punkte $C$, aus dem man sich diese als Kreisbogen anzusehenden Wege $AA_1$ und $BB_1$ beschrieben denken kann. Nun sind aber wegen der Gleichheiten $AB = A_1 B_1$, $AC = A_1 C$ und $BC = B_1 C$ die Dreiecke $ABC$ und $A_1 B_1 C$ einander congruent; es

ist daher auch der Winkel $B_1 C A_1$ gleich dem Winkel $BCA$ und der Drehungswinkel $ACA_1$ gleich dem Drehungswinkel $BCB_1$. Macht man $A_1 D_1 = AD$, so bekommt man wegen der Gleichheit der Winkel $D_1 A_1 C_1$ und $DAC$ und wegen der Gleichheit der Seiten $CA_1$ und $CA$, in $CA_1 D_1$ und $CAD$ wieder zwei congruente Dreiecke, in welchen $CD_1 = CD$ und $\angle A_1 CD_1 = \angle ACD$ ist. Es ist folglich auch $\angle ACA_1 = \angle DCD_1$, und es geht daher bei der kleinen Verrückung der Linie $AB$, auch jeder beliebige Punkt $D$ in ihr in einem kleinen Kreisbogen $DD_1$ fort. Ist endlich $E$ ein außerhalb der Linie $AB$ liegender und mit ihr fest verbundener Punkt, so ist noch der kleine Weg $EE_1$ desselben als ein Kreisbogen aus $C$ anzusehen; denn macht man den Winkel $E_1 A_1 B_1 = EAB$ und die Entfernung $A_1 E_1 = AE$, so erhält man wieder zwei congruente Dreiecke $E_1 A_1 C$ und $EAC$ mit den gleichen Seiten $CE_1$ und $CE$ und den gleichen Winkeln $A_1 CE_1$ und $ACE$, und dasselbe läßt sich auch für jeden anderen mit $AB$ fest verbundenen Punkt beweisen. Man kann folglich jede kleine Bewegung einer mit $AB$ fest verbundenen Fläche oder eines festen Körpers als eine kleine Drehung um ein Centrum ansehen, das sich ergiebt, wenn man den Durchschnittspunkt $C$ bestimmt, in welchem sich die Perpendikel zu den Wegen $AA_1$ und $BB_1$ zweier Punkte des Körpers schneiden.

Fig. 127.




§. 102 **Allgemeinheit des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten.** Nach einem vorhergehenden Paragraphen (99) ist für eine kleine Drehung des Kräftesystems die mechanische Arbeit der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe aus den Arbeiten ihrer Componenten, nach dem letzten Paragraphen (101) läßt sich aber jede kleine Verrückung eines Körpers als eine kleine Drehung ansehen; es gilt daher das oben ausgesprochene Gesetz von dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten auch für jede beliebig kleine Bewegung eines festen Körpers oder Kräftesystems.

Ist also in einem Kräftesysteme Gleichgewicht vorhanden, d. h. die Mittelkraft selbst gleich Null, so muß auch nach einer kleinen, übrigens beliebigen Bewegung die Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null sein. Wenn umgekehrt, für eine kleine Bewegung des Körpers die Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null ist, so ist deshalb noch nicht Gleichgewicht nothwendig, es muß vielmehr bei allen möglichen kleinen Verrückungen diese Summe gleich Null ausfallen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. Da

die das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrückende Formel nur eine Bedingung des Gleichgewichts erfüllt, so fordert das Gleichgewicht, daß diesem Gesetze wenigstens bei ebensoviel von einander unabhängigen Bewegungen entsprochen wird, als solcher Bedingungen gemacht werden können, z. B. für ein Kräftesystem in der Ebene bei drei von einander unabhängigen Bewegungen.

---

## Zweites Capitel.

## Die Lehre vom Schwerpunkte.

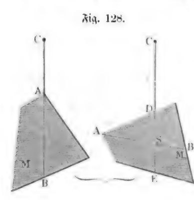
§. 103 **Schwerpunkt.** Die Gewichte von den Theilen eines schweren Körpers bilden ein System von Parallelkräften, dessen Mittelkraft das Gewicht des ganzen Körpers ist und dessen Mittelpunkt nach den drei Formeln des Paragraphen 96 bestimmt werden kann. Man nennt diesen Mittelpunkt der Schwerkräfte eines Körpers oder einer Körperverbindung den Schwerpunkt (franz. centre de gravité; engl. centre of gravity), auch wohl Mittelpunkt der Masse des Körpers oder der Verbindung von Körpern. Dreht man einen Körper um seinen Schwerpunkt, so hört dieser Punkt nicht auf, Mittelpunkt der Schwere zu sein, denn läßt man die drei Grundebenen, auf die man die Angriffspunkte der einzelnen Gewichte bezieht, mit dem Körper zugleich sich umdrehen, so ändert sich bei dieser Drehung nur die Lage der Kraftrichtungen gegen diese Ebenen, die Abstände der Angriffspunkte von diesen Ebenen hingegen bleiben unverändert. Der Schwerpunkt ist hiernach derjenige Punkt eines Körpers, in welchem das Gewicht desselben als vertical niederziehende Kraft wirkt, der also unterstützt oder festgehalten werden muß, um den Körper in jeder Lage in Ruhe zu erhalten.

§. 104 **Schwerlinie und Schwerebene.** Jede den Schwerpunkt enthaltende gerade Linie heißt Schwerlinie, und jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene Schwerebene. Der Schwerpunkt bestimmt sich durch den Durchschnitt zweier Schwerlinien, oder durch den Durchschnitt einer Schwerlinie mit einer Schwerebene, oder durch das Sichkreuzen dreier Schwerebenen.

Da sich der Angriffspunkt einer Kraft in der Kraftrichtung beliebig verlegen läßt, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern, so ist ein Körper in einer Lage im Gleichgewichte, wenn irgend ein Punkt in der durch den Schwerpunkt gehenden Verticallinie festgehalten wird.

Hängt man einen Körper $M$, Fig. 128, an einem Faden $CA$ auf, so erhält man hiernach in der Verlängerung $AB$ dieses Fadens eine Schwerlinie, und hängt man ihn noch auf eine zweite Weise auf, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie $DE$. Der Durchschnittspunkt $S$ beider Linien ist nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers.

Fig. 128.




Hängt man den Körper an einer Axe auf, oder bringt man ihn über einer scharfen Kante (Schneide eines Messers) ins Gleichgewicht, so erhält man in der Verticalebene durch die Axe oder scharfe Kante eine Schwerebene u. s. w.

Empirische Bestimmungen des Schwerpunktes, wie sie eben angedeutet wurden, sind selten anwendbar; meistens hat man aber von den im Folgenden gegebenen geometrischen Regeln Gebrauch zu machen, um den Schwerpunkt mit Sicherheit zu bestimmen.

Bei manchen Körpern, z. B. bei Ringen, fällt der Schwerpunkt außerhalb der Masse des Körpers. Soll ein solcher Körper in seinem Schwerpunkte festgehalten werden, so ist es nöthig, diesen durch einen zweiten Körper so mit dem ersten zu verbinden, daß die Schwerpunkte beider Körper zusammenfallen.

**Schwerpunktsbestimmung.** Sind $x_1$, $x_2$, $x_3$ u. s. w. die Abstände der Theile eines schweren Körpers von der einen Grundebene, $y_1$, $y_2$, $y_3$ ... dieselben von der anderen, und $z_1$, $z_2$, $z_3$ ... die von der dritten, sind endlich die Gewichte dieser Theile $P_1$, $P_2$ $P_3$ u. s. w., so hat man nach §. 96 die Abstände des Schwerpunktes dieses Körpers von diesen drei Ebenen: §. 105

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots},$$

$$y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots},$$

$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots}.$$

Bezeichnet man die Volumina der Körpertheile durch $V_1$, $V_2$, $V_3$ u. s. w., und ihre Dichtigkeiten durch $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ u. s. w., so läßt sich auch setzen:

$$x = \frac{V_1 \gamma_1 x_1 + V_2 \gamma_2 x_2 + \cdots}{V_1 \gamma_1 + V_2 \gamma_2 + \cdots} \text{ u. s. w.}$$

Ist endlich der Körper homogen, haben also alle Theile desselben einerlei Dichtigkeit $\gamma$, so ergiebt sich:

$$x = \frac{(V_1 x_1 + V_2 x_2 + \cdots) \gamma}{(V_1 + V_2 + \cdots) \gamma},$$

oder, indem man den gemeinschaftlichen Factor $\gamma$ oben und unten hebt:

$$1) \; x = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

$$2) \; y = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

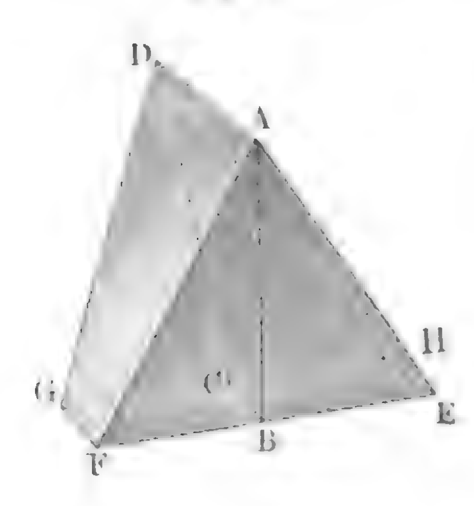
$$3) \; z = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}.$$

Man kann also statt der Gewichte die Volumina der einzelnen Theile eines Körpers einsetzen, und bringt dadurch die Bestimmung des Schwerpunktes in das Gebiet der reinen Geometrie.

Wenn Körper nach einer oder nach zwei Raumdimensionen wenig ausgedehnt sind, wie z. B. dünne Bleche, feine Drähte u. s. w., so kann man sie als Flächen oder Linien ansehen und nun mit Hülfe der letzteren drei Formeln ihre Schwerpunkte ebenfalls bestimmen, wenn man statt der Volumina $V_1, V_2$ u. s. w., Flächeninhalte $F_1, F_2$ u. s. w. oder Längen $l_1, l_2$ u. s. w. einführt.

**§. 106** Bei regelmäßigen Räumen fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen, z. B. bei dem Würfel, der Kugel, dem gleichseitigen Dreiecke, Kreise u. s. w. Symmetrische Räume haben ihren Schwerpunkt in der Ebene oder Axe der Symmetrie. Die Ebene der Symmetrie $ABCD$ theilt einen Körper $ADFH$, Fig. 129, in zwei nur durch rechts und links verschiedene Hälften, es finden daher auf beiden Seiten dieser Ebene gleiche Verhältnisse statt; es sind also auch die Momente auf der einen Seite so groß, wie auf der anderen, und es fällt folglich der Schwerpunkt in diese Ebene sebst.

Fig. 129.




Weil ebenso die Axe $EF$ der Symmetrie eine ebene Fläche $ABFCD$, Fig. 130, in zwei Theile zerschneidet, wovon der eine Spiegelbild des anderen ist, so sind auch hier die Verhältnisse

auf der einen Seite dieselben wie auf der anderen; es sind folglich auch die Momente auf beiden Seiten gleich, und es liegt der Schwerpunkt des Ganzen in dieser Linie selbst.

Endlich ist auch die Symmetrieaxe $KL$ eines Körpers $ABGH$, Fig. 131, Schwerlinie desselben, weil sie aus dem Durchschnitt von zwei

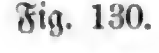


Fig. 130.

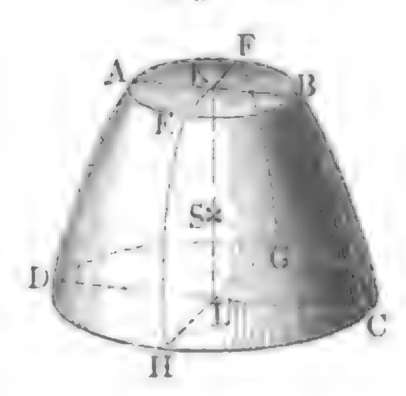


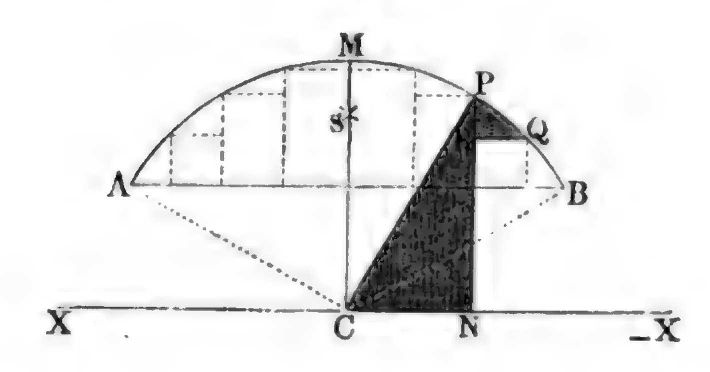

Fig. 131.

Symmetrieebenen $ABCD$ und $EFGH$ hervorgeht. Aus diesem Grunde fällt der Schwerpunkt eines Cylinders, eines Kegels und eines durch Umdrehung einer Fläche, oder durch Abdrehung auf der Drehbank entstandenen Rotationskörpers überhaupt, in die Axe dieser Körper.

**Schwerpunkte von Linien.** Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in der Mitte derselben. §. 107

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens $AMB = b$, Fig. 132, befindet sich in dem Halbmesser $CM$, welcher in der Mitte $M$ des Bogens ausläuft, denn dieser Halbmesser ist Axe der Symmetrie dieses Bogens. Um aber die Entfernung $CS = y$ des Schwerpunktes $S$ vom Mittelpunkte zu finden, theile man den Bogen in sehr viele Theile und bestimme die statischen Momente derselben in Beziehung auf eine durch den Mittelpunkt $C$ und mit der Sehne $AB = s$ parallel gehende Axe $X\overline{X}$. Ist $PQ$ ein Theil des Bogens und $PN$ dessen Abstand von $X\overline{X}$, so ist das statische Moment dieses Bogentheiles $= PQ \, . \, PN$.

Fig. 132.




Zieht man nun den Halbmesser $PC = MC = r$, und die Projection $QR$ von $PQ$ parallel zu $AB$, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke $PQR$ und $CPN$, für welche gilt:

$$PQ : QR = CP : PN,$$

und woraus sich das statische Moment eines Bogenelementes

$$PQ \, . \, PN = QR \, . \, CP = QR \, . \, r$$

bestimmt.

Nun ist aber für die statischen Momente aller übrigen Elemente der Halbmesser $r$ ein gemeinschaftlicher Factor und die Summe aller Projectionen $QR$ der Bogenelemente gleich der der Projection des ganzen Bogens entsprechenden Sehne; es folgt daher auch das Moment des ganzen Bogens $=$ Sehne $s$ mal Halbmesser $r$. Setzt man dieses Moment gleich Bogen $b$ mal Abstand $y$, also $by = sr$, so erhält man:

$$\frac{y}{r} = \frac{s}{b}, \text{ und } y = \frac{sr}{b}.$$

Es verhält sich also der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte zum Halbmesser, wie die Sehne zum Bogen.

Ist der Centriwinkel $ACB$ des Bogens $b$, $= \beta^0$, also der dem Halbmesser 1 entsprechende Bogen $\beta = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi$, so hat man $b = \beta r$ und $s = 2\, r\, sin. \frac{\beta}{2}$, weshalb auch folgt:

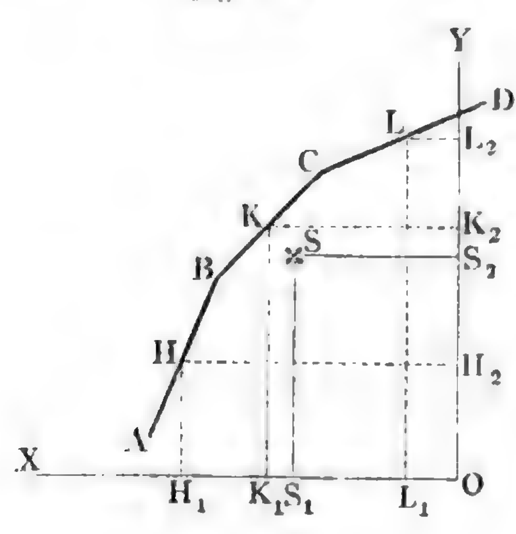
$$y = \frac{2\, sin.\, {}^1\!/_2\, \beta \, . \, r}{\beta}.$$

Für den Halbkreis ist $\beta = \pi$ und $sin. \frac{\beta}{2} = 1$, daher

$$y = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366 \ldots r, \text{ ungefähr } = \frac{7}{11} r.$$

§. 108 Um den Schwerpunkt eines Polygons oder einer Linienverbindung $ABCD$, Fig. 133, zu finden, suche man die Abstände der Mittelpunkte $H, K, M$ der Linien $AB = l_1$, $BC = l_2$, $CD = l_3$ u. s. w. von zwei Axen $OX$ und $OY$, nämlich $HH_1 = y_1$, $HH_2 = x_1$, $KK_1 = y_2$, $KK_2 = x_2$ u. s. w.; die Abstände des gesuchten Schwerpunktes von eben diesen Axen sind dann:

Fig. 133.




$$OS_1 = SS_2 = x = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots}{l_1 + l_2 + \cdots},$$

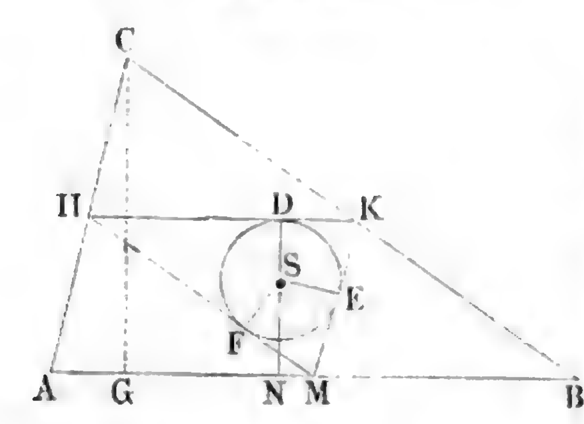
$$OS_2 = SS_1 = y = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots}{l_1 + l_2 + \cdots}.$$

z. B. der Abstand des Schwerpunktes $S$ eines im Triangel gebogenen Drahtes $ABC$, Fig. 134, von der Grundlinie $AB$ ist:

$$NS = y = \frac{\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh}{a+b+c} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2},$$

wenn die den Winkeln $A$, $B$, $C$ gegenüberstehenden Seiten durch $a$, $b$, $c$ und die Höhe $CG$ durch $h$ bezeichnet werden.

Fig. 134.



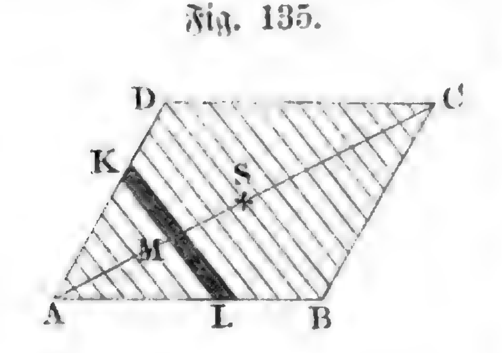

Verbindet man die Mittelpunkte $H$, $K$, $M$ der Dreiecksseiten unter einander, und construirt man in das so erhaltene Dreieck einen Kreis, so fällt dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte $S$ zusammen, denn der Abstand dieses Punktes von der einen Seite $HK$ ist:

$$SD = ND - NS = \frac{h}{2} - \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2} = \frac{ch}{2(a+b+c)}$$

$= \frac{\triangle ABC}{a+b+c}$, also constant und daher $=$ den Abständen $SE$ und $SF$ von den anderen Seiten.

**Schwerpunkte ebener Figuren.** Der Schwerpunkt eines Parallelogrammes $ABCD$, Fig. 135, liegt im Durchschnittspunkte $S$ seiner Diagonalen, denn alle Streifen, wie $KL$, welche durch Legung von zu einer Diagonale $BD$ parallelen Linien sich ergeben, werden durch die andere Diagonale $AC$ halbirt, es ist also jede von den Diagonalen eine Schwerlinie. §. 109

Fig. 135.

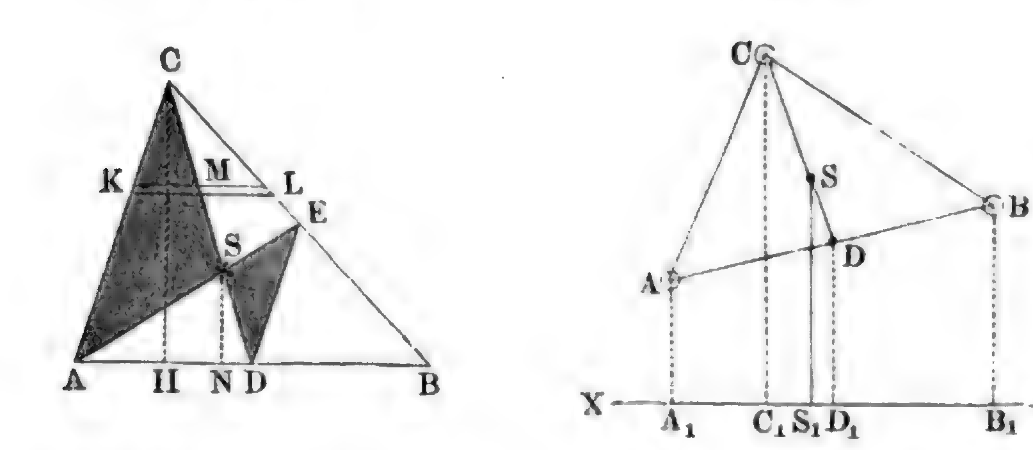



Bei einem Dreiecke $ABC$, Fig. 136 (a. f. S.), ist jede Linie $CD$ von einer Spitze nach der Mitte $D$ der Gegenseite $AB$ eine Schwerlinie, denn es halbirt dieselbe alle Elemente $KL$ des Dreieckes, welche sich ergeben, wenn man dasselbe durch Parallellinien zu $AB$ zerschneidet. Zieht man von einem zweiten Ecke $A$ nach der Mitte $E$ der Gegenseite $BC$ eine zweite Schwerlinie, so giebt der Durchschnitt $S$ beider Schwerlinien den Schwerpunkt des ganzen Dreieckes.

Weil $BD = \frac{1}{2} BA$ und $BE = \frac{1}{2} BC$, so ist $DE$ parallel zu $AC$ und gleich $\frac{1}{2} AC$, auch $\triangle DES$ ähnlich dem Dreiecke $CAS$ und endlich $CS = 2SD$. Addirt man hierzu noch $SD$, so folgt $CS + SD$,

d. i. $CD = 3\,DS$, und demnach umgekehrt, $DS = \frac{1}{3}\,SD$. Es steht also der Schwerpunkt $S$ um ein Drittel der Linie $CD$ von dem Mittelpunkte $D$ der Grundlinie und um zwei Drittel derselben von der Spitze $C$ ab. Zieht man $CH$ und $SN$ winkelrecht zur Basis, so hat man auch $SN$

Fig. 136. Fig. 137.




$= \frac{1}{3}\,CH$; es steht also der Schwerpunkt $S$ auch um ein Drittel der Höhe von der Basis des Dreieckes ab.

Der Abstand des Schwerpunktes eines Dreieckes $ABC$, Fig. 137, von einer Axe $\overline{XX}$ ist $SS_1 = DD_1 + \frac{1}{3}(CC_1 - DD_1)$, aber $DD_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$, folglich ist:

$$y = SS_1 = \frac{1}{3}\,CC_1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3},$$

d. i. das arithmetische Mittel aus den Abständen der drei Eckpunkte von $\overline{XX}$.

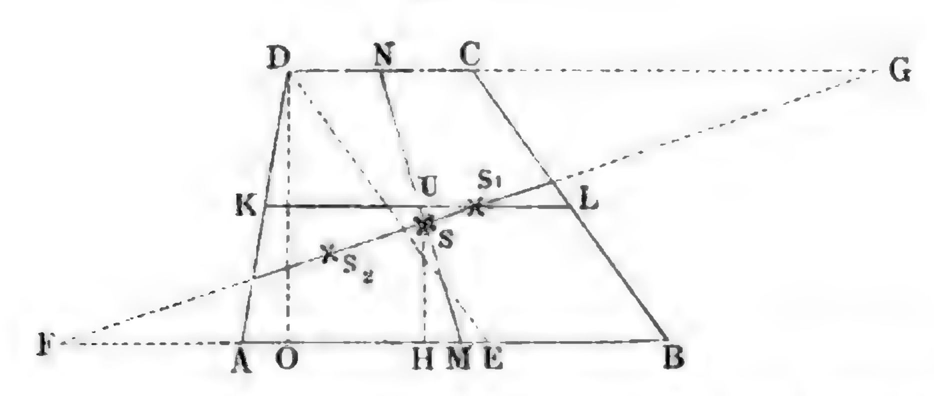
Da der Abstand des Schwerpunktes von drei gleichen, in den Eckpunkten eines Dreieckes angebrachten Gewichten auf dieselbe Weise bestimmt wird, so fällt der Schwerpunkt eines ebenen Dreieckes mit dem Schwerpunkte von diesen drei gleichen Gewichten zusammen.

**§. 110** Die Bestimmung des Schwerpunktes $S$ eines Trapezes $ABCD$, Fig. 138, läßt sich auf folgende Weise bewerkstelligen. Die gerade Linie $MN$, welche die Mittelpunkte der beiden Grundlinien $AB$ und $CD$ mit einander verbindet, ist Schwerlinie des Trapezes, denn viele gerade Linien, parallel zu den Grundlinien gezogen, zerlegen das Trapez in schmale Streifen, deren Mittel- oder Schwerpunkte in $MN$ fallen. Um nun den Schwerpunkt $S$ vollständig zu bestimmen, hat man nur noch dessen Abstand $SH$ von der einen Basis $AB$ zu finden.

Es bezeichne $b_1$ die eine und $b_2$ die andere der parallelen Seiten $AB$ und $CD$ des Trapezes, sowie $h$ die Höhe oder den Normalabstand dieser Seiten. Zieht man nun $DE$ parallel zur Seite $BC$, so erhält man ein Parallelogramm $BCDE$ mit dem Inhalte $b_2 h$ und dem Schwerpunkte $S_1$,

dessen Abstand von $AB$, $= \frac{h}{2}$, und ein Dreieck $ADE$ mit dem Inhalte $\frac{(b_1 - b_2)h}{2}$ und dem Schwerpunkte $S_2$, dessen Abstand von $AB = \frac{h}{3}$ ist.

Fig. 138.




Das statische Moment des Trapezes hinsichtlich $AB$ ist deshalb

$$Fy = b_2 h \cdot \frac{h}{2} + \frac{(b_1 - b_2)h}{2} \cdot \frac{h}{3} = (b_1 + 2b_2)\frac{h^2}{6},$$

aber der Inhalt des Trapezes ist $F = (b_1 + b_2)\frac{h}{2}$; es folgt daher der Normalabstand des Schwerpunktes $S$ von der Basis:

$$HS = y = \frac{\frac{1}{6}(b_1 + 2b_2)h^2}{\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h} = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}.$$

Der Abstand dieses Punktes von der Mittellinie $KL = \frac{b_1 + b_2}{2}$ des Trapezes ist:

$$US = \frac{h}{2} - HS = \left(\frac{3(b_1 + b_2) - 2(b_1 + 2b_2)}{b_1 + b_2}\right)\frac{h}{6}, \text{ d. i.}$$

$$y_1 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{6}.$$

Um den Schwerpunkt construirend zu finden, verlängere man die beiden Grundlinien, mache die Verlängerung $CG = b_1$ und die Verlängerung $AF = b_2$, und verbinde die dadurch erhaltenen Endpunkte $F$ und $G$ durch eine Gerade; der Durchschnittspunkt $S$ mit der Mittellinie $MN$ ist der gesuchte Schwerpunkt, denn aus $HS = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}$ folgt auch:

$$MS = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{MN}{3} \text{ und } NS = \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{MN}{3}; \text{ also:}$$

$$\frac{MS}{NS} = \frac{b_1 + 2b_2}{2b_1 + b_2} = \frac{\frac{1}{2}b_1 + b_2}{b_1 + \frac{1}{2}b_2} = \frac{MA + AF}{CG + NC} = \frac{MF}{NG},$$

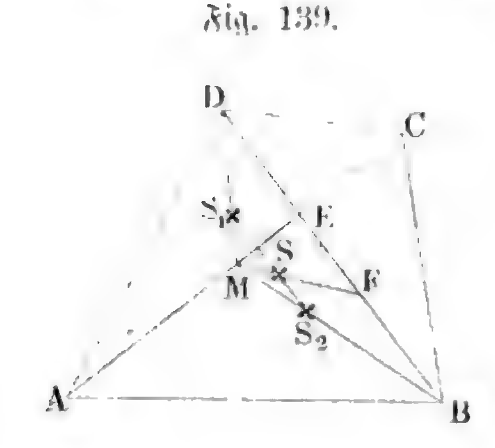
wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $MSF$ und $NSG$ wirklich hervorgeht.

Der Abstand des Schwerpunktes vom Eckpunkt $A$ ist, wenn $a$ die Projection $AO$ der Seite $AD$ auf $AB$ bezeichnet, durch die Formel

$$AH = x = \frac{b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2 + a(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)} \text{ bestimmt.}$$

§. 111 Um den **Schwerpunkt irgend eines anderen Viereckes** $ABCD$, Fig. 139, zu ermitteln, kann man dasselbe durch eine Diagonale $AC$ in zwei Dreiecke zerlegen, nach dem Vorhergehenden die Schwerpunkte $S_1$ und $S_2$ derselben angeben und dadurch eine Schwerlinie $S_1 S_2$ bestimmen. Zerlegt man nun noch das Viereck durch die Diagonale $BD$ in zwei andere Dreiecke, und bestimmt deren Schwerpunkte, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie, deren Durchschnitt mit der ersteren den Schwerpunkt des ganzen Viereckes giebt.

Fig. 139.




Einfacher geht man aber zu Werke, wenn man die Diagonale $AC$ in $M$ halbirt, das größere Stück $BE$ der zweiten Diagonale über das kleinere trägt, so daß $DF = BE$ wird; denn zieht man nun $FM$ und theilt diese Linie in drei gleiche Theile, so liegt im ersten Theilpunkte $S$ von $M$ aus, der Schwerpunkt $S$, wie sich auf folgende Weise beweisen läßt. Es ist $MS_1 = \frac{1}{3} MD$ und $MS_2 = \frac{1}{3} MB$, folglich $S_1 S_2$ parallel zu $BD$, aber $SS_1$ mal $\triangle ACD = SS_2$ mal $\triangle ACB$, oder $SS_1 \,.\, DE = SS_2 \,.\, BE$, daher $SS_1 : SS_2 = BE : DE$. Nun ist noch $BE = DF$ und $DE = BF$, folglich auch $SS_1 : SS_2 = DF : BF$. Die Gerade $MF$ schneidet demnach die Schwerlinie $S_1 S_2$ in dem Schwerpunkte $S$ des ganzen Viereckes.

§. 112 Kommt es darauf an, den **Schwerpunkt** $S$ **eines Polygons** $ABCDE$, Fig. 140, zu finden, so zerlege man dieses Polygon in Dreiecke und bestimme die statischen Momente derselben in Hinsicht auf zwei rechtwinkelige Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$.

Sind die Coordinaten $OA_1 = x_1$, $OA_2 = y_1$, $OB_1 = x_2$, $OB_2 = y_2$ u. s. w. der Eckpunkte gegeben, so lassen sich die statischen Momente der einzelnen Dreiecke $ABO$, $BCO$, $CDO$ u. s. w. einfach auf folgende Weise ermitteln. Der Inhalt des Dreieckes $ABO$ ist, nach der unten stehenden Anmerkung, $= D_1 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$, der Inhalt des folgenden Drei-

eckes $BCO_{,} = D_2 = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$ u. s. w., die Abstände des Schwerpunktes des Dreieckes $ABO$ von $Y\overline{Y}$, nach §. 109:

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3} = \frac{x_1 + x_2}{3},$$

von $X\overline{X} = v_1 = \frac{y_1 + y_2}{3}$, die des Schwerpunktes des Dreieckes $BCO$:

$$u_2 = \frac{x_2 + x_3}{2} \text{ und } v_2 = \frac{y_2 + y_3}{3} \text{ u. s. w.}$$

Multiplicirt man diese Abstände mit den Inhalten der Dreiecke, so erhält man die Momente der letzteren, und setzt man die so erhaltenen Werthe in die Formeln:

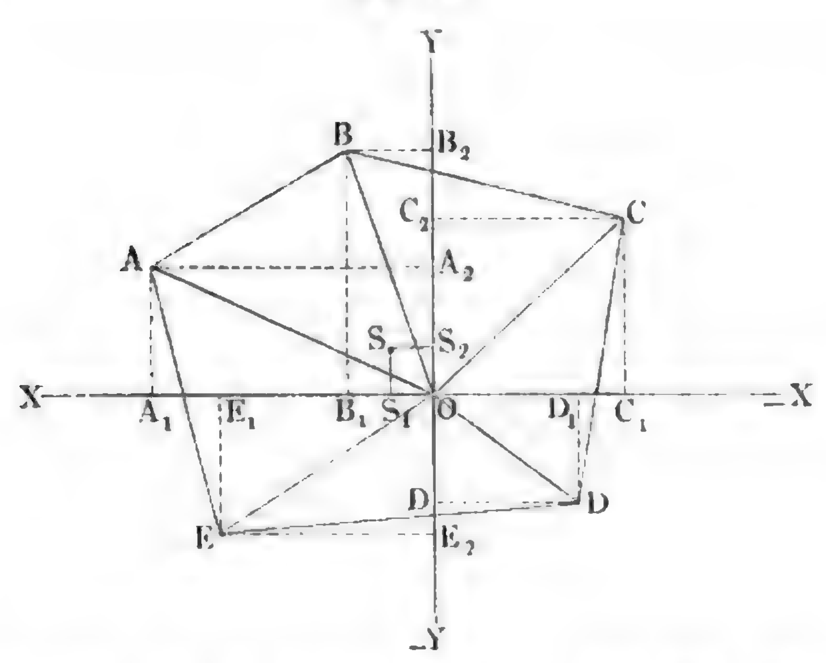
$$u = \frac{D_1 u_1 + D_2 u_2 + \cdots}{D_1 + D_2 + \cdots} \text{ und } v = \frac{D_1 v_1 + D_2 v_2 + \cdots}{D_1 + D_2 + \cdots},$$

so erhält man die Abstände $u = OS_1$ und $v = OS_2$ des gesuchten Schwerpunktes $S$ von den Axen $Y\overline{Y}$ und $X\overline{X}$.

Wenn man ein $n$ seitiges Polygon auf zweierlei Weise durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein $(n-1)$seitiges Polygon zerlegt, und jedes Mal den Schwerpunkt des ersteren mit dem des letzteren verbindet, so erhält man auf diese Weise zwei Schwerlinien des Polygons, welche sich in dem Schwerpunkt desselben schneiden. Durch wiederholte Anwendung dieser Bestimmung kann man den Schwerpunkt eines jeden Polygons auf dem Wege der Construction finden.

Beispiel. Ein Fünfeck $ABCDE$, Fig. 140, ist durch die folgenden Coordinaten seiner Eckpunkte $A$, $B$, $C$ u. s. w. gegeben, und man sucht die Coordinaten seines Schwerpunktes:

Fig. 140.



| Gegebene Coordinaten. | | Die zweifachen Inhalte der Dreiecke. | Die dreifachen Coordinaten der Schwerpunkte. | | Die sechsfachen statischen Momente. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | | $3u_n$ | $3v_n$ | $6D_n u_n$ | $6D_n v_n$ |
| 24 | 11 | 24.21 — 7.11 = 427 | 31 | 32 | 13237 | 13664 |
| 7 | 21 | 7.15 + 21.16 = 441 | — 9 | 36 | — 3969 | 15876 |
| — 16 | 15 | 16.9 + 12.15 = 324 | — 28 | 6 | — 9072 | 1944 |
| — 12 | — 9 | 12.12 + 18.9 = 306 | + 6 | — 21 | 1836 | — 6426 |
| 18 | — 12 | 18.11 + 24.12 = 486 | + 42 | — 1 | 20412 | — 486 |
| | | Summe 1984 | — | — | 22444 | 24572 |

Der Abstand des Schwerpunktes von der Axe $Y\overline{Y}$ ist nun:

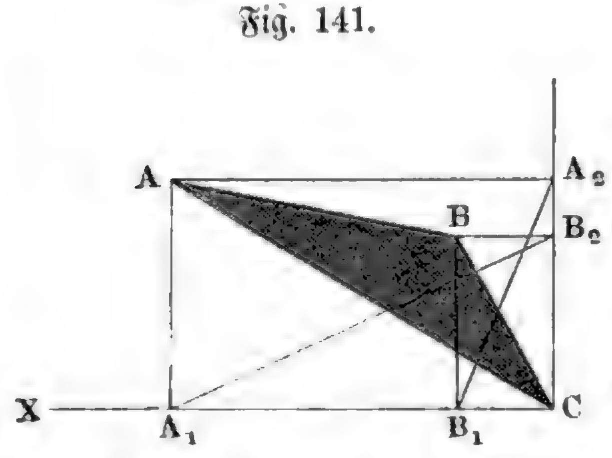
$$SS_2 = u = \frac{1}{3} \cdot \frac{22444}{1984} = 3,771$$

und von der Axe $X\overline{X}$:

$$SS_1 = v = \frac{1}{3} \cdot \frac{24572}{1984} = 4,128.$$

Anmerkung. Sind $CA = x_1$, $CB_1 = x_2$, $CA_2 = y_1$ und $CB_2 = y_2$ die Coordinaten von zwei Eckpunkten eines Dreieckes $ABC$, Fig. 141, deren dritter Eckpunkt $C$ mit dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes zusammenfällt, so hat man den Inhalt desselben:

Fig. 141.




$D =$ Trapez $ABB_1A_1 +$ Dreieck $CBB_1 -$ Dreieck $CAA_1$

$$= \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(x_1 - x_2) + \frac{x_2 y_2}{2} - \frac{x_1 y_1}{2}$$

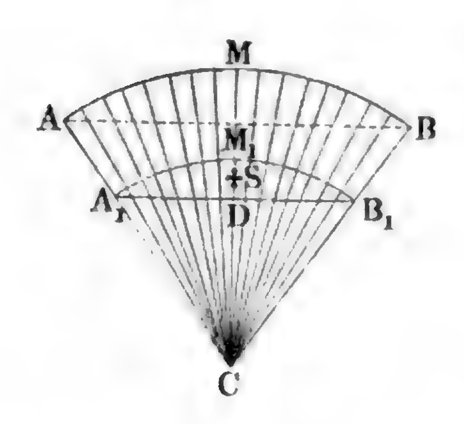
$$= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Es ist also der Inhalt dieses Dreieckes die Differenz von zwei anderen Dreiecken $CB_2A_1$ und $CA_2B_1$, und es ist die eine Coordinate eines Punktes Grundlinie des einen und die andere Coordinate Höhe des anderen Dreieckes, ebenso die eine Coordinate des anderen Punktes Höhe des einen und die andere Coordinate Grundlinie des anderen Dreieckes.

§. 113 Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes $ACB$, Fig. 142, fällt mit dem Schwerpunkte $S$ eines Kreisbogens $A_1B_1$ zusammen, der mit dem Ausschnitte einerlei Centriwinkel hat und dessen Halbmesser $CA_1$ zwei Drittel von dem Halbmesser $CA$ des Ausschnittes ist, denn es läßt sich der Ausschnitt durch unendlich viele Halbmesser in lauter schmale

Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte um zwei Drittel des Halbmessers von dem Centro $C$ abstehen und deshalb in ihrer stetigen Folge den Bogen $A_1\,M_1\,B_1$ bilden. Es liegt also der Schwerpunkt $S$ des Ausschnittes in dem dieses Flächenstück halbirenden Halbmesser $CM$ und in der Entfernung

Fig. 142.




$$CS = y = \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3}\,\overline{CA}$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{sin.\,{}^1/_2\,\beta}{\beta} \cdot r,$$

insofern $r$ den Halbmesser $CA$ des Sectors und $\beta$ den den Centriwinkel $ACB$ desselben messenden Bogen bezeichnet.

Für die halbe Kreisfläche ist $\beta = \pi$, $sin.\,{}^1/_2\,\beta = sin.\,90^0 = 1$, daher:

$$y = \frac{4}{3\,\pi}\,r = 0{,}4244\,r \text{ oder ungefähr } \frac{14}{33}\,r.$$

Für einen Quadranten folgt:

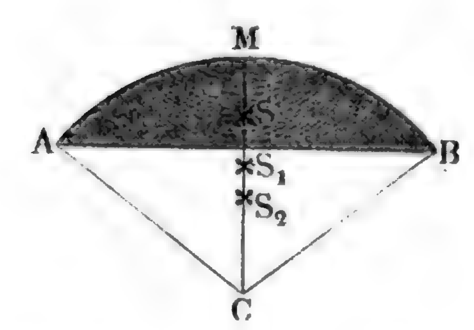
$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{{}^1/_2}}{{}^1/_2\,\pi}\,r = \frac{4\sqrt{2}}{3\,\pi}\,r = 0{,}6002\,r$$

und für einen Sextanten:

$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{{}^1/_2}{{}^1/_3\,\pi}\,r = \frac{2}{\pi}\,r = 0{,}6366\,r.$$

§. 114 Der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes $ABM$, Fig. 143, ergiebt sich, wenn man das Moment des Abschnittes $ABM$ gleich setzt der Differenz der Momente des Ausschnittes $ACBM$ und des Dreieckes $ACB$. Ist $r$ der Halbmesser $CA$, $s$ die Sehne $AB$ und $A$ der Flächeninhalt des Segmentes $ABM$, so hat man das Moment des Ausschnittes:

Fig. 143.




$$= \text{Ausschnitt mal } \overline{CS_1} = \frac{r\,.\,\text{Bogen}}{2} \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3}\,r = \frac{1}{3}\,s\,r^2,$$

ferner das Moment des Dreieckes:

$$= \text{Dreieck mal } \overline{CS_2} = \frac{s}{2}\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s\,r^2}{3} - \frac{s^3}{12},$$

und demnach das Moment des Abschnittes $A$:

$$A \,.\, \overline{CS} = Ay = \frac{1}{3} s r^2 - \left(\frac{s r^2}{3} - \frac{s^3}{12}\right) = \frac{s^3}{12}.$$

Es ist folglich der gesuchte Abstand: $y = \frac{s^3}{12\,A}$.

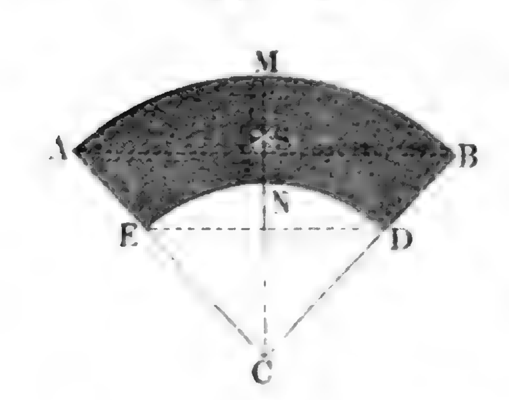
Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, daher:

$$y = \frac{8 r^3}{12 \,.\, \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4 r}{3 \pi}.$$

wie oben gefunden wurde.

Auf gleiche Weise bestimmt sich auch der Schwerpunkt $S$ eines Ringstückes $ABDE$, Fig. 144, denn dieses ist die Differenz zweier Sectoren $ACB$ und $DCE$. Sind die Halbmesser $CA = r_1$ und $CE = r_2$ und die Sehnen $AB = s_1$ und $DE = s_2$, so erhält man die statischen Momente der Sectoren $\frac{s_1 r_1^2}{3}$ und $\frac{s_2 r_2^2}{3}$, daher das statische Moment des Ringstückes:

Fig. 144.




$$M = \frac{s_1 r_1^2 - s_2 r_2^2}{3}, \text{ oder, da } \frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1} \text{ ist,}$$

$$F = \frac{r_1^3 - r_2^3}{3} \cdot \frac{s_1}{r_1}.$$

Der Inhalt des Ringstückes ist $F = \frac{\beta r_1}{2} - \frac{\beta r_2^2}{2} = \beta\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2}\right)$, wofern $\beta$ den dem Centriwinkel $ACB$ entsprechenden Bogen bezeichnet; es folgt demnach der Schwerpunkt $S$ des Ringstückes durch den Abstand

$$CS = y = \frac{M}{F} = \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{s_1}{r_1 \beta} = \frac{2}{3}\left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right) \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}}$$

$$= \frac{4}{3} \frac{sin.\, {}^1\!/_2\, \beta}{\beta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Beispiel. Sind die Halbmesser der Stirnfläche eines Gewölbes $r_1 = 5$ Fuß und $r_2 = 3^1\!/_2$ Fuß, und ist der Centriwinkel dieser Fläche $\beta^0 = 130^0$, so folgt der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Mittelpunkte:

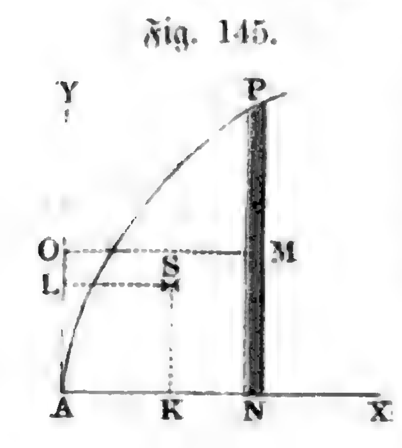
$$y = \frac{4}{3} \frac{sin.\, 65^0}{arc.\, 130^0} \cdot \frac{5^3 - 3{,}5^3}{5^2 - 3{,}5^2} = \frac{4 \,.\, 0{,}9063}{3 \,.\, 2{,}2689} \cdot \frac{125 - 42{,}875}{25 - 12{,}25} = \frac{3{,}6252 \,.\, 82{,}125}{6{,}8067 \,.\, 12{,}75}$$
$$= 3{,}430 \text{ Fuß}.$$

§. (115) **Schwerpunktsbestimmung durch den höheren Calcul.** Die Bestimmung des Schwerpunktes ebener Flächen läßt sich mit Hülfe des

höheren Calculs wie folgt bewirken. Es sei $ANP$, Fig. 145, die gegebene Fläche, $AN = x$ ihre Absciffe und $NP = y$ ihre Ordinate. Der Inhalt eines Elementes $NMP$ derselben ist

$\partial F = y \partial x$ (vergl. analyt. Hülfslehren, Art. 29),

Fig. 145.




folglich das Moment desselben in Hinsicht auf die Ordinatenaxe $OY$:

$\overline{OM}.\partial F = \overline{AN}.\partial F = xy\partial x$;

setzt man daher den Abstand $LS = AK$ des Schwerpunktes $S$ der ganzen Fläche $F$ von der Axe $AY$, $= u$, so hat man:

$$Fu = \int xy\partial x.$$

und folglich:

$$1)\ u = \frac{\int xy\partial x}{F} = \frac{\int xy\partial x}{\int y\partial x}.$$

Da der Mittel- oder Schwerpunkt $M$ des Elementes $NMP$ von der Abscissenaxe $AX$ um $NM = \frac{1}{2}y$ absteht, so ist das Moment von $\partial F$ in Hinsicht auf diese Axe $AX$:

$$\overline{NM}\,.\,\partial F = \tfrac{1}{2}y\partial F = \tfrac{1}{2}y^2\partial x;$$

setzt man daher den Abstand $KS = AL$ des Schwerpunktes $S$ der ganzen Fläche $F$ von der Axe $AX$, $= v$, so ist

$Fv = \int \frac{1}{2}y^2\partial x$, und daher

$$2)\ v = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\partial x}{F} = \tfrac{1}{2}\frac{\int y^2\partial x}{\int y\partial x}.$$

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ oder $y = \sqrt{p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}$ ist, hat man:

$$u = \frac{\int \sqrt{p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}x\partial x}{\int \sqrt{p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\partial x} = \frac{\sqrt{p}\int x^{\frac{3}{2}}\partial x}{\sqrt{p}\int x^{\frac{1}{2}}\partial x} = \frac{\int x^{\frac{3}{2}}\partial x}{\int x^{\frac{1}{2}}\partial x}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{3}{5}x,$$

also:

$$LS = AK = \tfrac{3}{5}AN, \text{ und dagegen}$$

$$v = \tfrac{1}{2}\frac{\int px\partial x}{\sqrt{p}\int x^{\frac{1}{2}}\partial x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\frac{\int x\partial x}{\int x^{\frac{1}{2}}\partial x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$$

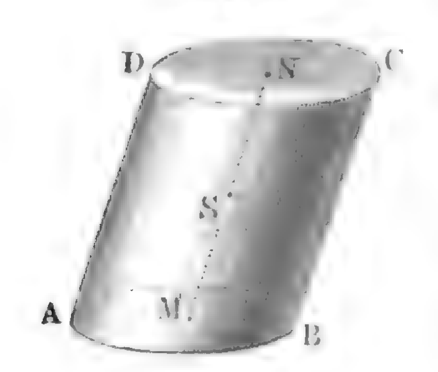
$$= \tfrac{3}{8}\sqrt{px} = \tfrac{3}{8}y,$$

also:

$$KS = AL = \tfrac{3}{8}NP.$$

§. 116 **Schwerpunkte krummer Flächen.** Der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche (dem Mantel) eines Cylinders $ABCD$, Fig. 146, liegt in der Mitte $S$ der Axe $MN$ dieses Körpers; denn alle ringförmigen Elemente des Cylindermantels, welche man erhält, wenn man parallel zur Basis Schnitte durch den Körper führt, sind unter sich gleich und haben ihre Schwer- und Mittelpunkte in dieser Axe; es bilden also diese Schwerpunkte eine gleichförmig schwere Linie. Aus denselben Gründen liegt auch der Schwerpunkt von der Umfläche eines Prismas im Mittelpunkte der die Schwerpunkte der Umfänge beider Grundflächen verbindenden Geraden.

Fig. 146.




Der Schwerpunkt $S$ des Mantels von einem geraden Kegel $ABC$, Fig. 147, liegt in der Axe des Kegels und ist um ein Drittel dieser Linie von der Basis oder um zwei Drittel von der Spitze $C$ entfernt; denn diese krumme Fläche läßt sich durch gerade Linien, welche man Seiten des Kegels nennt, in unendlich viele, unendlich schmale Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte einen Kreis $HK$ bilden, welcher um zwei Drittel der Axe von der Spitze $C$ absteht, und dessen Schwer- oder Mittelpunkt $S$ in die Axe $CM$ fällt.

Fig. 147.

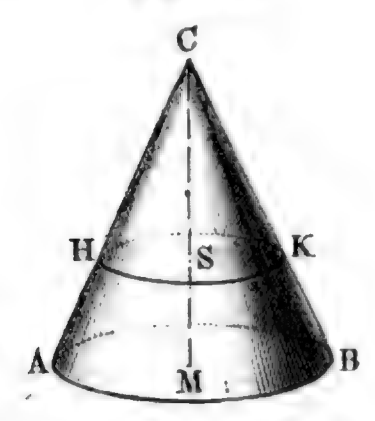
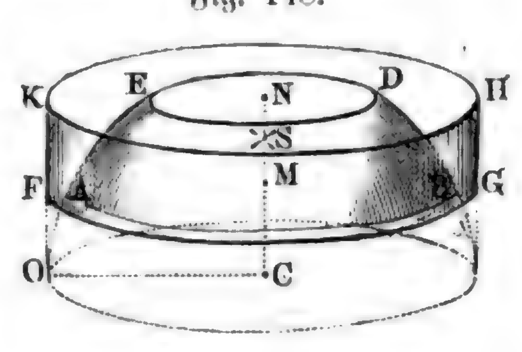



Fig. 148.

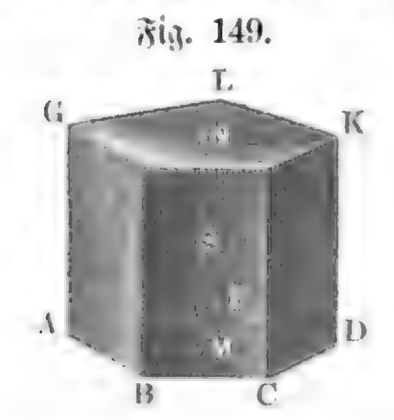



Der Schwerpunkt einer Kugelzone $ABDE$, Fig. 148, und ebenso der Schwerpunkt einer Kugelschale (Calotte) liegt im Mittelpunkte $S$ ihrer Höhe $MN$; denn es hat, den Lehren der Geometrie zufolge, die Zone mit einem Cylindermantel $FGHK$ gleichen Inhalt, dessen Höhe gleich ist der Höhe $MN$ und dessen Halbmesser gleich ist dem Kugelhalbmesser $CO$ der Zone, und es findet diese Gleichheit auch unter den ringförmigen Elementen statt, die man erhält, wenn man durch diese beiden krummen Flächen unendlich viele Ebenen parallel zu den Grundkreisen derselben legt; es fällt diesemnach der Schwerpunkt $S$ der Zone mit dem des Cylindermantels zusammen.

Anmerkung. Der Schwerpunkt von dem Mantel eines schiefen Kegels oder einer schiefen Pyramide steht zwar um ein Drittel der Höhe von der Basis ab, befindet sich aber nicht in der von der Spitze nach dem Schwerpunkte des Umfanges der Basis gehenden Geraden, weil Schnitte parallel zur Basis den Mantel in Ringe zerlegen, die an verschiedenen Stellen ihres Umfanges verschieden breit sind.

**Schwerpunkte von Körpern.** Der Schwerpunkt eines Prismas $AK$, Fig. 149, ist der Mittelpunkt $S$ derjenigen geraden Linie, welche die Schwerpunkte $M$ und $N$ der beiden Grundflächen $AD$ und $GK$ verbindet; denn das Prisma läßt sich durch Schnitte parallel zur Basis in lauter congruente Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte in $MN$ fallen, und in ihrer stetigen Folge die gleichförmig schwere gerade Linie $MN$ selbst bilden. §. 117

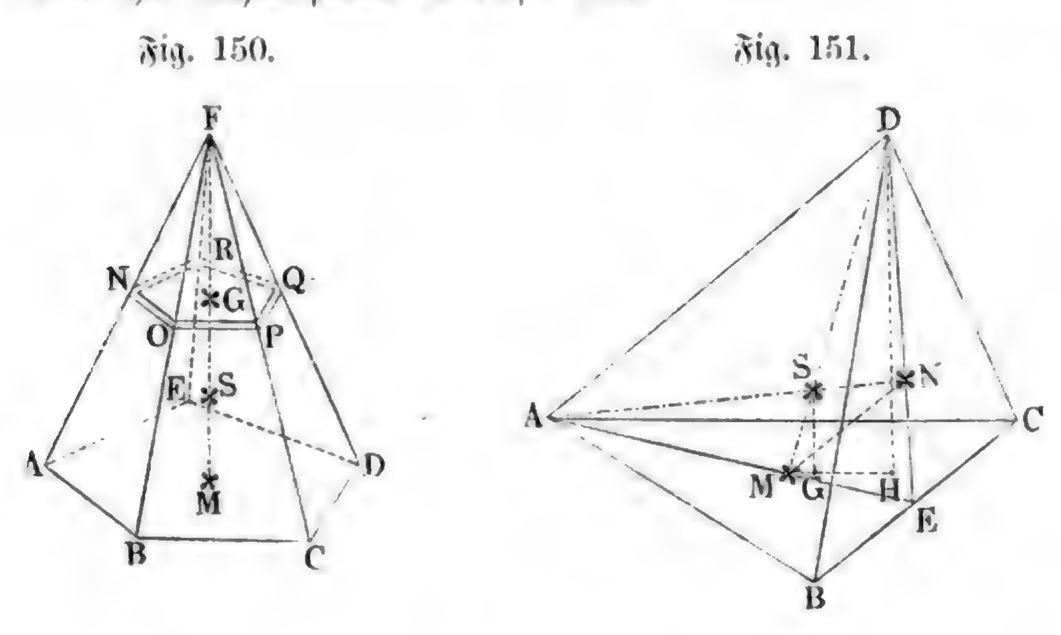
Fig. 149.




Aus demselben Grunde befindet sich auch der Schwerpunkt eines Cylinders in der Mitte der Axe desselben.

Der Schwerpunkt einer Pyramide $ADF$, Fig. 150, liegt in der geraden Linie $MF$ von der Spitze $F$ nach dem Schwerpunkte $M$ der Basis; denn alle Schnitte, wie $NOPQR$, haben wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Basis $ABCDE$ ihre Schwerpunkte in dieser Linie.

Fig. 150. Fig. 151.

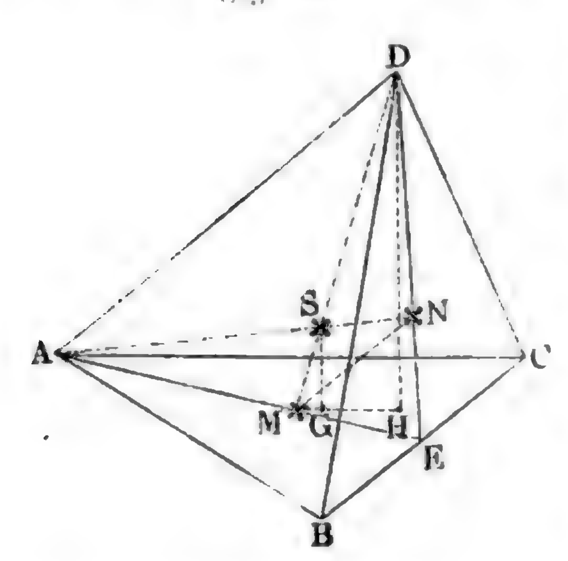



Ist die Pyramide dreiseitig, wie $ABCD$, Fig. 151, so läßt sich jeder der vier Eckpunkte als Spitze und die gegenüberliegende Fläche als Basis ansehen; es bestimmt sich daher der Schwerpunkt $S$ in dem Durchschnitte von zwei aus den Ecken $D$ und $A$ nach den Schwerpunkten $M$ und $N$ der gegenüberliegenden Flächen $ABC$ und $BCD$ gehenden geraden Linien.

Giebt man noch die geraden Linien $EA$ und $ED$ an, so hat man (nach

§. 109) $EM = \frac{1}{3} EA$ und $EN = \frac{1}{3} ED$; es ist daher $MN$ parallel zu $AD$ und $= \frac{1}{3} AD$, sowie auch das Dreieck $MNS$ ähnlich dem Dreiecke $DAS$. Dieser Aehnlichkeit zufolge hat man wieder $MS = \frac{1}{3} DS$, oder $DS = 3 MS$, also $MD = MS + SD = 4 MS$, und umgekehrt, $MS = \frac{1}{4} MD$. Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide liegt also um ein Viertel derjenigen Linie von der Basis ab, welche die Spitze $D$ der Pyramide mit dem Schwerpunkte $M$ ihrer Basis verbindet.

Fig. 152.




Giebt man noch die Höhenlinien $DH$ und $SG$ an und zieht man die Linie $HM$, so erhält man die ähnlichen Dreiecke $DHM$ und $SGM$, in welchen nach dem Vorigen, $SG = \frac{1}{4} DH$ ist. Man kann also behaupten: der Abstand des Schwerpunktes $S$ einer dreiseitigen Pyramide ist von der Basis gleich ein Viertel, und der von der Spitze gleich drei Viertel der Höhe von der ganzen Pyramide entfernt.

Da endlich jede Pyramide, und ebenso jeder Kegel, aus lauter gleich hohen dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt ist, so steht auch der Schwerpunkt aller Pyramiden und Kegel um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche, sowie um drei Viertel derselben von der Spitze ab.

Man findet also den Schwerpunkt einer Pyramide oder den eines Kegels, wenn man in dem Abstande, ein Viertel der Höhe von der Basis, eine Ebene parallel zu dieser legt und den Schwerpunkt des erhaltenen Querschnittes oder den Durchschnitt desselben mit der die Spitze und den Schwerpunkt der Basis verbindenden Geraden aufsucht.

§. 118 Kennt man die Abstände $AA_1$, $BB_1$ u. s. w. der vier Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$, Fig. 153, von einer Ebene $HK$, so erhält man den Abstand $SS_1$ des Schwerpunktes $S$ von dieser Ebene durch den Mittelwerth:

$$SS_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4},$$

wie sich folgendergestalt beweisen läßt.

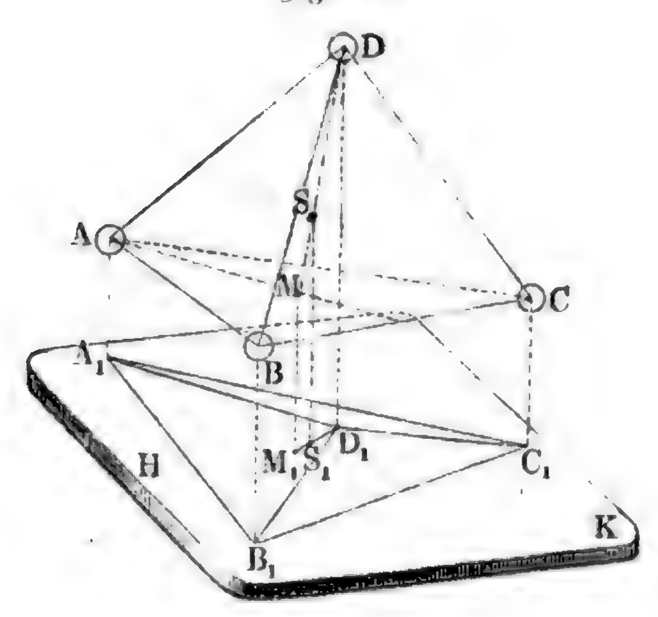
Der Abstand des Schwerpunktes $M$ der Basis $ABC$ von eben dieser Ebene ist (§. 109):

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3},$$

und der Abstand des Schwerpunktes $S$ der Pyramide läßt sich setzen:

$$SS_1 = MM_1 + \frac{1}{4}(DD_1 - MM_1),$$

Fig. 153.




wofern $DD_1$ der Abstand der Spitze ist; es folgt daher aus der Verbindung der beiden letzten Gleichungen:

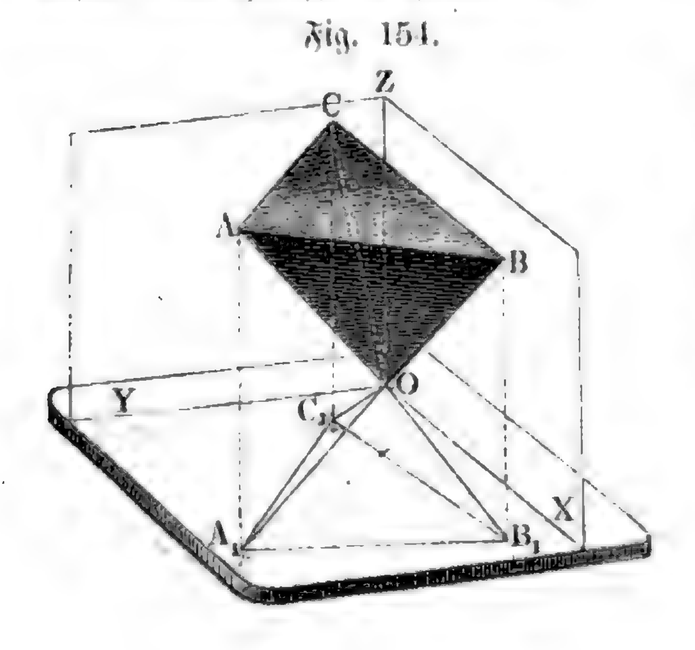
$$SS_1 = y = \frac{3}{4} MM_1 + \frac{1}{4} DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von vier gleichen, in den Eckpunkten der dreiseitigen Pyramide angebrachten Gewichten ist ebenfalls gleich dem arithmetischen Mittel

$$y = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4};$$

folglich fällt der Schwerpunkt der Pyramide mit dem Schwerpunkte von diesem Gewichtssysteme zusammen.

Fig. 154.




Anmerkung. Auch die Volumenbestimmung einer dreiseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte ist eine sehr einfache. Legen wir durch die Spitze $O$ einer solchen Pyramide $ABCO$, Fig. 154, drei Grundebenen $XY$, $XZ$, $YZ$, und bezeichnen wir die Abstände der Eckpunkte $A$, $B$, $C$ von diesen Ebenen durch $z_1, z_2, z_3$; $y_1, y_2, y_3$ und $x_1\ x_2\ x_3$, so ist das Volumen der Pyramide:

$$V = \pm \frac{1}{6} [x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - (x_1 y_3 z_2 + x_2 y_1 z_3 + x_3 y_2 z_1)],$$

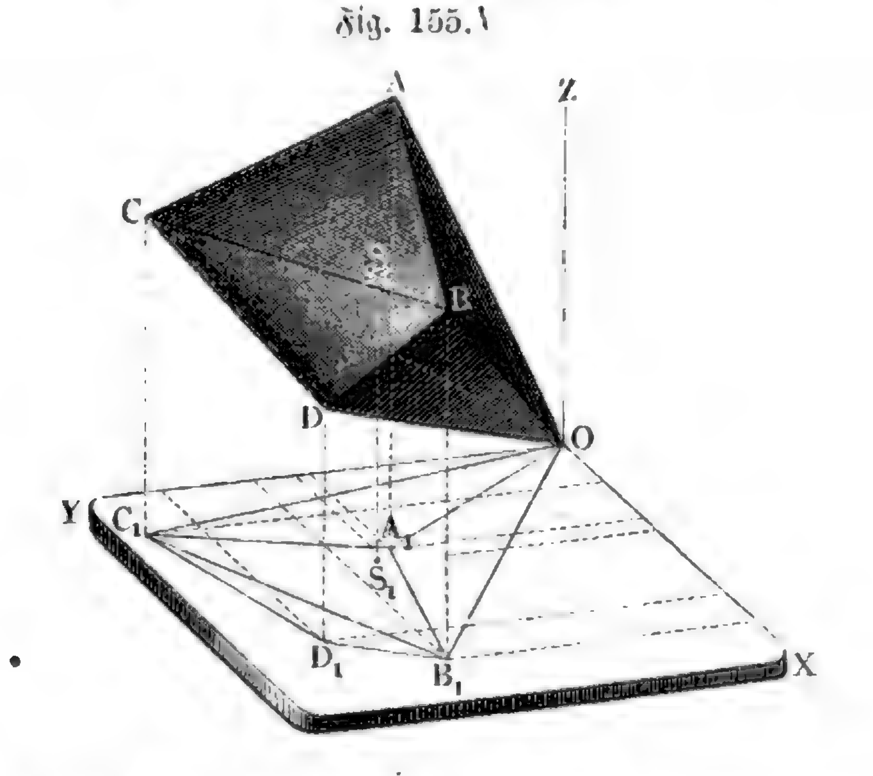
wie sich ergiebt, wenn man die Pyramide als das Aggregat von vier schief abgeschnittenen Prismen ansieht.

Die Abstände des Schwerpunktes dieser Pyramide von den drei Grundebenen $yz$, $xz$ und $xy$ sind:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4},\ \text{und}\ z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}.$$

§. 119 Da sich jedes Polyeder, wie $ABCDO$, Fig. 155, in lauter dreiseitige Pyramiden, wie $ABCO$, $BCDO$, zerlegen läßt, so kann man auch den

Fig. 155.




Schwerpunkt $S$ desselben finden, wenn man die Volumina und statischen Momente der einzelnen Pyramiden berechnet.

Sind die Abstände der Eckpunkte $A$, $B$, $C$ u. s. w. von den durch die gemeinschaftliche Spitze $O$ aller Pyramiden gelegten Coordinatenebenen $YZ$, $XZ$ und $XY$: $x_1$, $x_2$, $x_3$ u. s. w., $y_1$, $y_2$, $y_3$ u. s. w. und $z_1$, $z_2$, $z_3$ u. s. w., so hat man die Volumina der einzelnen Pyramiden:

$$V_1 = \pm \tfrac{1}{6}(x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1),$$
$$V_2 = \pm \tfrac{1}{6}(x_2 y_3 z_4 + x_3 y_4 z_2 + x_4 y_2 z_3 - x_2 y_4 z_3 - x_3 y_2 z_4 - x_4 y_3 z_2)$$

u. s. w. und die Abstände ihrer Schwerpunkte von den gedachten Ebenen:

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\ v_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4},\ w_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4},$$
$$u_2 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{4},\ v_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{4},\ w_2 = \frac{z_2 + z_3 + z_4}{4}\ \text{u. s. w.}$$

Aus diesen Werthen berechnen sich endlich die Abstände $u$, $v$, $w$ des Schwerpunktes $S$ des ganzen Körpers mittelst der Formeln:

$$u = \frac{V_1 u_1 + V_2 u_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},\quad v = \frac{V_1 v_1 + V_2 v_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}, \text{ und}$$

$$w = \frac{V_1 w_1 + V_2 w_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}.$$

**Beispiel.** Ein von sechs Dreiecken begrenzter Körper $ABCDO$, Fig. 155, ist durch folgende Coordinatenwerthe seiner Eckpunkte bestimmt, und man sucht die Coordinaten seines Schwerpunktes.

| Gegebene Coordinaten. | | | Die sechsfachen Inhalte der dreiseitigen Pyramiden $ABCO$ und $BCDO$. | Vierfache Coordinaten der Schwerpunkte. | | | Vierundzwanzigfache statische Momente. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ | | $4u_n$ | $4v_n$ | $4w_n$ | $24V_n u_n$ | $24V_n v_n$ | $24V_n w_n$ |
| 20 | 23 | 41 | | | | | | | |
| | | | $6V = \begin{Bmatrix} 20.29.28 \\ 23.30.12 \\ 41.45.40 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 20.40.30 \\ 23.28.45 \\ 41.12.29 \end{Bmatrix} = 31072$ | 77 | 92 | 99 | 2392544 | 2858624 | 3076128 |
| 45 | 29 | 30 | | | | | | | |
| 12 | 40 | 28 | | | | | | | |
| | | | $6V = \begin{Bmatrix} 45.35.28 \\ 29.20.12 \\ 30.38.40 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 45.40.20 \\ 29.28.38 \\ 30.12.35 \end{Bmatrix} = 17204$ | 95 | 104 | 78 | 1634380 | 1789216 | 1341912 |
| 38 | 35 | 20 | | | | | | | |
| | | | Summe 48276 | . . . . . | | | 4026924 | 4647840 | 4418040 |

Aus den Ergebnissen dieser Rechnung folgen nun die Abstände des Schwerpunktes $S$ des ganzen Körpers von den Ebenen $YZ$, $XZ$ und $XY$:

$$u = \frac{1}{4} \cdot \frac{4026924}{48276} = 20{,}853,$$

$$v = \frac{1}{4} \cdot \frac{4647840}{48276} = 24{,}069,$$

$$w = \frac{1}{4} \cdot \frac{4418040}{48276} = 22{,}879.$$

**Anmerkung.** Man kann natürlich den Schwerpunkt eines Polyeders auch dadurch finden, daß man dasselbe auf zweierlei Weise durch je eine Ebene in zwei Stücke zerlegt, die Schwerpunkte je zweier Stücke durch eine Gerade verbindet und den Durchschnitt von beiden Geraden angiebt. Da beide Geraden Schwerlinien des Polyeders sind, so ist natürlich ihr Durchschnitt auch Schwerpunkt des Körpers. Wenn das Polyeder sehr viele Ecken hat, so ist jedoch diese Bestimmungsweise sehr weitläufig, da man dann die Zerlegung des Körpers in Stücke sehr oft wiederholen muß. Bei dem fünfeckigen Körper in Fig. 155, welcher auf zweierlei Weise in je zwei dreiseitigen Pyramiden zu zerlegen ist, liegt der Schwerpunkt im Durchschnitt der Schwerlinien, welche die Schwerpunkte von je zwei dieser Pyramiden mit einander verbinden.

§. 120 Der Schwerpunkt einer abgestumpften Pyramide $ADQN$, Fig. 156, liegt in der Linie $GM$, welche die Schwerpunkte beider (parallelen) Grundflächen verbindet. Um noch den Abstand dieses Punktes von einer der Grundflächen zu bestimmen, hat man die Volumina und Momente der vollständigen Pyramide $ADF$ und der Ergänzungspyramide $NQF$ zu ermitteln. Sind die Inhalte der Grundflächen $AD$ und $NQ$, $= G_1$ und $G_2$, und ist der Normalabstand beider von einander $= h$, so bestimmt sich die Höhe $x$ der Ergänzungspyramide aus der Formel:

Fig. 156.

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{(h+x)^2}{x^2},$$

welche
$$\frac{h}{x} + 1 = \sqrt{\frac{G_1}{G_2}}, \text{ also } x = \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2}},$$

sowie
$$h + x = \frac{h\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2}} \text{ giebt.}$$

Das Moment der ganzen Pyramide in Beziehung auf die Basis $G_1$ ist nun:

$$\frac{G_1(h+x)}{3}\cdot\frac{h+x}{4} = \frac{1}{12}\cdot\frac{h^2 G_1^2}{(\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2})^2},$$

sowie das der Ergänzungspyramide:

$$\frac{G_2 x}{3}\left(h+\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{3}\frac{h^2\sqrt{G_2^3}}{\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2}} + \frac{1}{12}\cdot\frac{h^2 G_2^2}{(\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2})^2};$$

es folgt daher das Moment der abgekürzten Pyramide:

$$\frac{h^2}{12(\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2})^2}\cdot[G_1^2 - 4(\sqrt{G_1 G_2^3} - G_2^2) - G_2^2]$$

$$= \frac{h^2(G_1^2 - 4G_2\sqrt{G_1G_2} + 3G_2^2)}{12(G_1 - 2\sqrt{G_1G_2} + G_2)} = \frac{h^2}{12}\cdot(G_1 + 2\sqrt{G_1G_2} + 3G_2).$$

Nun ist noch der Inhalt der abgekürzten Pyramide:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\frac{h}{3};$$

daher ergiebt sich endlich der Abstand $SS_1$ ihres Schwerpunktes $S$ von der Basis:

$$y = \frac{G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3 G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Der Abstand $S_0 S$ dieses Punktes von der Mittelebene $KL$, welche die Höhe $h$ der Pyramide halbirt und mit den Grundflächen derselben parallel läuft, ist:

$$y_1 = \frac{h}{2} - y = \frac{[2(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) - (G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3 G_2)]}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2} \frac{h}{4}$$

$$= \left(\frac{G_1 - G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2}\right) \frac{h}{4}.$$

Sind die Halbmesser der Grundflächen eines abgekürzten Kegels $r_1$ und $r_2$, ist also $G_1 = \pi r_1^2$ und $G_2 = \pi r_2^2$, so hat man für diesen

$$y = \frac{r_1^2 + 2 r_1 r_2 + 3 r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4} \text{ und}$$

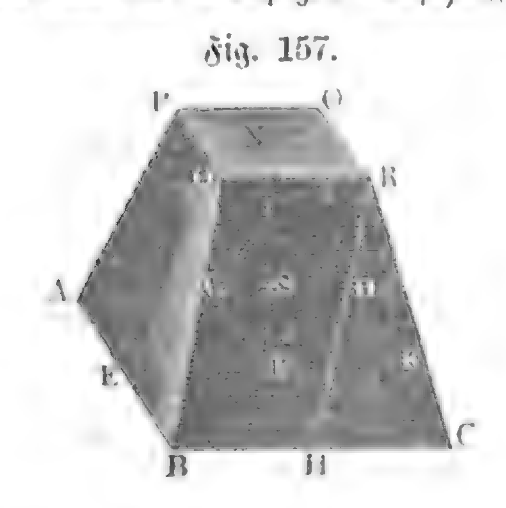
$$y_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Beispiel. Der Schwerpunkt eines abgekürzten Kegels von der Höhe $h = 20$ Zoll und den Halbmessern $r = 12$ und $r_1 = 8$ Zoll liegt, wie alle Mal, in der die Mittelpunkte beider kreisförmigen Grundflächen verbindenden Linie, und steht von der größeren um

$$y = {}^{20}/_4 \cdot \frac{12^2 + 2.12.8 + 3.8^2}{12^2 + 12.8 + 8^2} = \frac{5.528}{304} = \frac{2640}{304} = 8{,}684 \text{ Zoll ab.}$$

§. 121 Ein Obelisk, d. i. ein von zwei unähnlichen rectangulären Grundflächen und von vier Trapezen umschlossener Körper $ACOQ$, Fig. 157, läßt sich in ein Parallelepiped $AFRP$, in zwei dreiseitige Prismen $EHRQ$ und $GKRO$ und in eine vierseitige Pyramide $HKR$ zerlegen; man kann daher mit Hülfe der Momente dieser Bestandtheile den Schwerpunkt des ganzen Körpers finden.

Fig. 157.




Es läßt sich sehr leicht einsehen, daß die gerade Linie von der Mitte der einen Basis nach der Mitte der anderen, Schwerlinie dieses Körpers ist; es bleibt also nur noch der Abstand des Schwerpunktes von der einen Basis zu bestimmen übrig. Bezeichnen wir die Länge $BC$ und Breite $AB$ der einen Basis durch $l_1$ und $b_1$, sowie die Länge $QR$ und Breite $PQ$ der anderen Basis durch $l_2$ und $b_2$, und die Höhe des Körpers oder den Abstand beider Grundflächen von einander, durch $h$. Dann

ist der Inhalt des Parallelepipeds $= b_2 l_2 h$, und das Moment desselben $b_2 l_2 h \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} b_2 l_2 h^2$, ferner der Inhalt der beiden dreiseitigen Prismen

$$= ([b_1 - b_2]\, l_2 + [l_1 - l_2]\, b_2) \frac{h}{2},$$

und deren Moment

$$= ([b_1 - b_2]\, l_2 + [l_1 - l_2]\, b_2) \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3},$$

endlich der Inhalt der Pyramide

$$= (b_1 - b_2)(l_1 - l_2) \frac{h}{3},$$

und deren Moment

$$= (b_1 - b_2)(l_1 - l_2) \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4}.$$

Hieraus folgt das Volumen des ganzen Körpers:

$$V = (6 b_2 l_2 + 3 b_1 l_2 + 3 l_1 b_2 - 6 b_2 l_2 + 2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 - 2 b_1 l_2 - 2 b_2 l_1) \cdot \frac{h}{6}$$

$$= (2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 + b_1 l_2 + l_1 b_2) \frac{h}{6},$$

sowie dessen Moment:

$$Vy = (6 b_2 l_2 + 2 b_1 l_2 + 2 l_1 b_2 - 4 b_2 l_2 + b_1 l_1 + b_2 l_2 - b_1 l_2 - l_1 b_2) \cdot \frac{h^2}{12}$$

$$= (3 b_2 l_2 + b_1 l_1 + b_1 l_2 + b_2 l_1) \frac{h^2}{12},$$

und es ergiebt sich der Abstand seines Schwerpunktes $S$ von der Grundfläche $b_1 l_1$:

$$y = \frac{b_1 l_1 + 3 b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1}{2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1} \cdot \frac{h}{2}.$$

Es läßt sich auch (s. die Planimetrie und Stereometrie von C. Koppe):

$$V = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h + \frac{b_1 - b_2}{2} \cdot \frac{l_1 - l_2}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

setzen. Der Abstand des Schwerpunktes $y_1$ von der mittleren Querschnittsebene bestimmt sich durch die Formel:

$$y_1 = \frac{h}{2} - y = \frac{b_1 l_1 - b_2 l_2}{3(b_1 + b_2)(l_1 + l_2) + (b_1 - b_2)(l_1 - l_2)} \cdot h.$$

Anmerkung. Diese Formel findet auch ihre Anwendung bei Körpern mit elliptischen Grundflächen. Sind die Halbaren der einen Grundfläche $a_1$ und $b_1$ und die der anderen $a_2$ und $b_2$, so ist das Volumen eines solchen Körpers (Kübels):

$$V = \frac{\pi h}{6}(2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

und der Abstand seines Schwerpunktes von der Basis $\pi a_1 b_1$:

$$y = \frac{a_1 b_1 + 3 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1}{2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1} \cdot \frac{h}{2}.$$

Beispiel. Ein Teichdamm $ACOQ$, Fig. 158, von 20 Fuß Höhe, ist unten 250 Fuß lang und 40 Fuß breit, dagegen oben 400 Fuß lang und 15 Fuß breit;

Fig. 158.



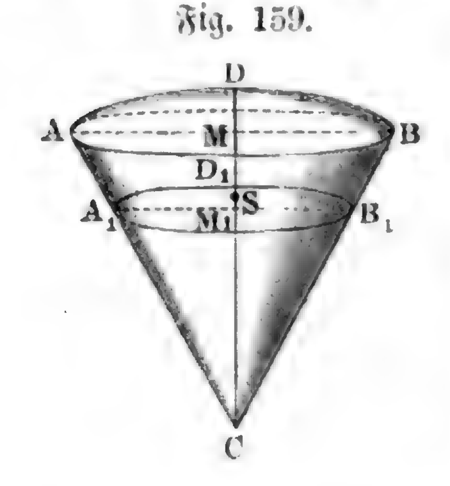

man sucht den Abstand seines Schwerpunktes von der Basis. Hier ist $b_1 = 40$, $l_1 = 250$, $b_2 = 15$, $l_2 = 400$, und $h = 20$, daher der gesuchte Verticalabstand:

$$y = \frac{40 \,.\, 250 + 3 \,.\, 15 \,.\, 400 + 40 \,.\, 400 + 15 \,.\, 250}{2 \,.\, 40 \,.\, 250 + 2 \,.\, 15 \,.\, 400 + 40 \,.\, 400 + 15 \,.\, 250} \cdot {}^{20}/_{2}$$

$$= \frac{4775}{5175} \cdot 10 = \frac{1910}{207} = 9{,}227 \text{ Fuß}.$$

Dreht sich ein Kreisausschnitt $ACD$, Fig. 159, um seinen Halbmesser $CD$, so entsteht ein Kugelausschnitt $ACB$, dessen Schwerpunkt wie folgt bestimmt wird. Man kann sich diesen Körper als einen Inbegriff von unendlich vielen und unendlich dünnen Pyramiden vorstellen, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt $C$ ist und deren Grundflächen die Kugelmütze $ADB$ bilden. Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden stehen um $^3/_4$ des Kugelhalbmessers $CD$ vom Mittelpunkte $C$ ab, es bilden daher dieselben eine zweite Kugelmütze $A_1 D_1 B_1$ vom Halbmesser $CD_1 = {}^3/_4\, CD$. Der Schwerpunkt $S$ dieser krummen Fläche ist aber auch der Schwerpunkt des Kugelausschnittes, weil sich die Gewichte der Elementarpyramiden auf diese Fläche gleichförmig vertheilen, diese also gleichförmig schwer ausfällt. §. 122

Fig. 159.




Setzen wir nun den Halbmesser $CA = CD = r$ und die Höhe $DM$ der äußeren Calotte $= h$, so erhalten wir für die innere Calotte $CD_1 = {}^3/_4\, r$, und $M_1 D_1 = {}^3/_4\, h$, folglich (§. 116) $SD_1 = {}^1/_2\, MD_1 = {}^3/_8\, h$ und den Abstand des Schwerpunktes des Kugelausschnittes vom Mittelpunkte $C$:

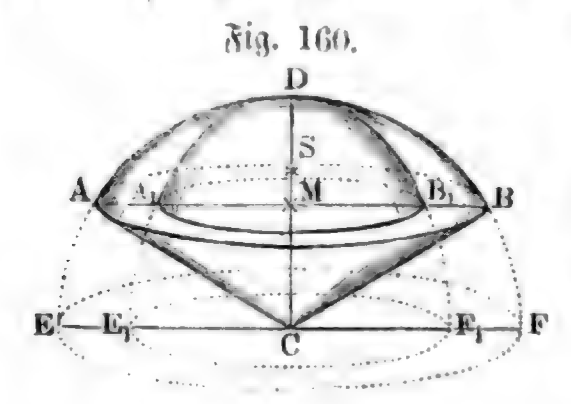
$$CS = CD_1 - SD_1 = {}^3/_4\, r - {}^3/_8\, h = {}^3/_4 \left(r - \frac{h}{2}\right).$$

Für die Halbkugel ist z. B. $h = r$, daher der Abstand ihres Schwerpunktes $S$ vom Mittelpunkte $C$:

$$CS = {}^3/_4 \cdot \frac{r}{2} = {}^3/_8\, r.$$

§. 123 Den Schwerpunkt $S$ von einem Kugelsegmente $ABD$, Fig. 160, erhält man, indem man das Moment dieses Segmentes gleichsetzt der Differenz zwischen dem Momente des Ausschnittes $ADBC$ und dem des Kegels $ABC$. Bezeichnen wir wieder den Kugelhalbmesser $CD$ durch $r$ und die Höhe $DM$ durch $h$, so erhalten wir das Moment des Ausschnittes

Fig. 160.




$$= \tfrac{2}{3}\pi r^2 h \,.\, \tfrac{3}{8}(2r - h) = \tfrac{1}{4}\pi r^2 h (2r - h).$$

und das des Kegels

$$= \tfrac{1}{3}\pi h (2r - h)\,.\,(r - h)\,.\,\tfrac{3}{4}(r - h) = \tfrac{1}{4}\pi h (2r - h)(r - h)^2;$$

daher ist das Moment des Kugelsegmentes

$$Vy = \tfrac{1}{4}\pi h (2r - h)(r^2 - [r - h]^2) = \tfrac{1}{4}\pi h^2 (2r - h)^2.$$

Der Inhalt dieses Segmentes ist aber

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2 (3r - h);$$

es folgt daher der in Frage stehende Abstand:

$$CS = y = \frac{\tfrac{1}{4}\pi h^2 (2r - h)^2}{\tfrac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)} = \tfrac{3}{4}\,.\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

Setzt man wieder $h = r$, so geht das Segment in eine Halbkugel über, und es folgt wie oben, $CS = \tfrac{3}{8} r$.

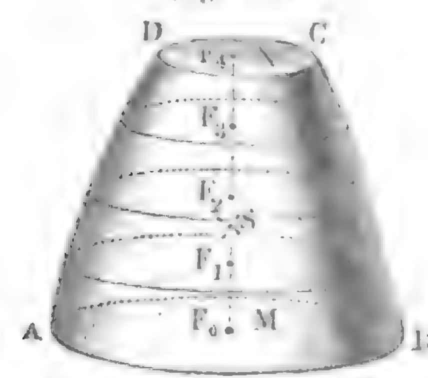
Diese Formel gilt selbst für das Segment eines Sphäroides $A_1 D B_1$, welches entsteht, wenn sich der elliptische Bogen $DA_1$ um die große Halbaxe $CD = r$ dreht; denn zerschneidet man beide Segmente durch Ebenen parallel zur Basis $AB$ in lauter dünne Scheiben, so ist das Verhältniß von je zwei derselben unveränderlich $= \frac{\overline{MA_1}^2}{\overline{MA}^2} = \frac{\overline{CE_1}^2}{\overline{CE}^2} = \frac{b^2}{r^2}$, wenn $b$ die kleine Halbaxe der Ellipse bezeichnet. Man muß also sowohl das Volumen, als auch das Moment des Kugelsegmentes durch $\frac{b^2}{r^2}$ multipliciren, um das Volumen und das Moment des Segmentes vom Sphäroid zu erhalten, und verändert dadurch den Quotienten $CS = \frac{\text{Moment}}{\text{Volumen}}$, um Nichts.

Es ist überhaupt $CS = y = \tfrac{3}{4}\frac{(2r - h)^2}{3r - h}$, wobei $r$ die Größe derjenigen Halbaxe bezeichnet, um welches sich die Ellipse bei Entstehung des Sphäroides dreht.

§. 124 **Anwendung der Simpson'schen Regel.** Um den Schwerpunkt eines ungesetzmäßigen Körpers $ABCD$, Fig 161, zu finden, zerlege

man denselben durch gleich viel von einander abstehende Ebenen in dünne Scheiben, bestimme die Inhalte der erhaltenen Durchschnitte und deren Momente in Hinsicht auf die als Basis dienende erste Parallelebene $AB$, und vereinige endlich beide durch die Simpson'sche Regel.

Fig. 161.




Sind die Inhalte dieser Durchschnitte $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4$ und ist die ganze Höhe oder der Abstand $MN$ zwischen den äußersten Parallelebenen, $= h$, so hat man das Volumen des Körpers nach der Simpson'schen Regel (annähernd):

$$V = (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4)\frac{h}{12}.$$

Multiplicirt man noch in dieser Formel jede Fläche durch ihren Abstand von der Basis, so erhält man das Moment des Körpers, nämlich:

$$Vy = (0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4F_4)\frac{h}{4}\cdot\frac{h}{12},$$

und es giebt die Division beider Ausdrücke durch einander den gesuchten Abstand des Schwerpunktes $S$:

$$MS = y = \frac{(0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.F_4)}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4}\frac{h}{4}.$$

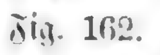
Ist die Zahl der plattenförmigen Elemente $= 6$, so hat man:

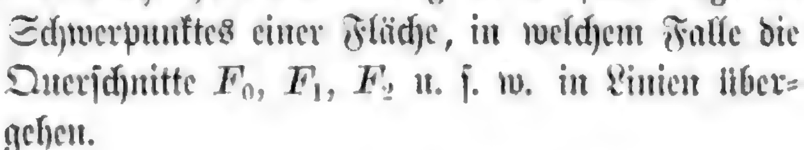
$$y = \frac{0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.2F_4 + 5.4F_5 + 6.F_6}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + 2F_4 + 4F_5 + F_6}\cdot\frac{h}{6}.$$

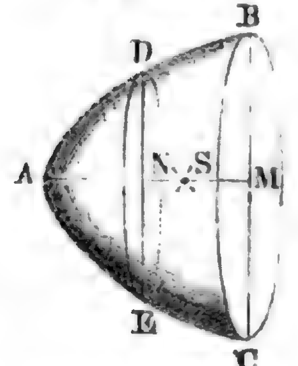
Es ist leicht zu erachten, wie man diese Formel umzuändern hat, wenn die Zahl der Schnitte eine andere ist. Nur fordert diese Regel, daß die Zahl der abgeschnittenen Stücke eine gerade, die Flächenzahl also eine ungerade ist.

In vielen Fällen der Anwendung genügt die Bestimmung eines Abstandes, weil außerdem noch eine Schwerlinie bekannt ist. Die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Körper sind auf der Drehbank erzeugte Rotationskörper, deren Rotationsaxe die Schwerlinie der Körper ist.

Endlich findet die Formel auch ihre Anwendung bei Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche, in welchem Falle die Querschnitte $F_0$, $F_1$, $F_2$ u. s. w. in Linien übergehen.


Fig. 162.






Beispiel 1. Für das parabolische Conoid $ABC$, Fig. 162, welches durch Umdrehung des Parabelstückes $ABM$ um seine Axe $AM$ entstanden ist, erhält man, wenn man nur einen Mittelschnitt $DNE$ durchführt, Folgendes:

Es sei die Höhe $AM = h$, der Halbmesser $BM = r$, $AN = NM = \frac{h}{2}$ und daher der Radius $DN = r\sqrt{1/2}$. Der Inhalt des

Schnittes durch $A$ ist $F_0 = 0$, durch $N$. $F_1 = \pi \overline{DN}^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ und durch $M$, $F_2 = \pi r^2$. Hiernach folgt das Volumen dieses Körpers:

$$V = \frac{h}{6}(0 + 4F_1 + F_2) = \frac{h}{6}(2\pi r^2 + \pi r^2) = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{2} F_2 h;$$

sowie das Moment desselben:

$$Vy = \frac{h^2}{12}(1 \,.\, 2\pi r_2 + 2 \,.\, \pi r^2) = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2 = \frac{1}{3} F_2 h^2,$$

und daher der Abstand seines Schwerpunktes $S$ vom Scheitel:

$$AS = y = \frac{\frac{1}{3} F_2 h^2}{\frac{1}{2} F_2 h} = \frac{2}{3} h.$$

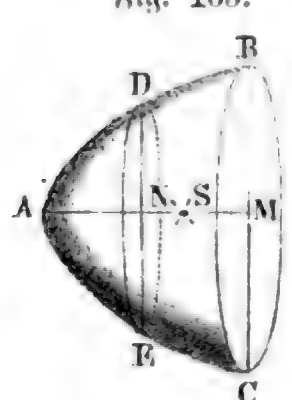


Fig. 163.

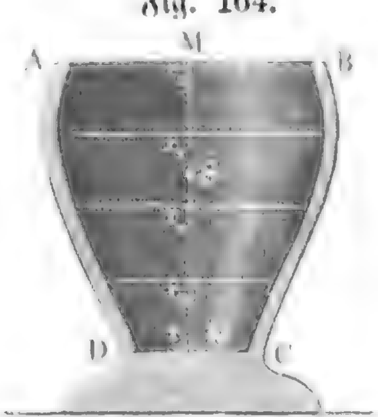


Fig. 164.

**Beispiel 2.** Das Gefäß $ABCD$, Fig. 164, hat die mittleren halben Weiten $r_0 = 1$ Zoll, $r_1 = 1{,}1$ Zoll, $r_2 = 0{,}9$ Zoll, $r_3 = 0{,}7$ Zoll, $r_4 = 0{,}4$ Zoll bei einer Höhe $MN = 2{,}5$ Zoll; man sucht den Schwerpunkt $S$ seines Fassungsraumes. Die Querschnitte sind $F_0 = 1 \,.\, \pi$, $F_1 = 1{,}21 \,.\, \pi$, $F_2 = 0{,}81 \,.\, \pi$, $F_3 = 0{,}49 \,.\, \pi$, $F_4 = 0{,}16 \,.\, \pi$, es ist daher der Abstand seines Schwerpunktes von der Horizontalebene $AB$:

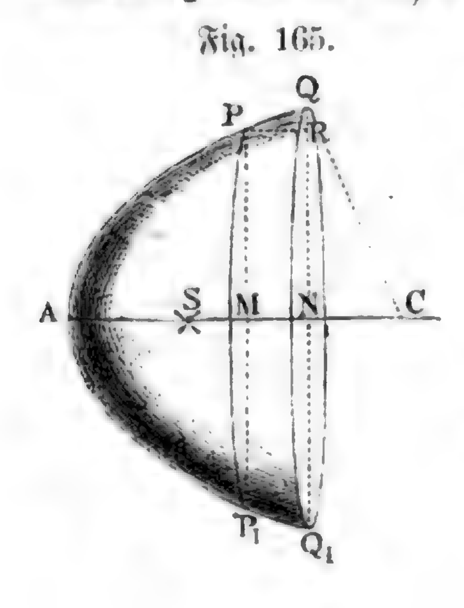
$$MS = \frac{0 \,.\, 1\pi + 1 \,.\, 4 \,.\, 1{,}21 \,.\, \pi + 2 \,.\, 2 \,.\, 0{,}81\pi + 3 \,.\, 4 \,.\, 0{,}49\pi + 4 \,.\, 0{,}16 \,.\, \pi}{1\pi + 4 \,.\, 1{,}21\pi + 2 \,.\, 0{,}81\pi + 4 \,.\, 0{,}49\pi + 0{,}16 \,.\, \pi} \cdot \frac{2{,}5}{4}$$

$$= \frac{14{,}60}{9{,}58} \cdot \frac{2{,}5}{4} = \frac{36{,}50}{38{,}32} = 0{,}9502 \text{ Zoll}.$$

Der Fassungsraum ist $V = 9{,}58\pi \,.\, \frac{2{,}5}{12} = 6{,}270$ Cub.-Zoll.

(§. 125) **Schwerpunktsbestimmung von Rotationsflächen und Rotationskörpern.** Die Schwerpunkte krummer Flächen und krummflächiger Körper von bestimmten Formen lassen sich allgemein nur mit Hülfe der Differenzial- und Integralrechnung bestimmen. In der Praxis kommen vorzüglich die Rotationsflächen und Rotationskörper vor, daher möge im Folgenden auch nur von der Bestimmung der Schwerpunkte dieser Gebilde die Rede sein. Dreht sich die ebene Curve $AP$, Fig. 165, um die Axe $AC$, so beschreibt sie eine sogenannte Rotationsfläche $APP_1$, und dreht sich die von der Curve $AP$ und ihren

Fig. 165.



Coordinaten $AM$ und $MP$ begrenzte Fläche $APM$ um eben diese Axe, so wird dadurch ein von der Rotationsfläche $APP_1$ und von einer Kreisfläche $PMP_1$ begrenzter Rotationskörper erzeugt.

Bezeichnen wir die Abscisse $AM$ durch $x$, die entsprechende Ordinate $MP$ durch $y$, sowie den zugehörigen Bogen $AP$ durch $s$, ferner das Abscissenelement $MN = PR$ durch $\partial x$, das Ordinatenelement $QR$ durch $\partial y$ und das Curvenelement $PQ$ durch $\partial s$, so haben wir den Inhalt des bei der Rotatoin von $\partial s$ durchlaufenen gürtelförmigen Elementes $PQQ_1P_1$ der Rotationsfläche $APP_1 = O$,

$$\partial O = 2\pi . PM . PQ = 2\pi y \partial s,$$

und dagegen den Inhalt des von diesem Flächenelemente umgürteten Elementes des Rotationskörpers $APP_1 = V$:

$$\partial V = \pi \overline{PM}^2 . MN = \pi y^2 \partial x.$$

Weil beide Elemente um die Abscisse $x$ von einer durch $A$ gehenden und auf der Axe $AC$ winkelrecht stehenden Ebene abstehen, so ist das Moment von $\partial O$:

$$x \partial O = 2\pi x y \partial s,$$

und das von $\partial V$:

$$x \partial V = \pi x y^2 \partial x.$$

Da nun
$$O = \int 2\pi y \partial s = 2\pi \int y \partial s, \text{ und}$$

$$V = \int \pi y^2 \partial x = \pi \int y^2 \partial x$$

ist, und dem letzteren zufolge das Moment von $O$:

$$\int 2\pi x y \partial s = 2\pi \int x y \partial s,$$

und das von $V$:

$$\int \pi x y^2 \partial x = \pi \int x y^2 \partial x$$

sich ergiebt, so ist demnach der Abstand $AS = y$ des Schwerpunktes $S$ von dem Anfangspunkte $A$:

1) für die Rotationsfläche:

$$u = \frac{2\pi \int x y \partial s}{2\pi \int y \partial s} = \frac{\int x y \partial s}{\int y \partial s}, \text{ und dagegen}$$

2) für den Rotationskörper:

$$u = \frac{\pi \int x y^2 \partial x}{\pi \int y^2 \partial x} = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y^2 \partial x}.$$

Z. B. für eine Kugelcalotte mit dem Halbmesser $CQ = r$ hat man, da hier

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{CQ}{QN}, \text{ d. i. } \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{r}{y}, \text{ also } y \partial s = r \partial x \text{ ist:}$$

$$AS = u = \frac{\int x r \partial x}{\int r \partial x} = \frac{\int x \partial x}{\int \partial x} = \frac{1/_2\, x^2}{x} = 1/_2\, x = 1/_2\, AM.$$

(Vergleiche §. 116.)

Für das Kugelsegment ist dagegen, da sich $y^2 = 2rx - x^2$ setzen läßt:

$$AS = u = \frac{\int (2rx - x^2)\, x \partial x}{\int (2rx - x^2)\, \partial x} = \frac{\int 2 r x^2 \partial x - \int x^3 \partial x}{\int 2 r x \partial x - \int x^2 \partial x}$$

$$= \frac{2/_3\, r x^3 - 1/_4\, x^4}{r x^2 - 1/_3\, x^3} = \frac{(2/_3\, r - 1/_4\, x)\, x}{r - 1/_3\, x} = \left(\frac{8r - 3x}{3r - x}\right)\frac{x}{4},$$

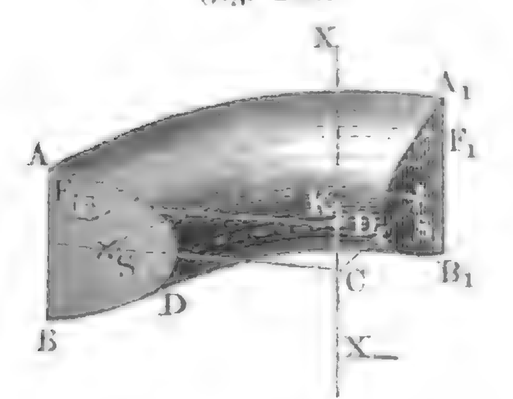
und folglich:

$$CS = r - u = 3/_4\, \frac{(2r - x)^2}{3r - x}\cdot \text{ (Vergl. §. 123.)}$$

§. 126 **Guldinische Regel.** Eine interessante und zuweilen sehr nützliche Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist die Guldinische Regel oder die barycentrische Methode (franz. méthode centrobarique; engl. the properties of Guldinus). Dieser zufolge ist der Inhalt eines Rotationskörpers (oder einer Rotationsfläche) gleich dem Producte aus der Erzeugungsfläche (oder Erzeugungslinie) und dem bei der Erzeugung des Rotationskörpers (oder der Rotationsfläche) durchlaufenen Wege ihres Schwerpunktes. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun.

Dreht sich die ebene Fläche $ABD$, Fig. 166, um eine Axe $X\overline{X}$, so beschreibt jedes Element $F_1$, $F_2$ u. s. w. derselben einen Ring; sind die Entfernungen $F_1 K_1$, $F_2 K_2$ u. s. w. dieser Elemente von der Umdrehungsaxe $X\overline{X}_1 = r_1, r_2$ u. s. w. und ist der Umdrehungswinkel $FKF_1 = SCS_1 = \alpha^0$, also der entsprechende Bogen für den Halbmesser 1, $= \alpha$, so sind die bogenförmigen Wege der Elemente $= r_1 \alpha$, $r_2 \alpha$ u. s. w. Die von den Elementen $F_1$, $F_2$ u. s. w. durchlaufenen Räume lassen sich als krummgebogene Prismen von den Grundflächen $F_1, F_2$ u. s. w. und von den Höhen $r_1 \alpha$, $r_2 \alpha$ u. s. w. ansehen, haben also die Inhalte $F_1 r_1 \alpha$, $F_2 r_2 \alpha$ u. s. w., und es ist sonach das Volumen des ganzen Körpers $ABDD_1B_1A_1$:

Fig. 166.




$$V = F_1 r_1 \alpha + F_2 r_2 \alpha \ldots = (F_1 r_1 + F_2 r_2 + \ldots)\,.\,\alpha.$$

Ist $CS = y$, der Abstand des Schwerpunktes $S$ der Erzeugungsfläche von der Umdrehungsaxe, so hat man auch:

$$(F_1 + F_2 + \cdots) y = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \cdots,$$

und folglich das **Volumen des ganzen Körpers**:

$$V = (F_1 + F_2 + \cdots) y \alpha.$$

Aber $F_1 + F_2 + \cdots$ ist der Inhalt der ganzen Fläche $F$ und $y\alpha$ ist der vom Schwerpunkte $S$ durchlaufene Kreisbogen $SS_1 = w$; es folgt daher $V = Fw$, wie oben behauptet wurde.

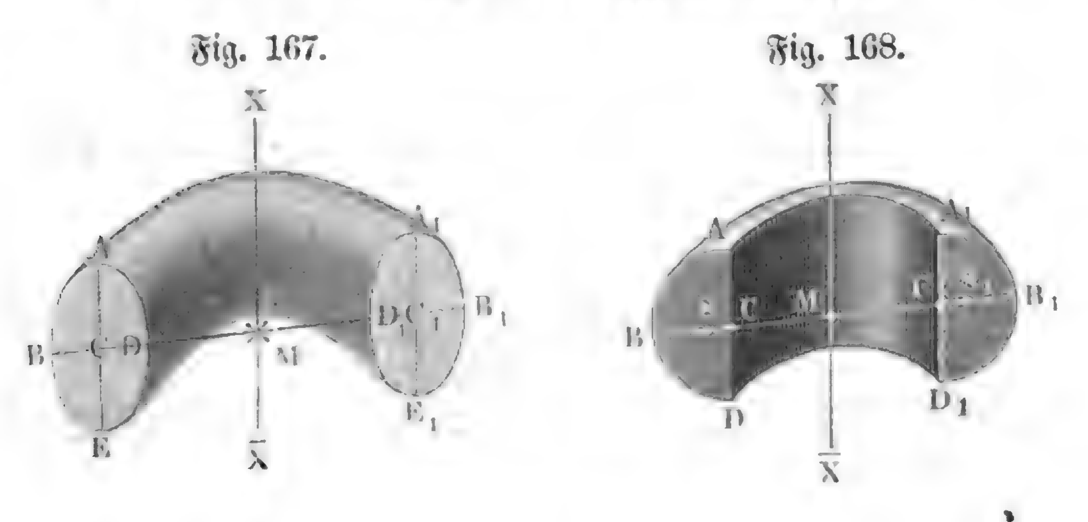
Diese Formel gilt auch für die Rotation einer Linie, weil sich dieselbe als eine Fläche von unendlich kleiner Breite ansehen läßt, es ist nämlich $F = lw$, d. h. die **Rotationsfläche** ist ein Product aus der Erzeugungslinie ($l$) und dem Wege ($w$) ihres Schwerpunktes.

**Beispiel 1.** Bei einem halben Ringe mit elliptischem Querschnitte $ABED$, Fig. 167, seien die Halbaxen des Querschnittes $CA = a$ und $CB = b$, und sei die Entfernung $CM$ des Mittelpunktes $C$ dieses Schnittes von der Axe $X\overline{X}$, $= r$. Dann ist die elliptische Erzeugungsfläche $F = \pi a b$, und der Weg ihres Schwerpunktes ($C$), $w = \pi r$; daher das Volumen dieses halben Ringes: $V = \pi^2 a b r$, und das des ganzen Ringes: $V_1 = 2V = 2\pi^2 a b r$.

Sind die Dimensionen folgende: $a = 5$ Zoll, $b = 3$ Zoll, $r = 6$ Zoll, so ist das Volumen eines **Viertelringes**:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 . 5 . 3 . 6 = 9,8696 . 5 . 9 = 444,132 \text{ Cubikzoll.}$$

Fig. 167. Fig. 168.




**Beispiel 2.** Für einen Ring mit **halbkreisförmigem Querschnitte** $ABD$, Fig. 168, ist, wenn $CA = CB = a$, den Halbmesser dieses Querschnittes und $MC = r$, den des hohlen Raumes oder Halses bezeichnet, das Volumen

$$V = \frac{\pi a^2}{2} \cdot 2\pi\left(r + \frac{4a}{3\pi}\right) = \pi a^2 \left(\pi r + \tfrac{4}{3} a\right).$$

**Beispiel 3.** Dreht sich ein Kreissegment $ADB$, Fig. 169 (a. f. S.), um den mit seiner Sehne $AB$ parallel laufenden Durchmesser $EF$, so beschreibt es eine Kugel $AD_1B$ mit einer cylindrischen Aushöhlung $ABB_1A_1$. Ist nun $A$ der

Inhalt dieses Segmentes und $s$ die Größe der Sehne $AB = A_1 B_1$ desselben, so hat man nach §. 114 den Abstand seines Schwerpunktes $S$ vom Mittelpunkte $C$:

$$CS = y = \frac{s^3}{12 A},$$

und daher das Volumen der erzeugten Hohlkugel:

$$V = 2 \pi y A = 2 \pi \frac{s^3}{12} = \frac{\pi s^3}{6}.$$

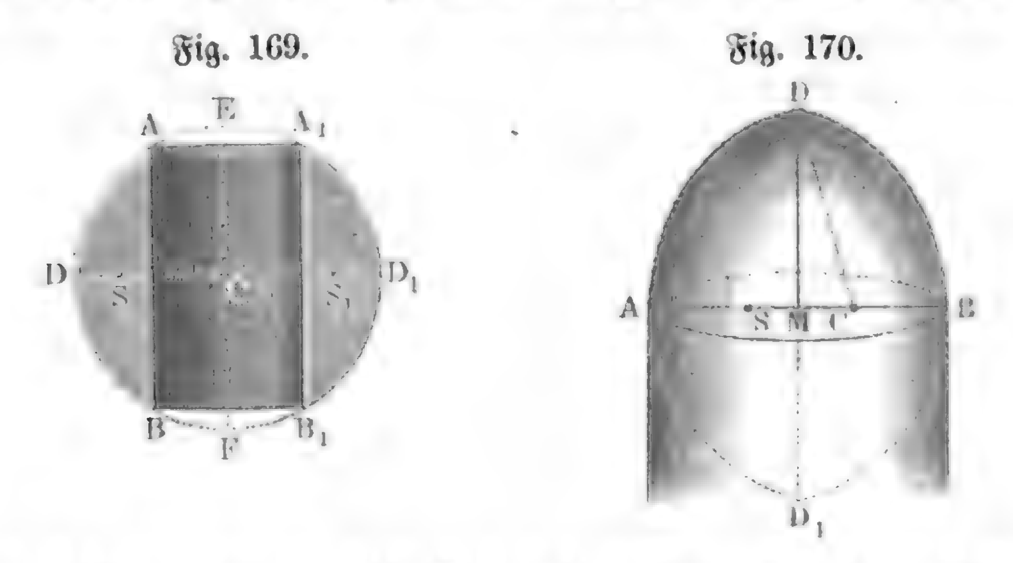
Bei der Vollkugel ist die Sehne oder Höhe der cylindrischen Bohrung dem Durchmesser $d$ der Kugel gleich geworden, daher der Inhalt derselben:

$$V = \frac{\pi d^3}{6},$$

wie bekannt.

Beispiel 4. Es sei die Oberfläche und der Inhalt der Kuppel $ADB$, Fig. 170, eines Klostergewölbes zu finden, und zu diesem Zwecke die halbe Weite

Fig. 169. Fig. 170.




$MA = MB = a$ und die Höhe $MD = h$ gegeben. Aus beiden Dimensionen folgt der Halbmesser $CA = CD$ des Erzeugungskreises:

$$r = \frac{a^2 + h^2}{2a},$$

und der Centriwinkel $ACD = \alpha$, wenn man setzt:

$$sin. \alpha = \frac{h}{r}.$$

Der Schwerpunkt $S$ eines Bogens

$$DAD_1 = 2AD$$

ist bestimmt durch die Entfernung:

$$CS = r . \frac{\text{Sehne } MD}{\text{Bogen } AD} = \frac{r \sin. \alpha}{\alpha}, \text{ ferner } CM = r \cos. \alpha,$$

es ist folglich der Abstand des Schwerpunktes $S$ von der Axe $MD$:

$$MS = \frac{r \sin. \alpha}{\alpha} - r \cos. \alpha = r \left( \frac{\sin. \alpha}{\alpha} - \cos. \alpha \right),$$

und der Weg des Schwerpunktes bei Erzeugung der Fläche $ADB$:

$$w = 2 \pi r \left( \frac{\sin. \alpha}{\alpha} - \cos. \alpha \right).$$

Die Erzeugungslinie $DAD_1$ ist $2r\alpha$, folglich ihre Hälfte $AD_1 = r\alpha$, und die von der letzteren beschriebene Rotationsfläche $ADB$:

$$O = r\alpha \,.\, 2\pi r\left(\frac{sin.\,\alpha}{\alpha} - cos.\,\alpha\right) = 2\pi r^2 (sin.\,\alpha - \alpha\, cos.\,\alpha)$$

zu setzen.

Sehr gewöhnlich ist $\alpha^0 = 60^0$, also:

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\; sin.\,\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und } cos.\,\alpha = \tfrac{1}{2};$$

daher folgt dann der gesuchte Inhalt:

$$O = \pi r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2{,}1515\,.\,r^2.$$

Für das Segment $DAD_1 = A = r^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\,sin.\,2\,\alpha)$ ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte $C$:

$$= \frac{(2\,.\,MD)^3}{12\,A} = \tfrac{2}{3}\,.\,\frac{r^3\,sin.\,\alpha^3}{A},$$

daher Abstand von der Axe:

$$MS = CS - CM = \tfrac{2}{3}\frac{r^3\,sin.\,\alpha^3}{A} - r\,cos.\,\alpha,$$

endlich der Weg dieses Schwerpunktes bei einer Umdrehung um $MD$:

$$w = \frac{2\pi r}{A}(\tfrac{2}{3}r^2 sin.\,\alpha^3 - A\,cos.\,\alpha) = \frac{2\pi r^3}{A}[\tfrac{2}{3}sin.\,\alpha^3 - (\alpha - \tfrac{1}{2}\,sin.\,2\,\alpha)\,cos.\,\alpha].$$

Das Volumen des ganzen durch das Segment $DAD_1$ erzeugten Körpers ergiebt sich, wenn man diesen Weg durch $A$ multiplicirt, und das Volumen der Kuppel wird gefunden, wenn man hiervon die Hälfte nimmt, also:

$$V = \pi r^3[\tfrac{2}{3}\,sin.\,\alpha^3 - (\alpha - \tfrac{1}{2}\,sin.\,2\,\alpha)\,cos.\,\alpha].$$

z. B. für $\alpha^0 = 60^0$, also:

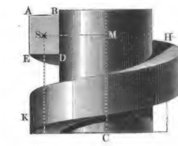
$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \text{ ist } sin.\,\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\; sin.\,2\,\alpha = \tfrac{1}{2} \text{ und } cos.\,\alpha = \tfrac{1}{2}, \text{ daher:}$$

$$V = \pi r^3\left(\tfrac{3}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}3956\,.\,r^3.$$

§. 127 Die Guldini'sche Regel findet auch ihre Anwendung bei solchen Körpern, welche entstehen, wenn sich die Erzeugungsfläche beim Fortrücken ihres Schwerpunktes längs irgend einer Curve stets winkelrecht gegen dieselbe stellt, weil sich jede Curve aus unendlich vielen und unendlich kleinen Kreisbögen zusammensetzen läßt. Es ist auch hier das Volumen des erzeugten Körpers das Product aus der Erzeugungsfläche und dem Wege ihres Schwerpunktes. Ebenso ist diese Regel noch dann anwendbar, wenn die Erzeugungsfläche bei ihrer Fortbewegung immer gegen die Projection des Weges ihres Schwerpunktes auf irgend eine Ebene, rechtwinkelig gerichtet bleibt. Es ist hier aber die Erzeugungsfläche nicht mit dem Wege, sondern mit der Projection des Weges zu multipliciren.

Hiernach wird z. B. das Volumen eines Schraubengewindes $AHK$, Fig. 171,

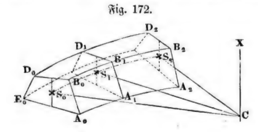
Fig. 171.




bestimmt, durch das Product aus dem Querschnitt $ABDE$ desselben und aus dem Umfang des Kreises, dessen Halbmesser der Abstand $MS$ des Schwerpunktes $S$ der Fläche $ABDE$ von der Axe $CM$ der Schraubenspindel ist.

In manchen Fällen kann man auch bei Bestimmung körperlicher Räume die Guldini'sche Regel mit der Simpson'schen Regel vereinigt anwenden. Um z. B. den Inhalt des krummen Dammkörpers $A_0 D_0 B_1 D_2 A_2$, Fig. 172, zu finden, hat man nur nöthig, den Krümmungswinkel $S_0 C S_2 = 2 S_0 C S_1 = 2 S_1 C S_2 = \beta$,

Fig. 172.




ferner die Querschnitte $\overline{A_0 D_0} = F_0$, $A_1 D_1 = F_1$ und $A_2 D_2 = F_2$, sowie die Abstände $C S_0 = r_0$, $C S_1 = r_1$ und $C S_2 = r_2$ der Schwerpunkte $S_0$, $S_1$ und $S_2$ dieser Querschnitte von der verticalen Centralaxe $CX$ zu kennen. Das Volumen $V$ dieses Körpers bestimmt sich dann durch die Formel:

$$V = \beta \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right) = \frac{\beta^0 \pi}{180^0} \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right)$$

$$= 0{,}01745\, \beta^0 \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right).$$

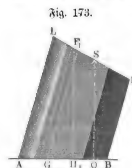
Sind die Halbmesser $r_0$, $r_1$ und $r_2$ einander gleich, oder wenig von einander verschieden, so kann man $r_0 = r_1 = r_2 = r$, und daher

$$V = 0{,}1745\, \beta^0 r \left(\frac{F_0 + 4 F_1 + F_2}{6}\right) \text{ setzen.}$$

§. 128 Eine andere, mit der letzten Regel in naher Verbindung stehende Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist folgende.

Man kann annehmen, daß jeder schief abgeschnittene, prismatische Körper $ABKL$, Fig. 173, aus lauter unendlich dünnen Prismen wie $\overline{F_1 G_1}$ bestehe. Sind nun $G_1$, $G_2$ u. s. w. die Grundflächen und $h_1, h_2$ u. s. w. die Höhen dieser prismatischen Elemente, so hat man ihre Inhalte:

Fig. 173.




$$G_1 h_1,\ G_2 h_2 \text{ u. s. w.},$$

und sonach das Volumen des ganzen schief abgeschnittenen Prismas:

$$V = G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots$$

Nun verhält sich aber ein Element $F_1$ des schiefen Schnittes $KL$ zum Elemente $G_1$ der Basis $AB = G$, wie die ganze schiefe Fläche $F$ zur Basis $G$; es folgt daher:

$$G_1 = \frac{G}{F} F_1,\ G_2 = \frac{G}{F} F_2 \text{ u. s. w., und}$$

$$V = \frac{G}{F}(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots).$$

Da endlich $F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots$ das Moment $Fh$ des ganzen schiefen Schnittes ist, so ergiebt sich:

$$V = \frac{G}{F} \cdot Fh = Gh,$$

d. i. der Inhalt des schief abgeschnittenen Prismas ist gleich dem Inhalte eines vollständigen Prismas, welches mit demselben auf einerlei Grundfläche steht und dessen Höhe gleich ist dem Abstande $SO$ des Schwerpunktes $S$ des schiefen Schnittes von der Basis.

Bei einem geraden und schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma ist, wenn $h_1, h_2$ und $h_3$ die Seitenkanten desselben sind, der Abstand des Schwerpunktes des schiefen Schnittes von der Basis (s. §. 109):

$$h = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3},$$

daher folgt das Volumen dieses Prismas:

$$V = Gh = G\frac{(h_1 + h_2 + h_3)}{3}.$$

## Drittes Capitel.

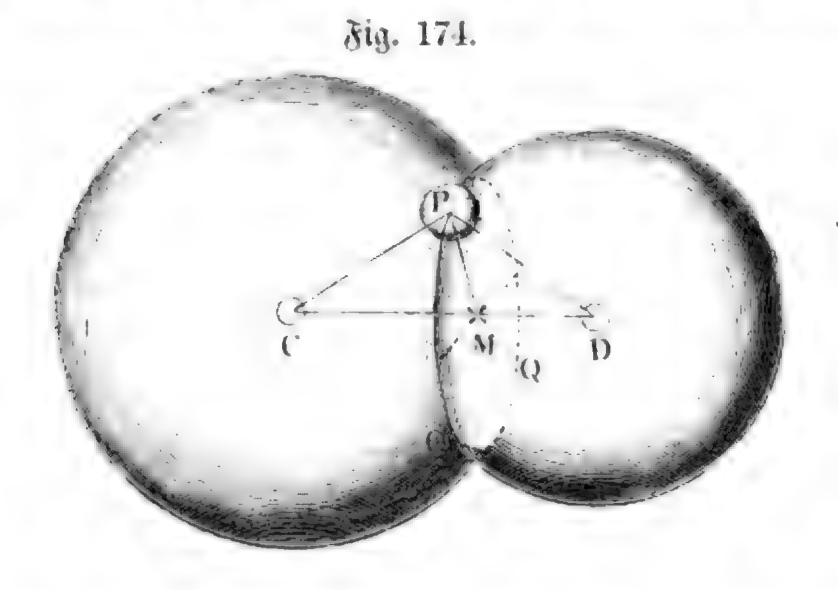
## Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper.

§. 129 **Befestigungsarten.** Die im ersten Capitel dieses Abschnittes entwickelten Regeln über das Gleichgewicht fester Kräftesysteme finden ihre Anwendung auch auf feste, von Kräften ergriffene Körper, wenn man das Gewicht des Körpers als eine im Schwerpunkte desselben angreifende und vertical abwärts wirkende Kraft behandelt.

Die durch Kräfte im Gleichgewichte erhaltenen Körper sind entweder frei beweglich, d. h. sie können der Einwirkung der Kräfte folgen, oder sie sind in einem oder mehreren Punkten festgehalten, oder sie werden von anderen Körpern unterstützt.

Wird ein Punkt $C$, Fig. 174, eines festen Körpers festgehalten, so kann

Fig. 174.




jeder andere Punkt $P$ eine Bewegung annehmen, deren Weg in die Oberfläche einer Kugel fällt, die sich aus dem festgehaltenen Punkte mit der Entfernung $CP$ des anderen Punktes, als Halbmesser, beschreiben läßt. Hält man hingegen einen Körper in zwei Punkten $C$ und $D$ fest, so sind bei jeder noch möglichen Bewegung die Wege von den übrigen Punkten Kreise, die sich als die Durchschnitte $OPQ$ von je zweien, aus den festgehaltenen Punkten beschriebenen Kugeloberflächen herausstellen. Diese Kreise sind unter sich parallel und winkelrecht auf der geraden Linie, welche die festen Punkte mit einander verbindet. Die Punkte der letzten Linie bleiben unbeweglich; es dreht sich also der Körper um diese Linie $CD$, die man deshalb auch Umdrehungsaxe des Körpers nennt. Die auf dieser Axe winkelrecht stehenden

Ebenen, in welchen die verschiedenen Punkte umlaufen, heißen die Umdrehungsebenen des Körpers.

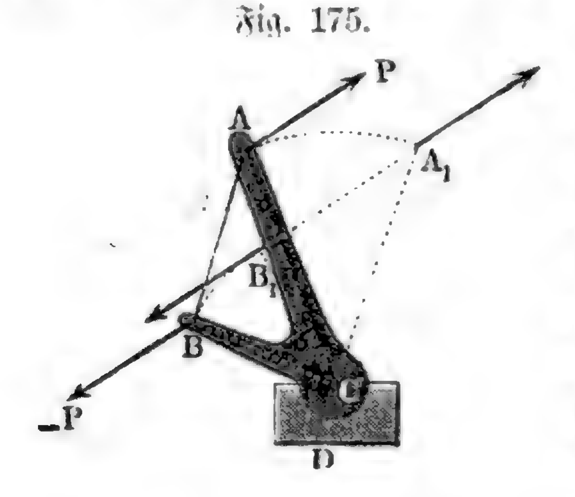
Man findet den Halbmesser $MP$ des Kreises $OPQ$, in welchem sich jeder Punkt bewegt, wenn man von demselben ein Perpendikel gegen die Umdrehungsaxe $CD$ fällt. Je größer dies ausfällt, desto größer ist also auch der Kreis, in welchem der Punkt um die Axe herumgeht.

Werden von einem Körper drei nicht in eine gerade Linie fallende Punkte festgehalten, so kann der Körper in keiner Beziehung eine Bewegung annehmen, weil sich die drei Kugeloberflächen, in welchen sich ein vierter Punkt bewegen müßte, nur in einem Punkte schneiden.

§. 130

**Gleichgewicht unterstützter Körper.** Jede Kraft, welche durch den festen Punkt eines Körpers, z. B. durch den Mittelpunkt eines Kugelgelenkes geht, wird von der Stütze des Körpers aufgenommen, und hat daher auf den Gleichgewichtszustand keinen Einfluß. Ebenso, wenn ein Körper in zwei Punkten oder Zapfen unterstützt ist, so wird jede Kraft, deren Richtung die Axe schneidet, welche sich durch diese festgehaltenen Punkte legen läßt, von den beiden Stützpunkten aufgenommen werden, ohne daß eine andere Wirkung auf den Körper übrig bleibt. Auch wird ein Kräftepaar von den Stützpunkten eines Körpers aufgenommen, wenn dessen Ebene die durch diese Punkte bestimmte Drehungsaxe enthält oder mit dieser Linie parallel läuft. Jedes andere Kräftepaar, z. B. $(P, -P)$ in Fig. 175, bringt dagegen eine Drehung des Körpers $ACB$ um die Drehungsaxe $C$ hervor, wenn es nicht durch ein anderes Kräftepaar (s. §. 95 und 97) im Gleichgewicht erhalten wird. Behält das Kräftepaar bei der Drehung seine Richtung bei, so ist der Hebelarm und folglich auch das Moment desselben veränderlich, und es fallen beide bei einer gewissen Stellung des Körpers sogar Null aus. Wenn bei dem Körper $ACB$, Fig. 175, welcher in einem Punkte $C$ festgehalten wird, die Kraftrichtung um den Winkel $BAP = \alpha$ von der Linie $AB$ durch beide Angriffspunkte $A$ und $B$ abweicht, so ist eine Drehung von $ACA_1 = \beta^0 = 180^0 - \alpha$ nöthig, um das Moment des Kräftepaares $(P, -P)$ zu annulliren; und ebenso ist es bei einem in der Axe festgehaltenen Körper, welcher von einem Kräftepaare ergriffen wird, dessen Ebene winkelrecht zur Axe steht.

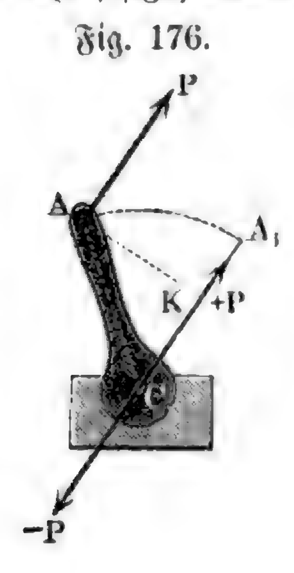
Fig. 175.




Wird ein in einem Punkte $C$ festgehaltener Körper $AB$, Fig. 176 (a. f. S.), von einer Kraft $P$ ergriffen, deren Richtung nicht durch $C$ geht, so kann man

durch Hinzufügung zweier Gegenkräfte, $+P$ und $-P$, diese Kraft in ein Kräftepaar ($P$, $-P$) und in eine in $C$ angreifende und vom Stützpunkte aufzunehmende Kraft $+P$ zerlegen. Ebenso ist es, wenn ein Körper in einer Axe festgehalten wird, und die Kraft in einer Umdrehungsebene wirkt.

Fig. 176.




Hier vertheilt sich aber der Druck $+P$ auf beide Stützpunkte. Ist $a$ die Entfernung $CA$ des Angriffspunktes $A$ der Kraft von der Axe $C$, und $\alpha$ der Winkel $ACA_1$, welchen die Linie $CA$ von der Kraftrichtung abweicht, so hat man das Moment des Kräftepaares ($P$, $-P$), welches den Körper um $C$ umzudrehen sucht: $M = Pa \sin. \alpha$. Bleibt während der Drehung die Richtung der Kraft $P$ unverändert, so ändert sich $M$ mit $\alpha$ und ist für $\alpha = 90^0$ ein Maximum ($Pa$), sowie für $\alpha = 0$ oder $180^0$, $=$ Null. Die mechanische Arbeit, welche bei Drehung des Körpers um $ACA_1 = \alpha$, die Kraft $P$, oder das Kräftepaar ($P$, $-P$) verrichtet, ist $A = P . \overline{KA_1} = Pa(1 - cos. \alpha)$.

§. 131 **Stabilität eines aufgehangenen Körpers.** Besteht die Kraft eines in einem Punkte oder einer Linie unterstützten Körpers nur im Gewichte desselben, so erfordert das Gleichgewicht dieses Körpers, daß sein Schwerpunkt unterstützt sei, d. i., daß die verticale Schwerlinie desselben durch den festen Punkt oder durch die feste Linie gehe.

Fällt der Schwerpunkt mit dem festgehaltenen oder sogenannten Aufhängepunkte zusammen, so hat man ein indifferentes Gleichgewicht (franz. équilibre indifférent; engl. indifferent equilibrium), weil der Körper im Gleichgewichte bleibt, man mag ihn um den festen Punkt drehen wie man will. Wird hingegen ein Körper $AB$, Fig. 177, in einem über

Fig. 177.

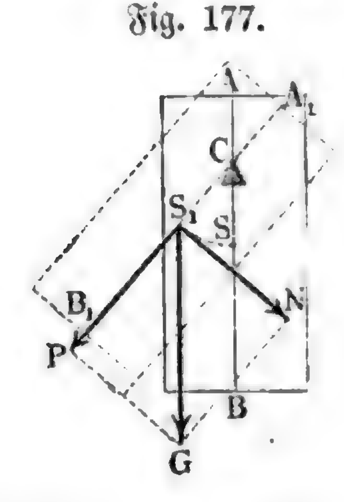
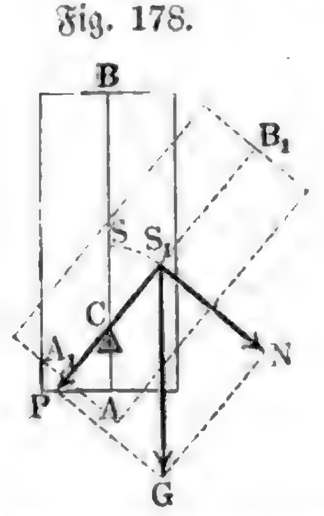



Fig. 178.




dem Schwerpunkte $S$ liegenden Punkte $C$ festgehalten oder unterstützt, so be-

findet sich der Körper in einem sicheren oder stabilen Gleichgewichte (franz. und engl. stable), weil, wenn man diesen Körper in eine andere Lage bringt, aus dem Gewichte $G$ desselben eine Seitenkraft $N$ hervorgeht, die den Körper in die erste Lage zurückführt, während die andere Seitenkraft $P$ der feste Punkt $C$ aufnimmt. Wird endlich der Körper $AB$, Fig. 178, in einem Punkte $C$ festgehalten, der unter dem Schwerpunkte $S$ liegt, so ist der Körper in einem unsicheren oder labilen Gleichgewichte (franz. éq. instable; engl. unstable eq.); denn wenn man den Schwerpunkt von der Verticalen durch $C$ entfernt, so geht aus dem Gewichte $G$ des Körpers eine Seitenkraft $N$ hervor, die den Körper in seine erste Lage nicht nur nicht zurückführt, sondern denselben davon noch mehr abzieht, und ihn so weit umdreht, bis der Schwerpunkt unter den festen Punkt zu liegen kommt.

Dieselben Beziehungen finden auch bei einem in zwei Punkten oder in einer Axe festgehaltenen Körper statt; derselbe ist im indifferenten, stabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem der Schwerpunkt in, vertical unter oder vertical über der festen Axe befindlich ist.

Wenn der Körper in einem Punkte, oder in einer horizontalen Axe unterstützt wird, so ist das Moment, mit welchem sich der Körper in der stabilen Gleichgewichtslage zurückzudrehen sucht, $M = Ga \sin. \alpha$, wobei $G$ das Gewicht, $a$ den Abstand $CS_1$ des Schwerpunktes $S_1$ von der Axe $C$, und $\alpha$ den Drehungswinkel $SCS_1$ bezeichnet. Die mechanische Arbeit, welche hierbei das Gewicht $G$ verrichtet, ist $A = Ga(1 - \cos. \alpha)$.

**Druck auf die Stützpunkte eines Körpers.** Wenn ein in zwei Punkten $C$ und $D$ oder einer Axe $CD$ festgehaltener Körper $CAD$, §. 132

Fig. 179.

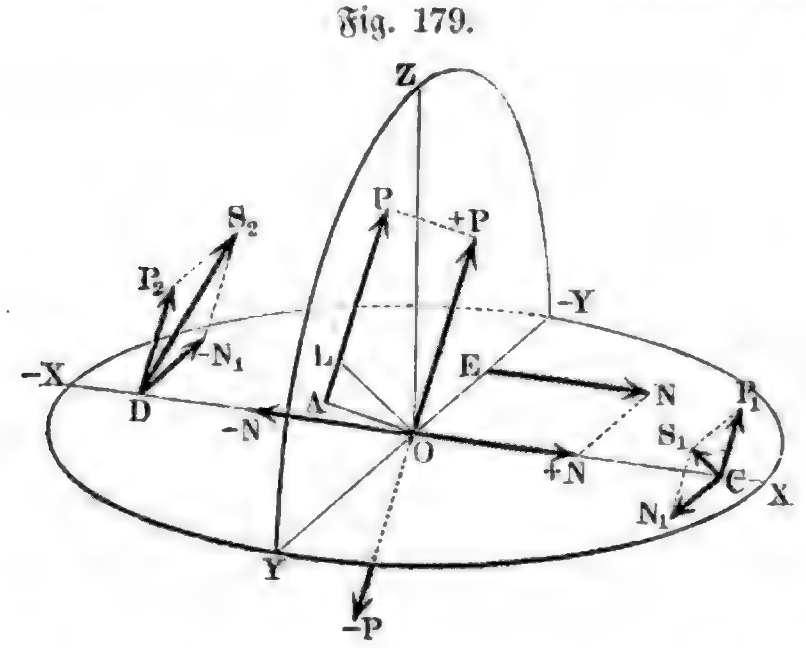


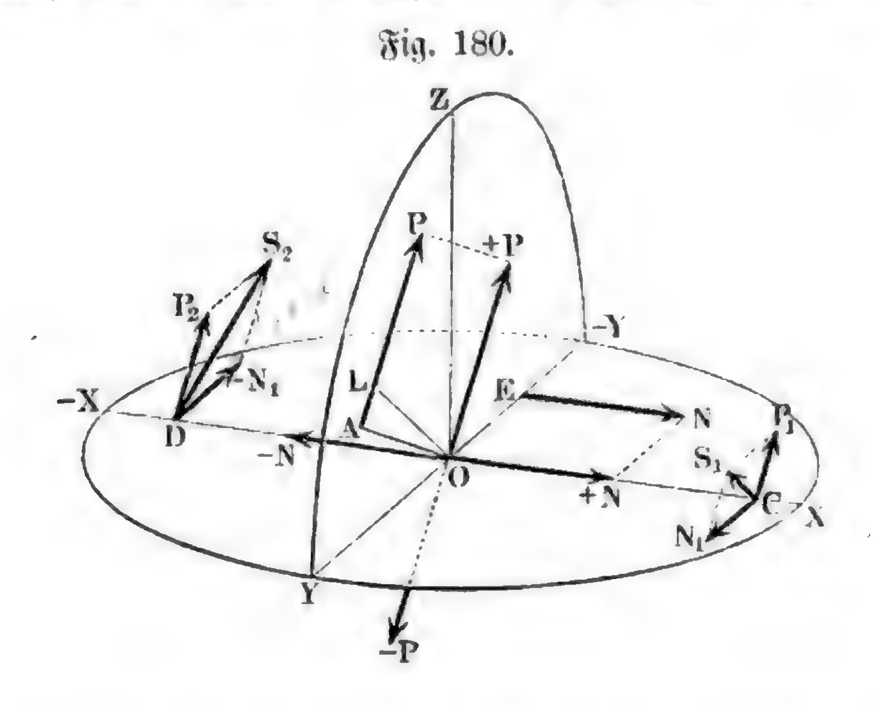

Fig. 179, von einem Kräftesysteme ergriffen wird, so führt man, um die Bedingungen seines Gleichgewichts zu ermitteln, nach §. 97, das ganze

System auf zwei Kräfte zurück, und zwar auf eine Kraft parallel zur Axe und auf eine Kraft, deren Richtung in einer Normalebene zu dieser Linie liegt. Es sei $\overline{EN} = N$, Fig. 180, die erstere, mit der durch die festen Punkte $C$ und $D$ gehenden Axe $X\overline{X}$ parallel wirkende Kraft, und $\overline{AP} = P$ die zweite Kraft, welche in einer auf $X\overline{X}$ normalstehenden Ebene $YZ\overline{Y}$ wirkt. Aus der ersteren resultirt eine Kraft $+N$, welche die Axe $CD$ in ihrer eigenen Richtung fortzuschieben sucht, und ein Kräftepaar $(N, -N)$, welches sich als ein anderes Kräftepaar $(N_1, -N_1)$ auf die festen Punkte $C$ und $D$ fortpflanzt, dessen Componenten

$$N_1 = \frac{d}{l} N \text{ und } -N_1 = -\frac{d}{l} N$$

sind, wenn $d$ den Abstand $OE$ der Parallelkraft $N$ von der Axe $CD$ und $l$ die Entfernung $CD$ der beiden Stützpunkte $C$ und $D$ von einander bezeichnen.

Fig. 180.




Ebenso zerlege man die Kraft $P$ in eine Kraft $+P$ und in ein Kräftepaar $(P, -P)$, und die erstere wieder in die Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$, wovon die eine in $C$ und die andere in $D$ angreift. Bezeichnen wir wieder die Abstände $CO$ und $DO$ des Angriffspunktes $O$ von den beiden Stützpunkten $C$ und $D$ durch $l_1$ und $l_2$, so haben wir:

$$P_1 = \frac{l_2}{l} P \text{ und } P_2 = \frac{l_1}{l} P,$$

und es läßt sich nun leicht aus $N_1$ und $P_1$ der Mitteldruck $S_1$ in $C$, sowie aus $-N_1$ und $P_2$ der Mitteldruck $S_2$ in $D$ durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes bestimmen.

Setzen wir den Winkel $YO(+P)$, unter welchem die Ebene $NOX$ von der Richtung der Kraft $P$ oder $+P$ geschnitten wird, $= \alpha$, so ist auch

der Winkel $N_1 C P_1 = \alpha$, dagegen $\overline{N_1} D P_2 = 180^0 - \alpha$, und es ergeben sich daher die resultirenden Drücke in $C$ und $D$:

$$S_1 = \sqrt{N_1^2 + P_1^2 + 2 N_1 P_1 \cos. \alpha} \text{ und}$$
$$S_2 = \sqrt{N_1^2 + P_2^2 - 2 N_1 P_2 \cos. \alpha}.$$

Bezeichnet endlich $a$ das Loth $OL$ auf die Richtung der Kraft $P$, so ist das Moment des Umdrehungskräftepaares $(P, -P)$, $M = Pa$.

Im Gleichgewichtszustande muß natürlich $a =$ Null sein, und daher $P$ durch die Axe $CD$ hindurchgehen.

Beispiel. Es sei das ganze Kräftesystem eines in der Axe $X\overline{X}$ festgehaltenen Körpers auf die Normalkraft $P = 36$ Pfund und auf die Parallelkraft $N = 20$ Pfund zurückgeführt; es sei der Abstand der letzteren Kraft von der Axe, $OE = d = 1\frac{1}{2}$ Fuß, und der Abstand $CD$ zwischen den festgehaltenen Punkten, $l = 4$ Fuß; man sucht die von der Axe oder von den festen Punkten $C$ und $D$ aufzunehmenden Kräfte, vorausgesetzt, daß die Richtung der Kraft $P$ um den Winkel $\alpha = 65$ Grad von der Grundebene $XY$ abweiche und ihr Angriffspunkt $O$ um $CO = l_1 = 1$ Fuß von dem festen Punkte $C$ abstehe.

Die Kraft $N = 20$ Pfund ertheilt der Axe in ihrer eigenen Richtung den Schub $N = 20$ Pfund, außerdem erzeugt sie noch die Kräfte:

$$N_1 = \frac{d}{l} N = \frac{1,5}{4} \cdot 20 = 7,5 \text{ Pfund und } -N_1 = -7,5 \text{ Pfund},$$

welche die festen Punkte $C$ und $D$ aufnehmen. Aus der Kraft $P$ entspringen die Kräfte:

$$P_1 = \frac{l_2}{l} P = \frac{4-1}{4} \cdot 36 = 27 \text{ Pfund und } P_2 = \frac{l_1}{l} P = \frac{1}{4} \cdot 36 = 9 \text{ Pfund},$$

aus welchen endlich durch Vereinigung mit den ersteren Kräften die Mittelkräfte:

$$S_1 = \sqrt{7,5^2 + 27^2 + 2 \,.\, 7,5 \,.\, 27 \,.\, \cos. 65^0} = \sqrt{56,25 + 729 + 171,160}$$
$$= \sqrt{956,410} = 30,926 \text{ Pfund, und}$$
$$S_2 = \sqrt{7,5^2 + 9^2 - 2 \,.\, 7,5 \,.\, 9 \,.\, \cos. 65^0} = \sqrt{56,25 + 81 - 57,054}$$
$$= \sqrt{80,196} = 8,955 \text{ Pfund}$$

entspringen.

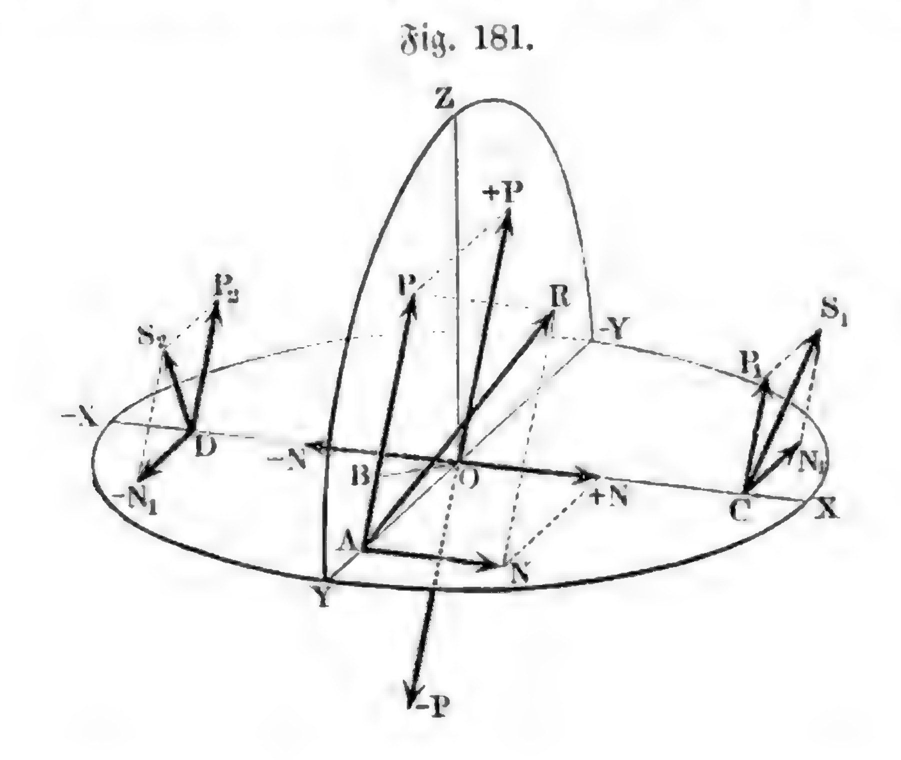
§. 133 Wird ein in zwei Punkten $C$ und $D$ festgehaltener Körper $CBD$, Fig. 181 (a. f. S.), nur von einer Kraft $R$ ergriffen, deren Richtung um den Winkel $PAR = \beta$ von der Umdrehungsebene $YOZ$ abweicht, so zerlege man dieselbe in die Seitenkräfte:

$$\overline{AP} = P = R \cos. \beta \text{ und}$$
$$\overline{AN} = N = R \sin. \beta,$$

wovon die erstere in der Umdrehungsebene und die zweite parallel zur Axe wirkt, und behandele diese genau so wie die resultirenden Kräfte $P$ und $N$ eines ganzen Systemes im vorigen Paragraphen. Es ist hiernach die Kraft,

welche die Axe in ihrer Richtung aufzunehmen hat, und weshalb das eine Axenlager ein besonderes Widerlager erhalten muß: $N = R \sin. \beta$, sowie

Fig. 181.




jeder der Componenten des Kräftepaares ($N_1$, $-N_1$), welches in $C$ und $D$ nach entgegengesetzten Richtungen winkelrecht gegen $CD$ wirkt,

$$N_1 = \frac{d}{l} N = \frac{d}{l} R \sin. \beta \text{ und } -N_1 = -\frac{d}{l} R \sin. \beta,$$

wofern wieder $l$ die Entfernung $CD$ der beiden Stützpunkte $C$ und $D$ von einander, so wie $d$ den Abstand $OA$ des Angriffspunktes $A$ der Kraft $R$ vom Axpunkt $O$ bezeichnet.

Ebenso ist die Kraft, welche in $O$ winkelrecht auf $CD$ wirkt:

$+ P = R \cos. \beta$, so wie der Component derselben in $C$:

$P_1 = \frac{l_2}{l} P = \frac{l_2}{l} R \cos. \beta$ und der in $D$:

$$P_2 = \frac{l_1}{l} P = \frac{l_1}{l} R \cos. \beta,$$

wenn wieder $l_1$ und $l_2$ die Abstände $CO$ und $DO$ der Punkte $C$ und $D$ von der Umdrehungsebene $YZ\overline{Y}$ bezeichnen.

Führt man diese Werthe von $N_1$, $P_1$ und $P_2$ in die Formeln:

$$S_1 = \sqrt{N_1^2 + P_1^2 + 2 N_1 P_1 \cos. \alpha} \text{ und}$$

$$S_2 = \sqrt{N_1^2 + P_2^2 - 2 N_1 P_2 \cos. \alpha}$$

für die Normaldrücke in $C$ und $D$ ein, wobei man wieder mit $\alpha$ den Winkel $YAP$ bezeichnet, um welchen die Richtung der Seitenkraft $P$ von der Ebene $ACD$ abweicht, so erhält man:

$$S_1 = \frac{R}{l}\sqrt{(d\sin.\beta)^2 + (l_2\cos.\beta)^2 + 2dl_2\sin.\beta\cos.\beta\cos.\alpha} \text{ und}$$

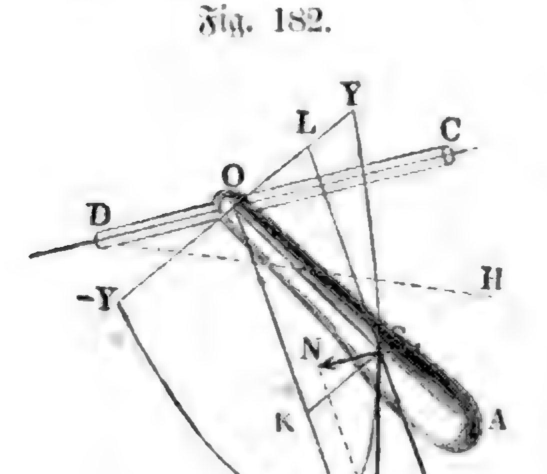
$$S_2 = \frac{R}{l}\sqrt{(d\sin.\beta)^2 + (l_1\cos.\beta)^2 - 2dl_1\sin.\beta\cos.\beta\cos.\alpha}.$$

Das noch freibleibende Umdrehungskräftepaar $(P, -P)$ hat das Moment

$$P\,.\,\overline{OB} = Pa = Rd\sin.\alpha\cos.\beta.$$

Diese Formeln finden ihre Anwendung auf die Stabilität eines um eine geneigte Axe $CD$ drehbaren Körpers $OA$, Fig. 182. Es ist hier $R$ das Gewicht $G$ des Körpers, $d$ der Abstand $OS = OS_1$ seines Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe, $\alpha$ der Elongationswinkel $SOS_1 = OS_1L$, um welchen der Schwerpunkt $S_1$ von seiner Gleichgewichtslage $S$ durch Drehung in der auf $CD$ rechtwinkelig stehenden Ebene $YS\overline{Y}$ verrückt ist, und $\beta$ der Winkel $GS_1P$, welchen die Umdrehungsebene $YS\overline{Y}$ mit der Verticalen, folglich auch die Drehungsaxe $CD$ mit der Horizontalen $DH$ einschließt.

Fig. 182.




Die mechanische Arbeit, mit welcher der Körper durch sein Gewicht in die Gleichgewichtslage und $S_1$ nach $S$ zurückgeführt wird, ist

$$A = G\,.\,\overline{KS}\cos.\beta = Gd\cos.\beta\,(1 - \cos.\alpha).$$

**Gleichgewicht von Kräften um eine Axe.** Die Mittelkraft $P$ resultirt aus allen denjenigen Seitenkräften, deren Richtungen in einer oder mehreren Normalebenen zur Axe liegen. Nun ist aber in diesem Falle, nach §. 89, das statische Moment $Pa$ der Mittelkraft gleich der Summe $P_1a_1 + P_2a_2 + \cdots$ der statischen Momente der Seitenkräfte, und für den Gleichgewichtszustand des festgehaltenen Körpers, der Hebelarm $a$ der Mittelkraft $=$ Null, weil diese durch die Axe selbst geht; es ist daher auch die Summe §. 134

$$P_1a_1 + P_2a_2 + \cdots = 0,$$

d. h. ein in einer Axe festgehaltener Körper ist im Zustande des Gleichgewichtes, bleibt also ohne Umdrehung, wenn die Summe der statischen Momente seiner Kräfte hinsichtlich dieser Axe $=$ Null, oder die Summe der Momente der nach der einen Umdrehungsrichtung wirkenden Kräfte eben so groß ist als die

Summe der Momente von den nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräften.

Mit Hülfe der letzten Formel läßt sich ein Element des im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystemes, entweder eine Kraft, oder ein Hebelarm finden, so wie eine Umdrehungskraft von einem Hebelarme auf einen andern reduciren.

Kommt es darauf an, einen um eine feste Axe drehbaren Körper, dessen Umdrehungsmoment $Pa$ ist, ins Gleichgewicht zu setzen, so hat man nur noch nöthig, entweder eine Umdrehungskraft $Q$, oder ein Umdrehungskräftepaar mit dem Moment $Qb = Pa$ hinzuzufügen, wobei nur der Unterschied statthat, daß durch Hinzufügung eines Kräftepaares ($Q$, $-Q$) der Axendruck nicht verändert wird, dagegen durch Anschließen einer Kraft $Q$ zum Axendruck noch die Kraft $+Q$ hinzutritt.

Je nachdem man die Kraft $Q$ oder den Hebelarm $b$ derselben giebt, läßt sich $b = \frac{Pa}{Q}$, oder $Q = \frac{Pa}{b}$ berechnen.

Man nennt im letzteren Falle $Q$ die vom Hebelarm $a$ auf den Hebelarm $b$ reducirte Kraft $P$, und kann hiernach die gegebene Umdrehungskraft $P$ auf jeden beliebigen Hebelarm reduciren, also auch durch eine andere, an jedem beliebigen Hebelarm wirkende Kraft ersetzen, oder ins Gleichgewicht bringen.

Auch kann man durch die Formel $Q = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{b}$ ein ganzes System von Umdrehungskräften auf einen und denselben Hebelarm reduciren.

Beispiel. An einem um eine Axe drehbaren Körper wirken die Umdrehungskräfte $P_1 = 50$ Pfund und $P_2 = -35$ Pfund an den Armen $a_1 = 1\frac{1}{4}$ Fuß und $a_2 = 2\frac{1}{2}$ Fuß; man sucht die Kraft $P_3$, welche an einem Hebelarme $a_3 = 4$ Fuß wirken soll, um Gleichgewicht herzustellen, oder eine Umdrehung um die Axe zu verhindern. Es ist:

$$50 . 1,25 - 35 . 2,5 + 4\,P_3 = 0, \text{ daher:}$$

$$P_3 = \frac{87,5 - 62,5}{4} = 6,25 \text{ Pfund.}$$

§. 135 **Hebel.** Ein um eine feste Axe drehbarer und von Kräften ergriffener Körper hat den Namen Hebel (franz. levier; engl. lever) erhalten. Denkt man sich denselben gewichtslos, so heißt er ein mathematischer Hebel, außerdem aber ein materieller oder physischer.

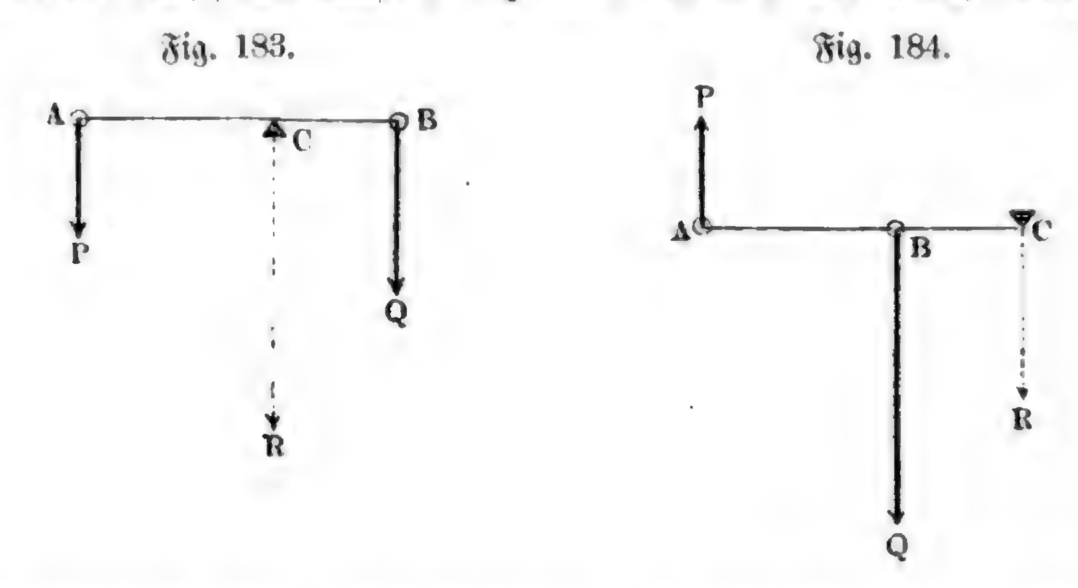
In der Regel nimmt man an, daß die Kräfte eines Hebels in einer winkelrecht zur Axe stehenden Ebene wirken, und ersetzt die Axe durch einen festen Punkt, den man den Ruhe-, Dreh- oder Stützpunkt (franz. point d'appui; engl. fulcrum, hypomochlion) nennt. Die von diesem Punkte nach den Richtungen der Kräfte gefällten Perpendikel heißen (§. 89) Hebelarme. Sind die Richtungen der Kräfte eines Hebels unter sich parallel, so

bilden die Hebelarme eine einzige gerade Linie, und der Hebel heißt dann ein geradliniger oder gerader Hebel (franz. levier droit; engl. straight lever); stoßen aber die Hebelarme unter Winkeln zusammen, so heißt der Hebel ein Winkelhebel (franz. levier courbé; engl. bent lever). Der geradlinige von nur zwei Kräften ergriffene Hebel ist entweder einarmig oder doppelarmig, je nachdem die Angriffspunkte auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Stützpunktes liegen. Man unterscheidet auch wohl Hebel der ersten, zweiten und dritten Art von einander, indem man den doppelarmigen Hebel, Hebel der ersten Art, den einarmigen Hebel aber entweder Hebel der zweiten oder Hebel der dritten Art nennt, je nachdem die vertical abwärts wirkende Kraft (Last), oder die vertical aufwärts wirkende Kraft (Kraft) dem Stützpunkte näher liegt.

§. 136 Die Theorie des Gleichgewichtes am Hebel ist im Vorhergehenden vollständig begründet, wir haben daher nur noch eine Specialisirung derselben nöthig.

Bei dem doppelarmigen Hebel $ACB$, Fig. 183, ist, wenn man den Hebelarm $CA$ der Kraft $P$ durch $a$ und den Hebelarm $CB$ der anderen Kraft $Q$, die man gewöhnlich Last nennt, mit $b$ bezeichnet, nach der allgemeinen Theorie: $Pa = Qb$, d. i. Moment der Kraft gleich Moment der Last, oder auch: $P : Q = b : a$, d. i. die Kraft verhält

Fig. 183. Fig. 184.

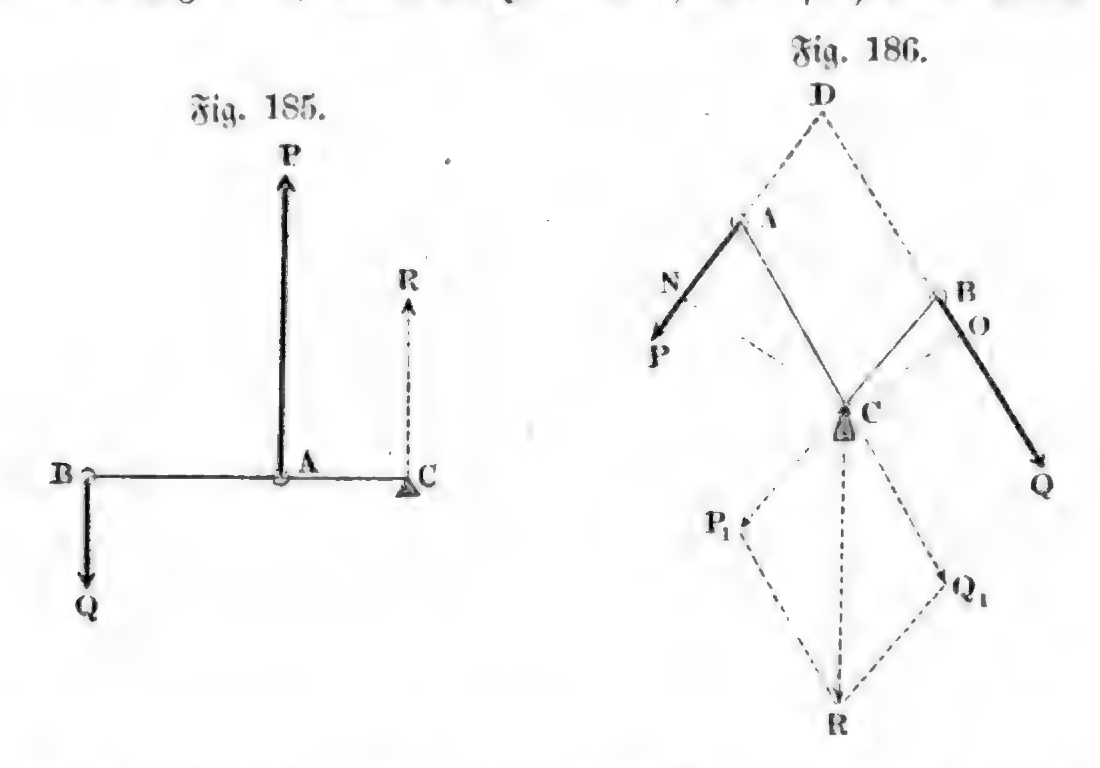



sich zur Last, wie der Hebelarm der letzteren zu dem Hebelarme der ersteren. Der Druck im Stützpunkte ist $R = P + Q$.

Bei den einarmigen Hebeln $ABC$, Fig. 184, und $BAC$, Fig. 185 (a. f. S.), findet dieselbe Beziehung zwischen Kraft ($P$) und Last ($Q$) statt, es ist hier aber die Kraft der Last entgegengesetzt gerichtet, und deshalb der Druck im Stützpunkte gleich der Differenz beider, und zwar im ersten Falle:

$R = Q - P$, und im zweiten Falle: $R = P - Q$.

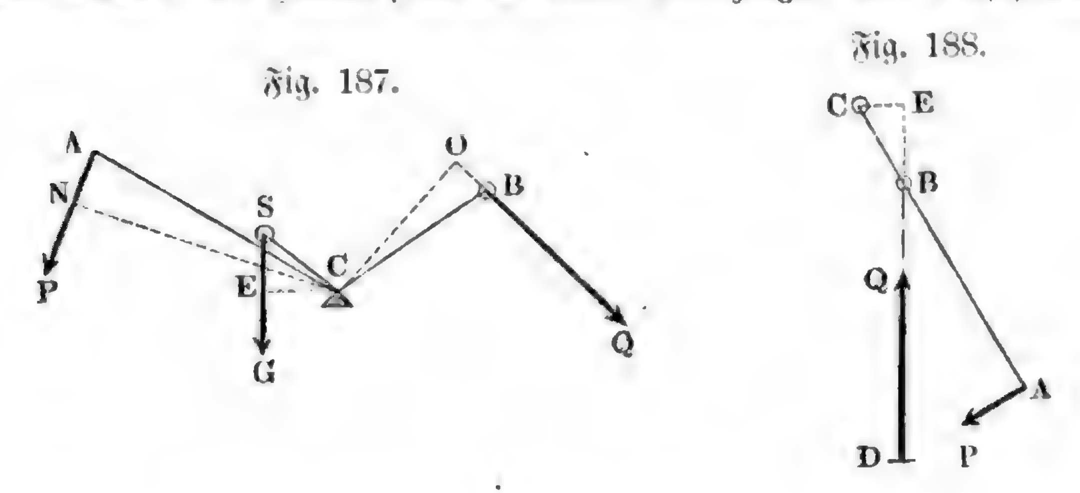
Auch beim Winkelhebel $ACB$ mit den Hebelarmen $CN = a$ und $CO = b$, Fig. 186, bleibt $P : Q = b : a$, nur ist hier der Druck im




Stützpunkte gleich der Diagonale $R$ desjenigen Parallelogrammes $CP_1 R Q_1$, welches sich aus der Kraft $P$ und Last $Q$ und dem Winkel $P_1 C Q_1 = PDQ = \alpha$, unter welchem die Richtungen derselben zusammenstoßen, construiren läßt.

Ist $G$ das Gewicht des Hebels und $CE = e$, Fig. 187, der Abstand des Drehpunktes $C$ von der Verticallinie $SG$ durch den Schwerpunkt desselben, so hat man $Pa \pm Ge = Qb$ zu setzen und das Pluszeichen von $G$ zu nehmen, wenn der Schwerpunkt auf der Seite der Kraft $P$ liegt, das Minuszeichen aber, wenn er auf der Seite der Last $Q$ sich befindet.

Die Theorie des Hebels findet bei vielen Werkzeugen und Maschinen ihre




Anwendung. Der **Kniehebel** $ABCD$, Fig. 188, welcher zuweilen als ein besonderer Hebel aufgeführt wird, ist ein bloßer Winkelhebel. Der um die Axe $C$ drehbare Arm wird an seinem Ende $A$ von einer Kraft $P$ ergriffen und wirkt mittels einer Stange $BD$ auf die in $D$ angreifende Last $Q$,

welche den Arm unter einem spitzen Winkel $ABD = CBE = \alpha$ schneidet. Bezeichnet $a$ die Armlänge $CA$ und $b$ die Armlänge $CB$, so hat man den Hebelarm von $Q$:

$\overline{CE} = b\, sin.\, \alpha$, daher:

$Pa = Qb\, sin.\, \alpha$, oder:

$P = \frac{b}{a} Q\, sin.\, \alpha$, und umgekehrt:

$$Q = \frac{a}{b} \frac{P}{sin.\, \alpha}.$$

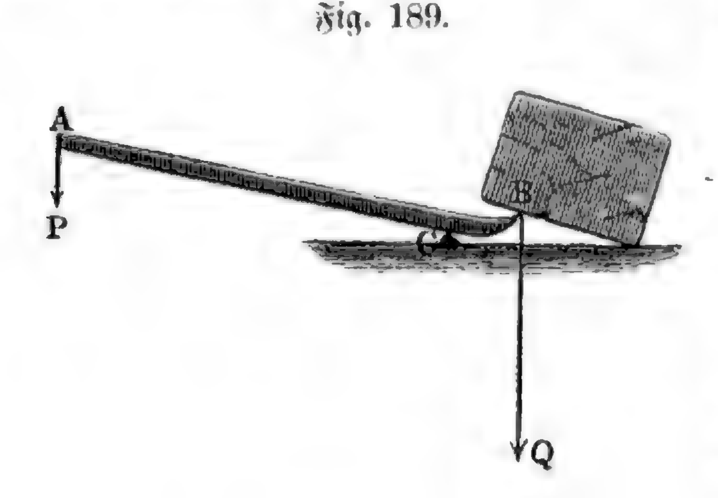
Man wendet diesen Hebel oft zum Zusammenpressen von Stoffen an. Die Preßkraft $Q$ wächst hiernach direct wie $P$ und $\frac{a}{b}$, dagegen umgekehrt wie $sin.\, \alpha$. Durch Verkleinern des Winkels $\alpha$ läßt sich also diese Kraft $Q$ beliebig vergrößern.

Beispiele. 1) Wenn man das Ende $A$ einer Brechstange $ACB$, Fig. 189, mit einer Kraft $P$ von 60 Pfund niederdrückt, und es ist der Hebelarm $CA$ der Kraft 12mal so groß als der Hebelarm $CB$ der Last, so wird diese, oder vielmehr die in $B$ ausgeübte Kraft $Q$, 12mal so groß als $P$ sein, also

$Q = 12 . 60 = 720$ Pfund

betragen.

Fig. 189.

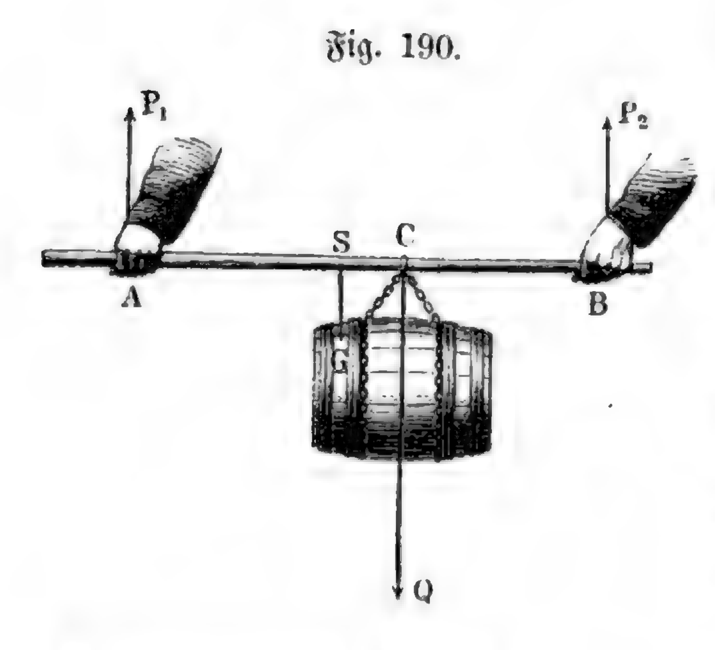



2) Wird eine an einer Stange hängende Last $Q$, Fig. 190, von zwei Arbeitern fortgetragen, von denen der eine in $A$ und der andere in $B$ angreift, so kann man ermitteln, wie viel Druck jeder der beiden Arbeiter auszuhalten hat. Es sei die Last $Q = 120$ Pfund, das Gewicht der Stange, $G = 12$ Pfund, die Entfernung $AB$ der beiden Angriffspunkte von einander, $= 6$ Fuß, die Entfernung der Last von einem dieser Punkte $B$, $BC = 2\frac{1}{2}$ Fuß, und die Entfernung des Schwerpunktes $S$ der Stange von eben demselben:

$BS = 3\frac{1}{2}$ Fuß.

Sehen wir $B$ als Stützpunkt an, so hat die Kraft $P_1$ in $A$ den Lasten $Q$ und $G$ das Gleichgewicht zu halten; es ist also:

Fig. 190.



$$P_1 . \overline{BA} = Q . \overline{BC} + G . \overline{BS}, \text{ d. i.:}$$

$$6 P_1 = 2{,}5 . 120 + 3{,}5 . 12 = 300 + 42 = 342, \text{ daher:}$$

$$P_1 = \frac{342}{6} = 57 \text{ Pfund.}$$

Wird hingegen $A$ als Stützpunkt angesehen, so ist zu setzen:

$$P_2 . \overline{AB} = Q . \overline{AC} + G . \overline{AS},$$

also in Zahlen:

$$6 P_2 = 3{,}5 . 120 + 2{,}5 . 12 = 420 + 30 = 450,$$

daher ist die Kraft des zweiten Arbeiters:

$$P_2 = \frac{450}{6} = 75 \text{ Pfund;}$$

auch ist, sehr richtig, die Summe der nach oben wirkenden Kräfte

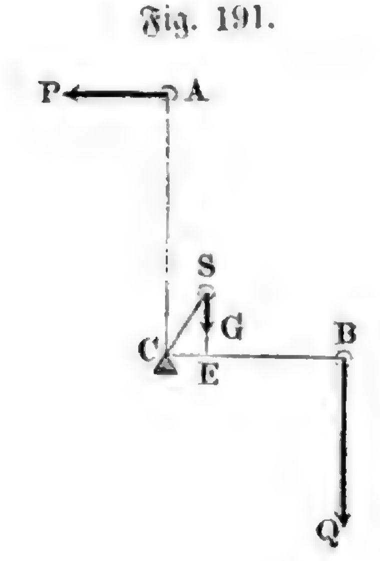
$$P_1 + P_2 = 57 + 75 = 132 \text{ Pfund}$$

so groß wie die Summe der nach unten wirkenden Kräfte

$$Q + G = 120 + 12 = 132 \text{ Pfund.}$$

3) Bei einem 150 Pfund schweren Winkelhebel $ACB$, Fig. 191, ist die vertical ziehende Last $Q = 650$ Pfund und ihr Hebelarm $CB = 4$ Fuß, dagegen der Hebelarm der Kraft $P$, $CA = 6$ Fuß und der Hebelarm des Gewichtes, $CE = 1$ Fuß. Wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft $P$ und der Druck $R$ im Zapfen? Es ist:

Fig. 191.




$$\overline{CA} . P = \overline{CB} . Q + \overline{CE} . G, \text{ d. i.:}$$

$$6 P = 4 . 650 + 1 . 150 = 2750,$$

folglich ist die Kraft:

$$P = \frac{2750}{6} = 458\tfrac{1}{3} \text{ Pfund;}$$

der Zapfendruck aber besteht aus der Verticalkraft $Q + G = 650 + 150 = 800$ Pfund und der Horizontalgewalt $P = 458\frac{1}{3}$ Pfund, ist also:

$$R = \sqrt{(Q + G)^2 + P^2}$$

$$= \sqrt{(800)^2 + (458\tfrac{1}{3})^2}$$

$$= \sqrt{850070} = 922 \text{ Pfund.}$$

§. 137 Es können an einem Hebel auch mehr als zwei Kräfte $P$ und $Q$ wirken; auch ist es nicht nöthig, daß die Kräfte eines Hebels in einer und derselben Umdrehungsebene wirken. Sind $Q_1, Q_2, Q_3$ die Lasten eines Hebels $ACB$, Fig. 192, so wie $b_1, b_2, b_3$ die Hebelarme $CB_1, CB_2, CB_3$ derselben, während die Kraft $P$ am Hebelarme $\overline{CA} = a$ wirkt, so hat man

$$Pa = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + Q_3 b_3,$$

und wenn der Hebel ein geradliniger ist, den Druck im Stützpunkte:

$$R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Wirken die Kräfte eines Hebels in verschiedenen Umdrehungsebenen des Hebels $ACDB_1B_2$, Fig. 193, so ändert sich deshalb die Momentenformel

$P a = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + \cdots$ nicht, nur findet hier eine besondere Vertheilung des gesammten Axendrucks $R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3$ auf die beiden

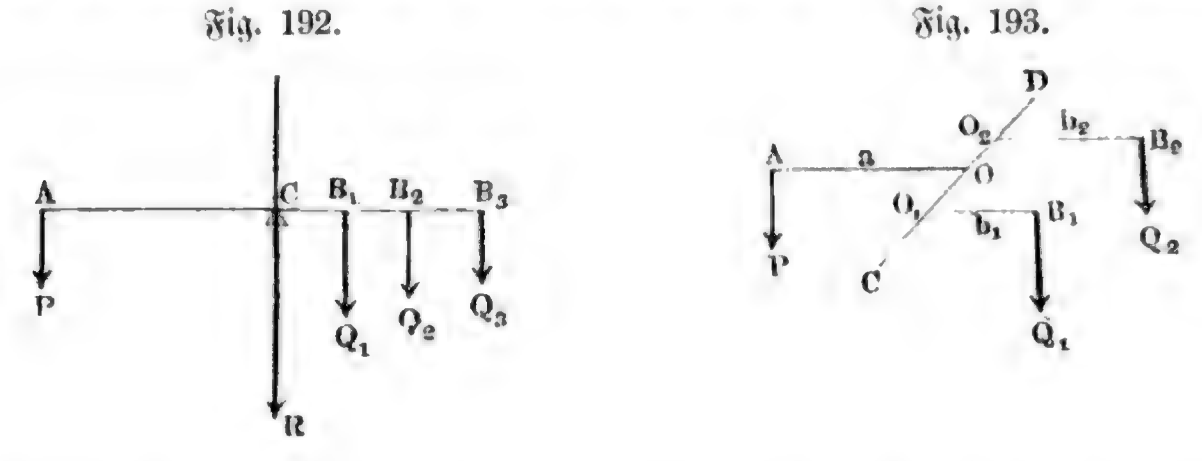



Fig. 192. Fig. 193.

Stützpunkte oder sogenannten Zapfenlager $C$ und $D$ statt. Bezeichnet wieder $l$ die Länge der Hebelaxe $CD$ oder die Entfernung ihrer Stützpunkte von einander, und sind $l_0, l_1, l_2 \cdots$ die Abstände $CO, CO_1, CO_2 \cdots$ der Umdrehungsebenen der Kräfte vom Stützpunkt $C$, so hat man für die Zapfendrücke $R_2$ und $R_1$ in $D$ und $C$ folgende Formeln:

$$R_2 = \frac{P l_0 + Q_1 l_1 + Q_2 l_2 + \cdots}{l}, \text{ und}$$

$$R_1 = R - R_2 = \frac{P(l - l_0) + Q_1 (l - l_1) + Q_2 (l - l_2)}{l}.$$

Bei einem Winkelhebel, wo die Kräfte nicht parallel wirken, bleibt zwar der Ausdruck $P a = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + \cdots$ unverändert, nur wirken dann die auf die Stützpunkte reducirten Axendrücke, wie z. B. $\frac{P l_0}{l}, \frac{Q l_1}{l}, \frac{Q_2 l_2}{2} \cdots$, in verschiedenen Richtungen und lassen sich daher nicht mehr durch Addition vereinigen, sondern müssen wie die in einem und demselben Punkte angreifenden und in einer Ebene wirkenden Kräfte vereinigt werden (s. §. 79 und §. 80).

Beispiel. Wenn der Hebel in Fig. 193 in den Abständen $C O_1 = l_1 = 12$ Zoll und $C O_2 = l_2 = 24$ Zoll vom Zapfen $C$ die an den Hebelarmen $O_1 B_1 = b_1 = 16$ Zoll und $O_2 B_2 = b_2 = 10$ Zoll wirkenden Lasten $Q_1 = 300$ Pfund und $Q_2 = 480$ Pfund trägt, wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichts nöthige und an dem Hebelarm $OA = a = 60$ Zoll wirkende Kraft $P$, und wie groß sind die Zapfendrücke in $C$ und $D$, vorausgesetzt, daß die Kraft im Abstande $CO = l_0 = 18$ Zoll vom Zapfen $C$ wirkt, und die ganze Axenlänge $CD = l = 32$ Zoll mißt?

Es ist die Größe der erforderlichen Kraft:

$$P = \frac{Q_1 b_1 + Q_2 b_2}{a} = \frac{300.16 + 480.10}{60} = \frac{30.16 + 480}{6} = 80 + 80 = 160 \text{ Pfund},$$

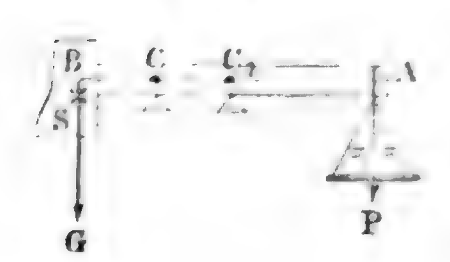
und es sind die Zapfendrücke

$$R_2 = \frac{160 \cdot 18 + 300 \cdot 12 + 480 \cdot 24}{32} = 562{,}5 \text{ Pfund, und}$$

$$R_1 = R - R_2 = 300 + 480 + 160 - 562{,}5 = 377{,}5 \text{ Pfund.}$$

**Anmerkung.** Die Wirkung der Schwere am Hebel läßt sich mit Vortheil auch anwenden, um den Schwerpunkt $S$ und das Gewicht $G$ eines Körpers $AB$, Fig. 194, zu ermitteln. Man unterstütze den Körper erst in einem Punkte $C$ und dann in einem Punkte $C_1$, welcher um $CC_1 = d$ vom ersten absteht, und bringe den Körper beide Mal durch eine in den Abständen $CA = a$ und $C_1A = a_1 = a - d$ wirkende Kraft ins Gleichgewicht. Ist nun der Werth dieser Kraft das erste Mal $= P$ und das zweite Mal $= P_1$, ferner das Gewicht des Körpers, $= G$ und der Abstand seines Schwerpunktes $S$ von $A$, $AB = x$, so hat man:

Fig. 194.



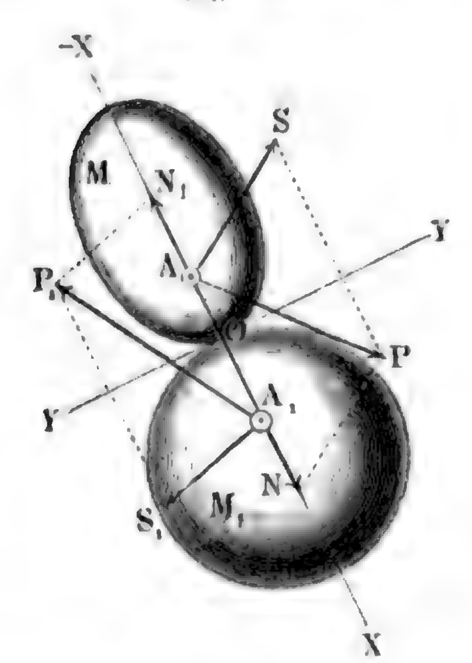

$Pa = G(x - a)$ und $P_1 a_1 = G(x - a_1)$, woraus

$$x = \frac{(P - P_1)\, a\, a_1}{P a - P_1 a_1}, \text{ sowie}$$

$$G = \frac{P a - P_1 a_1}{a_1 - a} \text{ folgt.}$$

**§. 138 Druck der Körper auf einander.** Das in §. 65 ausgesprochene Erfahrungsgesetz: „Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich," ist die Basis der ganzen Maschinenmechanik. Es ist an diesem Orte nöthig, die Bedeutung desselben noch näher auseinanderzusetzen. Wirken zwei Körper $M$ und $M_1$, Fig. 195, mit den Kräften $P$ und $P_1$ auf einander, deren Richtungen von der gemeinschaftlichen Normale $X\overline{X}$ zu den in Berührung befindlichen Oberflächentheilen beider Körper abweichen, so tritt stets eine Zerlegung der Kräfte ein; es geht nur diejenige Seitenkraft $N$ oder $N_1$ von einem Körper auf den anderen über, welche die Richtung der Normale hat, die andere Seitenkraft $S$ oder $S_1$ hingegen bleibt im Körper zurück und muß durch eine andere Kraft oder ein anderes Hinderniß aufgenommen werden, um die Körper im Gleichgewichte zu erhalten. Zwischen den normalen Seitenkräften $N$ und $N_1$ aber findet, dem angeführten Principe zufolge, vollkommene Gleichheit statt.

Fig. 195.



Weicht die Richtung der Kraft $P$ um den Winkel $NAP = \alpha$ von der Normale $AX$ und um den Winkel $SAP = \beta$ von der Richtung der zweiten Seitenkraft $S$ ab, so hat man (s. §. 78):

$$N = \frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}, \quad S = \frac{P \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}.$$

Bezeichnet man ebenso $N_1 A_1 P_1$ durch $\alpha_1$ und $S_1 A_1 P_1$ durch $\beta_1$, so hat man auch:

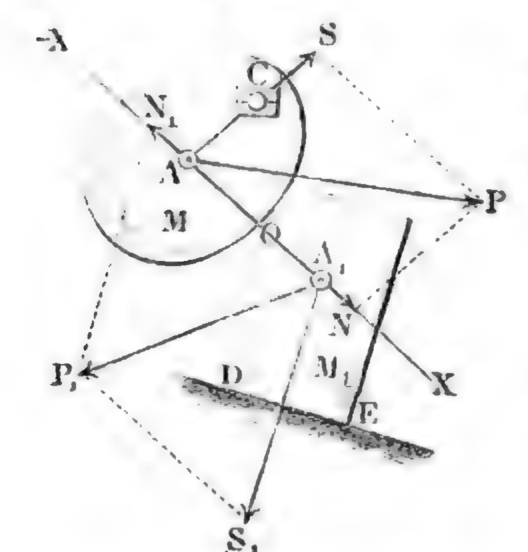
$$N_1 = \frac{P_1 \sin. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)} \text{ und } S_1 = \frac{P_1 \sin. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)};$$

endlich wegen der Gleichheit $N = N_1$:

$$\frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)} = \frac{P_1 \sin. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Beispiel. Welche Kraftzerlegungen treten ein, wenn der durch ein Hinderniß $DE$ aufgehaltene Körper $M_1$, Fig. 196, durch einen anderen, um eine Axe $C$ drehbaren Körper $M$ mit einer Kraft $P = 250$ Pfund gedrückt wird, und die Richtungswinkel folgende sind:

Fig. 196.




$$PAN = \alpha = 35^0,$$
$$PAS = \beta = 48^0,$$
$$P_1 A_1 N_1 = \alpha_1 = 65^0,$$
$$P_1 A_1 S_1 = \beta_1 = 50^0.$$

Aus der ersten Formel bestimmt sich der Normaldruck zwischen den beiden Körpern:

$$N = N_1 = \frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{250 \sin. 48^0}{\sin. 83^0} = 187{,}18 \text{ Pfund};$$

aus der zweiten folgt ferner der Druck gegen die Axe oder den Zapfen $C$:

$$S = \frac{P \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)} = \frac{250 \sin. 35^0}{\sin. 83^0} = 144{,}47 \text{ Pfund};$$

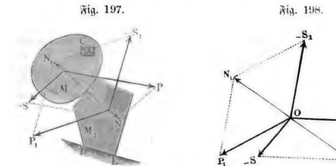
endlich aus der Verbindung der dritten und vierten Gleichung ergiebt sich der Seitendruck gegen das Hinderniß $DE$:

$$S_1 = \frac{N_1 \sin. \alpha_1}{\sin. \beta_1} = \frac{187{,}18 \sin. 65^0}{\sin. 50^0} = 221{,}46 \text{ Pfund}.$$

§. 139 Wegen der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung wird das Gleichgewicht eines unterstützten Körpers nicht gestört, wenn man statt der Stütze eine Kraft anbringt, welche den auf die Stütze übergehenden Druck oder Zug aufnimmt, und daher demselben an Größe gleich und der Richtung nach entgegengesetzt ist. Nach Einführung dieser Kräfte läßt sich daher jeder irgendwie unterstützter oder theilweise festgehaltener Körper auch als ein völlig freier Körper ansehen, und folglich auch der Gleichgewichtszustand desselben wie der eines freien Körpers oder eines festen Kräftesystemes behandeln.

Wenn z. B. bei dem um die Axe $C$ drehbaren Körper $M$, Fig. 197, die Kraft $N$ auf einen zweiten Körper $M_1$ übergeht, und die Kraft $S$ von der Axe $C$ aufgenommen wird, so kann man auch annehmen, daß derselbe ganz frei sei und außer der Kraft $P$ noch von zwei Kräften $-N$ und $-S$ ergriffen werde. Wenn ebenso der Körper $M_1$ mit der Kraft $N_1$ auf $M$ und mit der Kraft $S_1$ gegen die feste Ebene $DE$ drückt, so wird deshalb das Gleichgewicht nicht gestört, wenn man statt dieser Stützen zwei Gegenkräfte $-N_1$ und $-S_1$ einführt, und dieselben mit den Kräften, welche überdies noch auf diesen Körper wirken, z. B. mit $P_1$, vereinigt. Beim Gleichgewichtszustande muß natürlich sowohl die Mittelkraft des einen Körpers,

Fig. 197. Fig. 198.



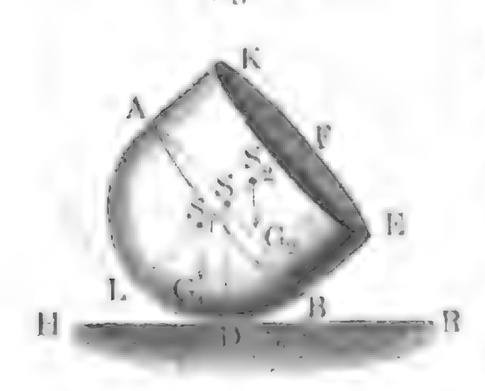

als auch die des anderen = Null sein, daher sowohl die Mittelkraft aus $-N$ und $-S$ durch $P$, als auch die aus $-N_1$ und $-S_1$ durch $P_1$ aufgehoben werden.

Da sich die Kräfte $N$ und $N_1$, mit welchen die beiden Körper auf einander wirken, das Gleichgewicht halten, so werden folglich auch im Gleichgewichtszustande der Körperverbindung $(M, M_1)$ die Kräfte $P$, $-S$, $P_1$ und $-S_1$ im Gleichgewicht sein. Man nennt jene Kräfte $N$, $N_1$ innere, und die Kräfte $P, -S, P_1$ und $-S_1$ äußere Kräfte der Körperverbindung oder des Kräftesystemes $(M, M_1)$ und kann hiernach behaupten, daß im Gleichgewichtszustande des letzteren, sich nicht allein die inneren Kräfte das Gleichgewicht halten, sondern auch die äußeren Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn man dieselben, wie Fig. 198 darstellt, bei unveränderter Größe und Richtung, in irgend einem Punkte O angreifend annimmt.

§. 140 **Stabilität.** Wenn ein sich auf eine Horizontalebene stützender Körper außer der Schwerkraft von keiner anderen Kraft getrieben wird, so besitzt derselbe kein Bestreben zur fortschreitenden Bewegung, weil das vertical abwärts wirkende Gewicht von dieser Ebene vollständig aufgenommen wird; wohl aber

ist eine **Drehung** des Körpers möglich. Ruht der Körper *ADBF*, Fig. 199, mit einem Punkte *D* auf der Horizontalebene *HR*, so bleibt derselbe in Ruhe, wenn sein Schwerpunkt *S* unterstützt ist, d. h. in der durch den Stützpunkt *D* gehenden Verticallinie (verticalen Schwerlinie) liegt. Stützt sich aber ein Körper in zwei Punkten gegen die horizontale Oberfläche eines anderen, so erfordert das Gleichgewicht desselben, daß die verticale Schwerlinie die die beiden Stützpunkte verbindende Gerade durchschneide. Ruht endlich ein Körper in drei oder mehreren Punkten auf einer Horizontalebene auf, so besteht Gleichgewicht, wenn die verticale Schwerlinie durch das Dreieck oder Polygon hindurchgeht, welches entsteht, wenn man die Stützpunkte durch gerade Linien mit einander verbindet.

Fig. 199.




Uebrigens sind auch bei den unterstützten Körpern **stabiles** und **labiles Gleichgewicht** von einander zu unterscheiden. Das Gewicht *G* eines Körpers *AB*, Fig. 200, zieht den Schwerpunkt *S* desselben abwärts; stellt sich nun dieser Kraft kein Hinderniß entgegen, so bringt sie in dem Körper eine Drehung hervor, die so weit fortgeht, bis der Schwerpunkt seinen tiefsten Ort einnimmt und der Körper ins Gleichgewicht kommt. Es läßt sich aber behaupten, daß das Gleichgewicht **stabil** ist, wenn der Schwerpunkt die möglich tiefste Lage, Fig. 201, daß es nur **labil** ist, wenn er die höchste Lage einnimmt (Fig. 202), und daß es endlich ein **indifferentes** Gleichgewicht ist, wenn der Schwerpunkt bei jeder Stellung des Körpers auf einerlei Höhe bleibt (Fig. 203).

Fig. 200.

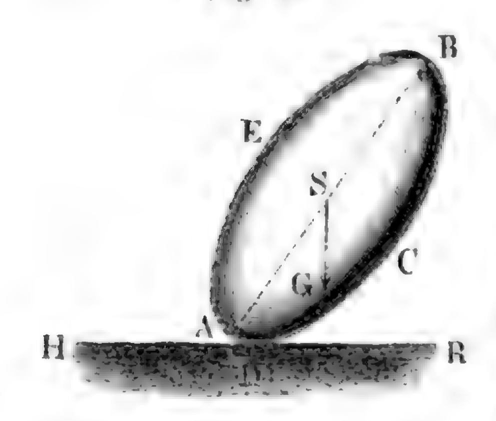
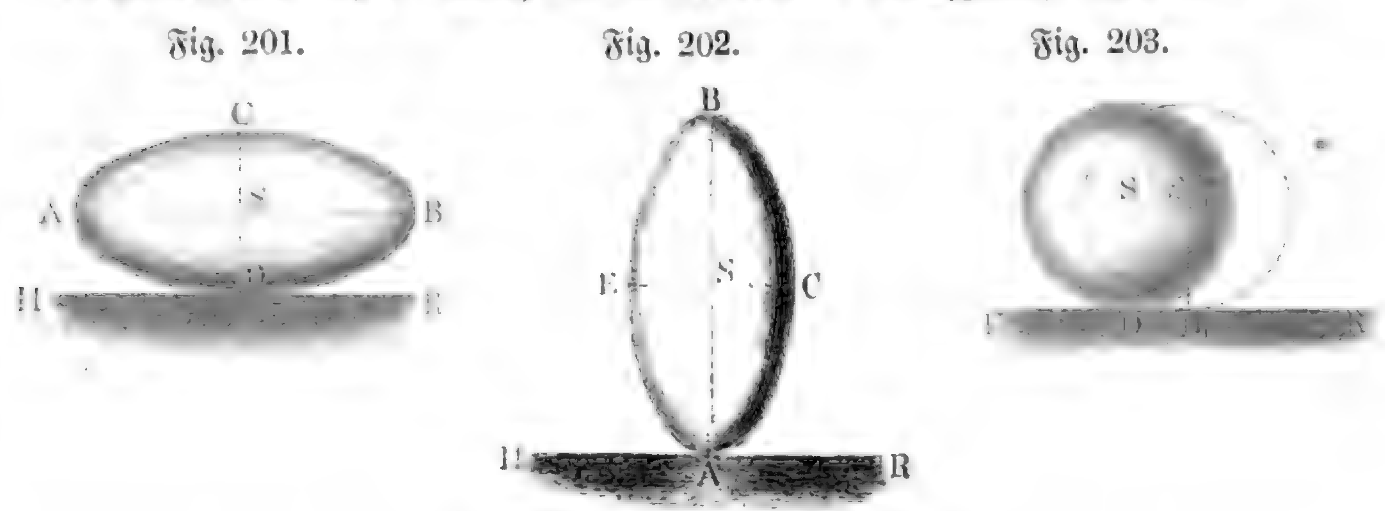
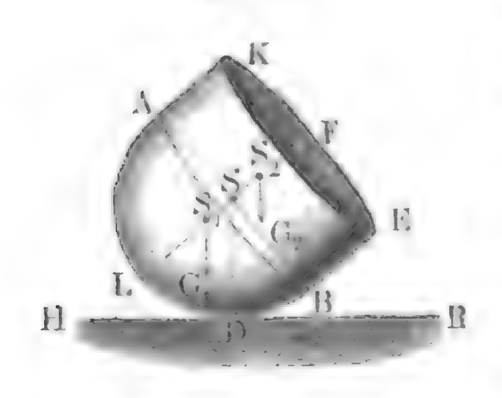



Fig. 201. Fig. 202. Fig. 203.



**Beispiele.** 1) Der homogene, aus einer Halbkugel und einem Cylinder bestehende Körper $ADBF$, Fig. 204, ruht auf einer Horizontalebene $HR$. Welche Höhe $SF = h$ muß der cylindrische Theil desselben haben, damit dieser Körper Gleichgewicht annehme? Der Halbmesser einer Kugel steht auf der entsprechenden Berührungsebene winkelrecht; nun ist aber die Horizontalebene eine solche Ebene, folglich muß auch der Halbmesser $SD$ auf der Horizontalebene rechtwinkelig stehen und in ihm zugleich der Schwerpunkt des Körpers liegen. Die durch den Kugelmittelpunkt gehende Are $FSL$ des Körpers ist eine zweite Schwerlinie desselben; es ist daher der Mittelpunkt $S$, als Durchschnitt beider Schwerlinien, Schwerpunkt des Körpers. Setzen wir den Kugel- und Cylinderhalbmesser $SA = SB = SL = r$ und die Cylinderhöhe $SF = BE = h$, so haben wir für das Volumen der Halbkugel: $V_1 = \frac{2}{3} \pi r^3$, für das Volumen des Cylinders: $V_2 = \pi r^2 h$, für den Abstand des Kugelschwerpunktes $S_1$, $SS_1 = \frac{3}{8} r$, und für den des Cylinderschwerpunktes $S_2$, $SS_2 = \frac{1}{2} h$. Damit nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers nach $S$ falle, ist das Moment $\frac{2}{3} \pi r^3 . \frac{3}{8} r$ der Halbkugel gleichzusetzen dem Moment $\pi r^2 h . \frac{1}{2} h$ des Cylinders; hieraus aber ergiebt sich:

Fig. 204.




$$h^2 = \frac{1}{2} r^2, \text{ d. i. } h = r \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071 . r.$$

Ist der Körper nicht homogen, sondern hat der halbkugelförmige Theil desselben das specifische Gewicht $\varepsilon_1$ und der cylindrische Theil das specifische Gewicht $\varepsilon_2$, so sind die Momente dieser Theile, $\frac{2}{3} \pi r^3 . \varepsilon_1 \frac{3}{8} r$ und $\pi r^2 h \varepsilon_2 . \frac{1}{2}$ , und es folgt durch Gleichsetzung derselben:

$$2 \varepsilon_2 h^2 = \varepsilon_1 r^2, \text{ d. i. } h = r \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2 \varepsilon_2}} = 0{,}7071 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} . r.$$

2) Der Druck, welchen jedes der drei Beine $A, B, C$, Fig. 205, eines beliebig belasteten Tisches auszuhalten hat, bestimmt sich auf folgende Weise. Es sei $S$ Schwerpunkt des belasteten Tisches, und es seien $SE$, $CD$ Perpendikel auf $AB$. Bezeichnen wir nun das Gewicht des ganzen Tisches durch $G$ und den Druck in $C$ durch $R$, so können wir, $AB$ als Are behandelnd, setzen: Moment von $R$ = Moment von $G$, d. i.:

Fig. 205.




$$R . \overline{CD} = G . \overline{SE},$$

und erhalten nun:

$$R = \frac{SE}{CD} \cdot G = \frac{\triangle ABS}{\triangle ABC} \cdot G; \text{ ebenso auch den Druck in } B:$$

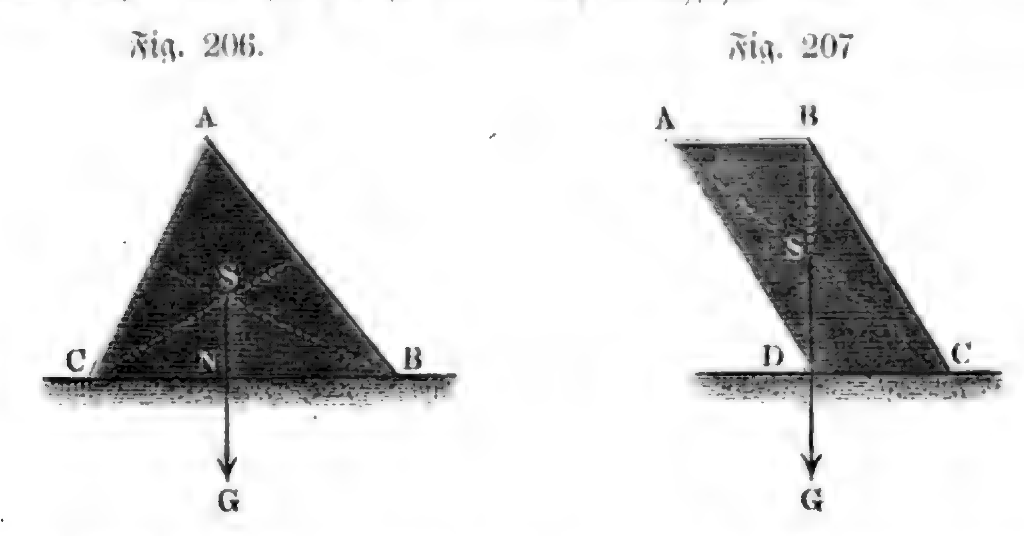
$$Q = \frac{\triangle ACS}{\triangle ABC} \cdot G, \text{ und den in } A:$$

$$P = \frac{\triangle BCS}{\triangle ABC} \cdot G.$$

§ 141 Beschäftigen wir uns mit dem Falle, wenn ein Körper mit einer ebenen Basis auf einer horizontalen Ebene ruht, etwas specieller. Ein solcher

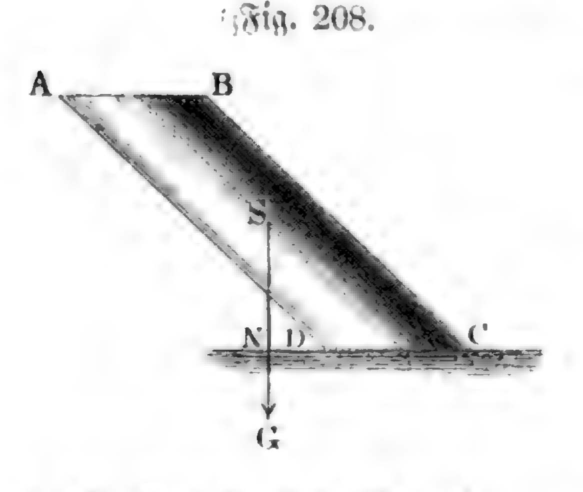
Körper besitzt **Stabilität** oder ist im **stabilen Gleichgewichte**, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist, d. h. wenn das den Schwerpunkt enthaltende Loth durch die Basis des Körpers hindurchgeht, weil in diesem Falle die durch das Gewicht des Körpers angeregte Drehung durch die Festigkeit desselben verhindert wird. Geht das Loth durch den Umfang der Basis, so befindet sich der Körper im labilen Gleichgewichte, und geht endlich dasselbe gar nicht durch die Basis, so findet gar kein Gleichgewicht statt, der Körper dreht sich um eine Seite des Umfanges seiner Basis und stürzt um. Das dreiseitige Prisma $ABC$, Fig. 206, ist hiernach stabil, weil das Loth $SG$ durch einen Punkt $N$ der Basis $BC$ hindurchgeht; das Parallelepiped $ABCD$, Fig. 207, ist im labilen Gleichgewichte, weil das Loth $SG$ eine Seite $D$ der Basis $CD$ durchschneidet; der Cylinder $ABCD$, Fig. 208, ist endlich ohne Stabilität, weil das Loth $SG$ dessen Basis $CD$ nicht durchschneidet.

Fig. 206. Fig. 207




**Stabilität** oder **Standfähigkeit** (franz. stabilité; engl. stability) ist das Vermögen eines Körpers, durch sein Gewicht allein seine Stellung zu behaupten und einer Umdrehungsursache Widerstand entgegenzusetzen. Kommt es darauf an, ein Maß für die Stabilität eines Körpers auszuwählen, so muß unterschieden werden, ob nur auf eine Verrückung oder ob auf ein wirkliches Umstürzen Rücksicht genommen werden soll. Ziehen wir zunächst nur das erste Verhältniß in Betracht.

Fig. 208.

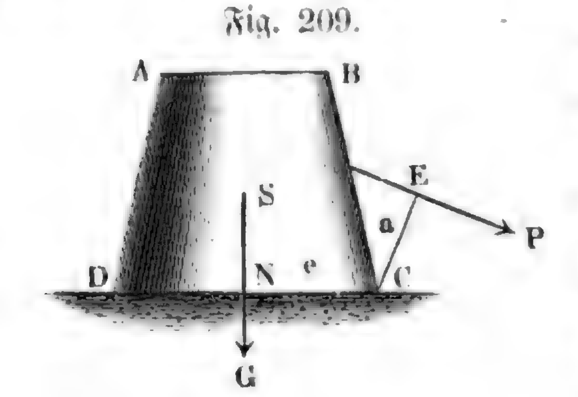



**Stabilitätsformeln.** Eine nicht vertical gerichtete Kraft $P$ sucht einen Körper $ABCD$, Fig. 209 (a. f. S.), nicht allein umzustürzen, sondern auch fortzuschieben; nehmen wir indessen an, daß diesem Fortschieben, oder nach Befinden Fortziehen, ein Hinderniß entgegengesetzt sei, berücksichtigen wir also nur

§. 142

das Umdrehen um eine Basiskante $C$. Fällen wir von dieser Kante ein Perpendikel $CE = a$ gegen die Kraftrichtung und ein anderes Perpendikel $CN = e$ gegen die verticale Schwerlinie $SG$ des Körpers, so haben wir es mit einem Winkelhebel $ECN$ zu thun, für welchen gilt: $Pa = Ge$, also $P = \frac{e}{a} G$; ist folglich die äußere Kraft $P$ wenig größer als $\frac{e\,G}{a}$, so nimmt der Körper eine Drehung um $C$ an und verliert also seine Stabilität. Es hängt hiernach seine Stabilität von dem Producte $(G e)$ aus dem Gewichte des Körpers und aus dem kürzesten Abstande zwischen einer Seite des Umfanges der Basis und dem Lothe durch den Schwerpunkt ab, und es läßt sich daher $Ge$ als **Maß der Stabilität** ansehen und deshalb auch schlechtweg Stabilität selbst nennen.

Fig. 209.



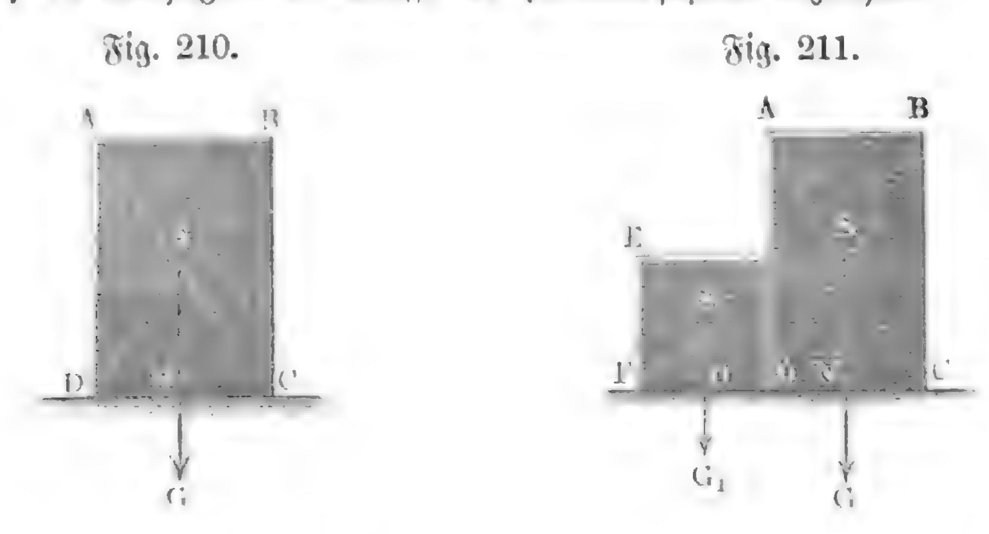

Man ersieht hieraus, daß die Stabilität mit dem Gewichte $G$ und dem Abstande $e$ gleichmäßig wächst, und schließt hiernach, daß unter übrigens gleichen Umständen eine doppelte, dreimal so schwere Mauer u. s. w. nicht mehr Standfähigkeit besitzt, als eine Mauer vom einfachen Gewichte und dem doppelten, dreifachen Abstande oder Hebelarme $e$ u. s. w.

§. 143 1) Ein **Parallelepiped** $ABCD$, Fig. 210, von der Länge $l$, Breite $AB = CD = b$ und Höhe $AD = BC = h$ hat das Gewicht $G = V\gamma = bhl\gamma$, und die Stabilität

$$St = G\,.\,\overline{DN} = G\,.\,{}^1\!/_2\,\overline{CD} = \frac{Gb}{2} = {}^1\!/_2\, b^2 h l \gamma,$$

insofern $\gamma$ die Dichtigkeit der Masse des Parallelepipedes bezeichnet.

Fig. 210. Fig. 211.




2) Bei einem aus zwei **Parallelepipeden** bestehenden Körper $BDE$, Fig. 211, sind die Stabilitäten in Hinsicht auf die beiden Basiskanten $C$ und

$F$ verschieden von einander. Sind die Höhen $BC$ und $EF = h$ und $h_1$ und die Breiten $CD$ und $DF = b$ und $b_1$, so hat man die Gewichte der Theile $G$ und $G_1 = bhl\gamma$ und $b_1 h_1 l\gamma$; die Hebelarme in Beziehung auf $C$, $CN = \frac{1}{2}b$ und $CO = b + \frac{1}{2}b_1$, und in Beziehung auf $F$, $= b_1 + \frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}b_1$; es ist demnach die Stabilität: erstens für eine Umdrehung um $C$:

$$St = \frac{1}{2}Gb + G_1(b + \frac{1}{2}b_1), = (\frac{1}{2}b^2h + bb_1h_1 + \frac{1}{2}b_1^2h_1)l\gamma,$$

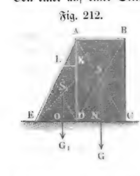
dagegen zweitens, in Beziehung auf $F$:

$$St_1 = G(b_1 + \frac{1}{2}b) + \frac{1}{2}G_1b_1 = (\frac{1}{2}b_1^2h_1 + bb_1h + \frac{1}{2}b^2h)l\gamma.$$

Die letztere Stabilität ist um $St_1 - St = (h - h_1)bb_1l\gamma$ größer als die erstere; will man die Stabilität einer Mauer $AC$ durch Banquets $DE$ vergrößern, so sind diese demnach auf derjenigen Seite der Mauer anzubringen, wohin die Umdrehungskraft (Wind-, Wasser-, Erddruck u. s. w.) wirkt.

Von einer auf einer Seite geböschten Mauer $ABCE$, Fig. 212, ergiebt sich folgende Stabilität. Es sei die Länge dieser Mauer $= l$, die obere Breite derselben, $AB = b$, ihre Höhe $BC = h$, ferner die Böschung $= n$, d. h. auf $AK = 1$ Fuß Höhe, $KL = n$ Ausladung, also auf $h$ Fuß: $DE = nh$. Das Gewicht des Parallelepipedes $AC$ ist $G = bhl\gamma$, das des dreiseitigen Prismas $ADE = G_1 = \frac{1}{2}nh.hl\gamma$, die Hebelarme für eine Umdrehung um $E$ sind $EN = ED + \frac{1}{2}b = nh + \frac{1}{2}b$ und $EO = \frac{2}{3}ED = \frac{2}{3}nh$;

Fig. 212.




es ist folglich die Stabilität:

$$St = G(nh + \frac{1}{2}b) + \frac{2}{3}G_1nh = (\frac{1}{2}b^2 + nhb + \frac{1}{3}n^2h^2)hl\gamma.$$

Eine parallelepipedische Mauer von gleichem Volumen hat die Breite $b + \frac{1}{2}nh$, daher die Stabilität:

$$St_1 = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{2}nh)^2hl\gamma = (\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}nhb + \frac{1}{8}n^2h^2)hl\gamma;$$

ihre Stabilität ist daher um $St - St_1 = (b + \frac{5}{12}nh).\frac{1}{2}nh^2l\gamma$ kleiner als die der geböschten Mauer.

Für eine auf der entgegengesetzten Seite geböschte Mauer ist die Stabilität:

$$St_2 = (b^2 + nhb + \frac{1}{3}n^2h^2).\frac{1}{2}hl\gamma,$$

demnach auch kleiner als $St$, und zwar um

$$St - St_2 = (b + \frac{1}{3}nh).\frac{1}{2}nh^2l\gamma,$$

wiewohl um $St_2 - St_1 = \frac{1}{24}n^2h^3l\gamma$ größer als die Stabilität der parallelepipedischen Mauer.

Beispiel. Wie groß ist die Stabilität einer Bruchsteinmauer von 10 Fuß Höhe und $1\frac{1}{4}$ Fuß oberer Breite für jeden Fuß Länge, bei $\frac{1}{5}$ füßiger Böschung

an der Rückseite? Das specifische Gewicht dieser Mauer (§. 61) = 2,4 angenommen, folgt die Dichtigkeit derselben $\gamma = 61,75 \,.\, 2,4 = 148,2$ Pfund, nun ist $l = 1$, $h = 10$, $b = 1,25$ und $n = \frac{1}{5} = 0,2$; es folgt daher die gesuchte Stabilität:

$$St = [\tfrac{1}{2} \,.\, (1,25)^2 + 0,2 \,.\, 1,25 \,.\, 10 + \tfrac{1}{3} \,.\, (0,2)^2 \,.\, 10^2]\, 10 \,.\, 1 \,.\, 148,2$$
$$= (0,78125 + 2,5 + 1,3333) \,.\, 1482 = 4,6146 \,.\, 1482 = 6839 \text{ Fußpfund.}$$

Bei derselben Menge an Material und unter übrigens gleichen Umständen wäre die Stabilität einer parallelepipedischen Mauer:

$$St_1 = [\tfrac{1}{2} \,.\, (1,25)^2 + \tfrac{1}{2} \,.\, 0,2 \,.\, 1,25 \,.\, 10 + \tfrac{1}{3} \,.\, 0,2^2 \,.\, 10^2] \,.\, 1482$$
$$= (0,78125 + 1,25 + 0,5) \,.\, 1482 = 2,531 \,.\, 1482 = 3751 \text{ Fußpfund.}$$

Endlich hätte dieselbe Mauer mit geböschter Vorderseite Stabilität:

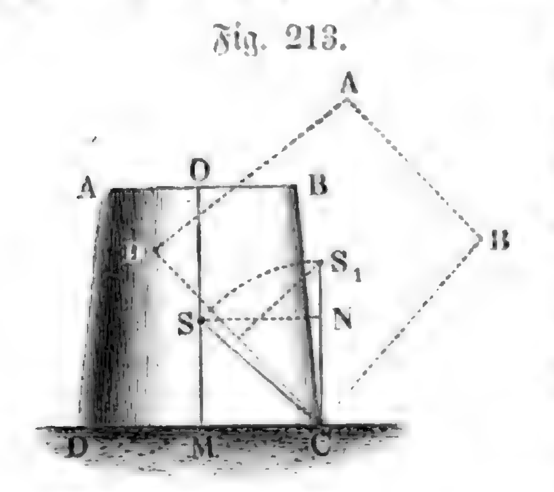
$$St_2 = [\tfrac{1}{2} \,.\, (1,25)^2 + \tfrac{1}{4} \,.\, 0,2 \,.\, 1,25 \,.\, 10 + \tfrac{1}{6} \,.\, (0,2)^2 \,.\, 10^2] \,.\, 1482$$
$$= (0,78125 + 1,25 + 0,666\ldots) \,.\, 1482 = 2,6979 \,.\, 1482 = 3998 \text{ Fußpfund.}$$

Anmerkung. Man ersieht aus dem Vorhergehenden, daß es eine Ersparung an Material gewährt, die Mauern zu böschen, oder mit Pfeilern zu versehen, ihnen Banquets zu geben, sie auf Plinten zu setzen u. s. w. Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes giebt der zweite Theil, wo vom Erddruck, von den Gewölben, Brücken u. s. w. gehandelt wird.

§. 144 **Dynamische Stabilität.** Von dem im letzten Paragraphen abgehandelten Maße der Stabilität eines Körpers ist ein anderes Maß derselben zu unterscheiden, wobei wir die zum Umstürzen eines Körpers erforderliche mechanische Arbeit in Betracht ziehen. Es ist die Leistung oder Arbeit einer Kraft gleich dem Producte aus Kraft und Weg, ferner die Kraft eines schweren Körpers ist das Gewicht $G$ und der Weg desselben die Verticalprojection des vom Schwerpunkte durchlaufenen Weges, folglich kann auch im letzteren Sinne zum Maße der Stabilität eines Körpers das Product $Gs$ dienen, wenn $s$ die senkrechte Höhe ist, auf welche der Schwerpunkt des Körpers steigen muß, um den Körper aus seinem stabilen Gleichgewichtszustande in einen labilen zu bringen.

Es sei $C$ die Drehungsaxe und $S$ der Schwerpunkt eines Körpers $ABCD$, Fig. 213, dessen dynamische Stabilität wir angeben wollen. Drehen wir den Körper, so daß sein Schwerpunkt $S$ nach $S_1$, d. h. senkrecht über $C$ kommt, so ist der Körper im labilen Gleichgewichte, denn wenn er nur noch wenig weiter gedreht wird, so gelangt er zum Umsturz. Ziehen wir die Horizontale $SN$, so schneidet diese die Höhe $NS_1 = s$ ab, auf welche der Schwerpunkt gestiegen ist, und aus welcher sich die Stabilität $Gs$ ergiebt. Ist nun

Fig. 213.




$$CS = CS_1 = r,\ CM = NS = e$$

und die Höhe $CN = MS = a$, so folgt der Weg:

$$S_1 N = s = r - a = \sqrt{a^2 + e^2} - a,$$

und die Stabilität im letzteren Sinne:

$$St = G(\sqrt{a^2 + e^2} - a).$$

Der Factor $s = \sqrt{a^2 + e^2} - a$ giebt für $a = 0, s = e$, für $a = e$, $s = e(\sqrt{2} - 1) = 0{,}414\, e$, für $a = ne$ aber $s = (\sqrt{n^2 + 1} - n)e$, annähernd $= (n + \frac{1}{2n} - n)e = \frac{e}{2n}$, also für $a = 10\, e$, $s = \frac{e}{20}$ und für $a = \infty$, $s = \frac{e}{\infty} = 0$; es ist also die Arbeits-Stabilität um so größer, je tiefer der Schwerpunkt liegt, und sie nähert sich immer mehr und mehr der Null, je höher sich der Schwerpunkt über der Basis befindet. Schlitten, Wagen, Schiffe u. s. w. sind deshalb so zu beladen, daß der Schwerpunkt des Ganzen nicht nur möglichst tief, sondern auch nahe über die Mitte der Basis zu liegen kommt.

Ist der Körper ein Prisma mit symmetrisch trapezoidalem Querschnitte, wie Fig. 213 im Durchschnitt vorstellt, und sind die Dimensionen folgende: Länge $= l$, Höhe $MO = h$, untere Breite $CD = b_1$ und obere Breite $AB = b_2$, so hat man:

$$MS = a = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} \text{ (§. 110) und}$$

$$CM = e = \tfrac{1}{2} b_1, \text{ daher:}$$

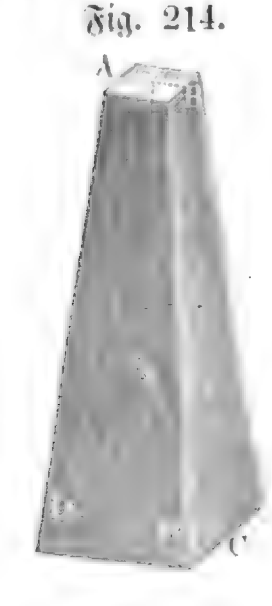
$$CS = r = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2},$$

und die dynamische Stabilität oder die zum Umstürzen dieses Körpers nöthige mechanische Arbeit:

$$St = G\left[\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2} - \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right].$$

Beispiel. Wie groß ist die Stabilität oder die mechanische Arbeit zum Umstürzen des Obelisken $ABCD$, Fig. 214, aus Granit, wenn dessen Höhe $h = 30$ Fuß, obere Länge und Breite $l_1 = 1\tfrac{1}{2}$ und $b_1 = 1$ Fuß und untere Länge und Breite $l_2 = 4$ Fuß und $b_2 = 3\tfrac{1}{2}$ Fuß betragen? Das Volumen dieses Körpers ist (§. 121):

Fig. 214.



$$V = (2\, b_1 l_1 + 2\, b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1)\,\frac{h}{6}$$
$$= (2 \,.\, \tfrac{3}{2} \,.\, 1 + 2 \,.\, 4 \,.\, \tfrac{7}{2} + 1 \,.\, 4 + \tfrac{3}{2} \,.\, \tfrac{7}{2}) \,.\, \tfrac{30}{6}$$
$$= 40{,}25 \,.\, 5 = 201{,}25 \text{ Cubikfuß};$$

wiegt nun 1 Cubikfuß Granit, $\gamma = 3 \cdot 61{,}74 = 185{,}22$ Pfund, so ist das ganze Gewicht dieses Körpers:

$$G = 201{,}25 \,.\, 185{,}22 = 37275 \text{ Pfund}.$$

Die Höhe seines Schwerpunktes über der Basis beträgt:

$$a = \frac{b_2 l_2 + 3 b_1 l_1 + b_2 l_1 + b_1 l_2}{2 b_2 l_2 + 2 b_1 l_1 + b_2 l_1 + b_1 l_2} \cdot \frac{h}{2}$$
$$= \frac{4 \cdot {}^7/_2 + 3 \cdot {}^3/_2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + {}^3/_2 \cdot {}^7/_2}{40{,}25} \cdot {}^{30}/_2 = \frac{27{,}75 \cdot 15}{40{,}25} = 10{,}342 \text{ Fuß}.$$

Eine Umdrehung um die längere Basiskante vorausgesetzt, ist der Horizontalabstand des Schwerpunktes von dieser Kante, $e = {}^1/_2\, b_2 = {}^1/_2 \cdot {}^7/_2 = {}^7/_4$ Fuß, daher die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe:

$$CS = r = \sqrt{a^2 + e^2} = \sqrt{(1{,}75)^2 + (10{,}342)^2} = \sqrt{110{,}002} = 10{,}489;$$

und die Höhe, auf welche der Schwerpunkt zu heben ist, um ein Umstürzen herbeizuführen:

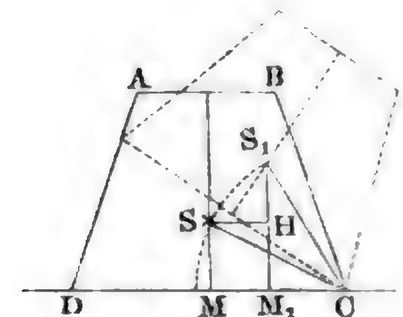
$$s = r - a = 10{,}489 - 10{,}342 = 0{,}147 \text{ Fuß},$$

endlich die entsprechende Arbeit oder Stabilität:

$$St = Gs = 37275 \cdot 0{,}147 = 5479 \text{ Fußpfund}.$$

§. 145 **Arbeit beim Fortschaffen eines schweren Körpers.** Um die mechanische Arbeit zu finden, welche nöthig ist, um den Ort eines schweren Körpers durch Drehung zu verändern, hat man einen ähnlichen Weg einzuschlagen, wie bei der Berechnung der Arbeitsstabilität desselben. Dreht man einen schweren Körper $AC$, Fig. 215, um eine horizontale Axe $C$ so viel, daß sich die Neigung $MCS = \alpha$ der Schwerlinie $CS = r$ in $MCS_1 = \alpha_1$ umändert, so legt hierbei der Schwerpunkt $S$ in verticaler Richtung den Weg $HS_1 = M_1 S_1 - MS = s = r(\sin.\alpha_1 - \sin.\alpha)$ zurück, und es ist daher, wenn $G$ das Gewicht des Körpers bezeichnet, die hierzu nöthige mechanische Arbeit:

Fig. 215.




$$A_1 = G s_1 = G r (\sin.\alpha_1 - \sin.\alpha).$$

Wäre die Drehungsaxe nicht horizontal, sondern um den Winkel $\beta$ gegen den Horizont geneigt, so würde

$$s_1 = r \cos.\beta (\sin.\alpha_1 - \sin.\alpha) \text{ und}$$
$$A_1 = G r \cos.\beta (\sin.\alpha_1 - \sin.\alpha) \text{ sein. (Vergl. §. 133.)}$$

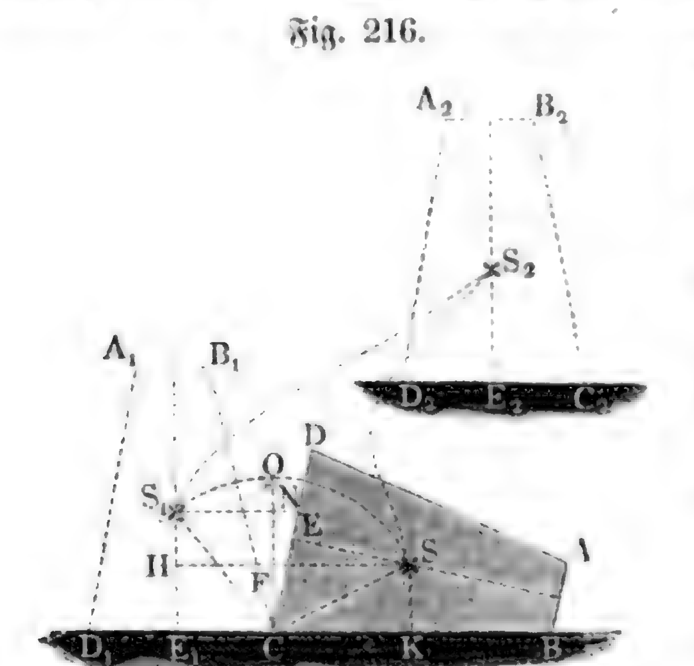
Wird der Körper außerdem noch so fortbewegt, daß er seine Lage gegen die Richtung der Schwere nicht ändert, aber sein Schwerpunkt sowie alle seine Theile einen und denselben Weg durchlaufen, dessen Verticalprojection $= s_2$ ist, so erfordert die Verrückung oder Fortbewegung des Körpers, die mechanische Arbeit, noch den Zusatz $A_2 = G s_2$, und es ist daher die gesammte mechanische Arbeit:

$$A = A_1 + A_2 = G[r \cos.\beta (\sin.\alpha_1 - \sin.\alpha) + s_2].$$

Der Weg des Körpers in horizontaler Richtung kommt natürlich ganz außer Betracht, wenn man eine sehr langsame Bewegung voraussetzt, wobei die Arbeit der Trägheit Null zu setzen ist.

Bei dem Körper $AC$, Fig. 216, welcher auf einer horizontalen Ebene aufruht, und auf eine andere Horizontalebene $C_2 D_2$ gestellt werden soll, hat man $\beta = 0^0$, also $cos. \beta = 1$; ferner wenn $a$ und $e$ die verticalen und horizontalen Coordinaten vom Schwerpunkt $S_1$ des Körpers in aufgerichteter Stellung bezeichnen, den Radius $CS_1 = r = \sqrt{a^2 + e^2}$, und die Höhe $E_1 S_1 = a = r\, sin. \alpha_1$. Ist $\alpha$ der Neigungswinkel $BCS$ der Seitenfläche $BC$ des Körpers gegen die Schwerlinie $CS$, so ergiebt sich die anfängliche Höhe des Schwerpunktes $S$ über der Auflagerungsfläche:

Fig. 216.




$$KS = CS\, sin. BCS = r\, sin. \alpha$$
$$= \sqrt{a^2 + e^2} . sin. \alpha,$$

und es folgt die Höhe, auf welche der Schwerpunkt $S$ des Körpers beim Aufrichten steigt:

$$HS_1 = s_1 = E_1 S_1 - E_1 H = a - \sqrt{a^2 + e^2} . sin. \alpha.$$

Ist nun noch $s_2$ die senkrechte Höhe der Standebene $C_2 D_2$ über der ersten Lagerebene $BC$, so hat man die ganze mechanische Arbeit zum Aufheben des Körpers von $BC$ auf $C_2 D_2$:

$$A = G (a - \sqrt{a^2 + e^2} . sin. \alpha + s_2).$$

Diese Bestimmung der Arbeit zum Fortschaffen eines Körpers hat nur dann ihre volle Richtigkeit, wenn der Schwerpunkt stetig von $S$ nach $S_2$ gehoben wird; in dem Falle hingegen, wo der Körper erst aufgerichtet und dann emporgehoben wird, ist die erforderliche mechanische Arbeit:

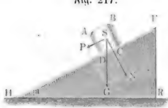
$$A = G(\overline{FO} + s_2) = G(\overline{CO} - KS + s_2) = G[\sqrt{a^2 + e^2}(1 - sin. \alpha) + s_2],$$

weil die Arbeit $G . \overline{ON} = G (\sqrt{a^2 + e^2} - a)$, welche der Körper beim Niedersinken des Schwerpunktes von $O$ nach $S_1$ verrichtet, verloren geht.

§. 146 **Stabilität eines Körpers auf der geneigten Ebene.** Ein Körper $AC$, Fig. 217 (a. f. S.), auf einer schiefen, d. h. gegen den Horizont geneigten Ebene (franz. plan incliné; engl. inclined plane) kann zwei Bewegungen annehmen, er kann von der schiefen Ebene herabgleiten, er kann sich auch um eine seiner Basiskanten umdrehen und umstürzen. Ist der Körper sich selbst überlassen, so zerlegt sich das Gewicht $G$ des Körpers in eine Kraft $N$ normal und eine Kraft $P$ parallel zur Basis; die erstere nimmt die schiefe Ebene vollkommen auf, die

letztere aber treibt den Körper auf der Ebene abwärts. Setzen wir den Neigungswinkel $FHR$ der schiefen Ebene gegen den Horizont $= \alpha$, so haben wir auch den Winkel $GSN = \alpha$, und daher den **Normaldruck**:

Fig. 217.



$$N = G \cos. \alpha,$$

sowie die **Kraft zum Herabgleiten**:

$$P = G \sin. \alpha.$$

Geht die verticale Schwerlinie $SG$ durch die Basis $CD$, wie Fig. 217 zeigt, so kann nur eine gleitende Bewegung entstehen, geht aber, wie in Fig. 218, diese Schwerlinie außerhalb der Basis vorbei, so tritt auch noch ein Umstürzen ein, es ist also der Körper ohne Stabilität. Uebrigens hat

Fig. 218.

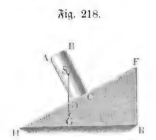
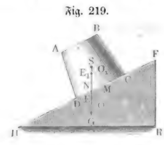


Fig. 219.



ein Körper $AC$ auf der schiefen Ebene $FH$, Fig. 219, eine andere Stabilität als auf der Horizontalebene $HR$. Sind $DM = e$ und $MS = a$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Schwerpunktes $S$, so hat man den Hebelarm der Stabilität:

$$DE = DO - MN = e \cos. \alpha - a \sin. \alpha,$$

während er $= e$ ist, wenn der Körper auf der Horizontalebene steht. Da $e > e \cos. \alpha - a \sin. \alpha$ ist, so fällt die Stabilität in Beziehung auf die untere Kante $D$ auf der schiefen Ebene kleiner aus, als auf der horizontalen Ebene; sie ist sogar Null für $e \cos. \alpha = a \sin. \alpha$, d. i. für $tang. \alpha = \frac{e}{a}$.

Wenn also der auf einer Horizontalebene mit der Stabilität $Ge$ stehende Körper auf eine schiefe Ebene zu stehen kommt, deren Neigungswinkel $\alpha$ dem Ausdrucke $tang. \alpha = \frac{e}{a}$ entspricht, so verliert derselbe seine Stabilität. Auf der anderen Seite kann aber auch ein Körper auf der schiefen Ebene zur Stabilität gelangen, die ihm mangelt, wenn er auf der Horizontalebene steht. Für eine Drehung um die obere Kante $C$ ist der Hebelarm $CE_1 = CO_1 + MN = e_1 \cos. \alpha + a \sin. \alpha$, während er beim Stande auf der Horizon-

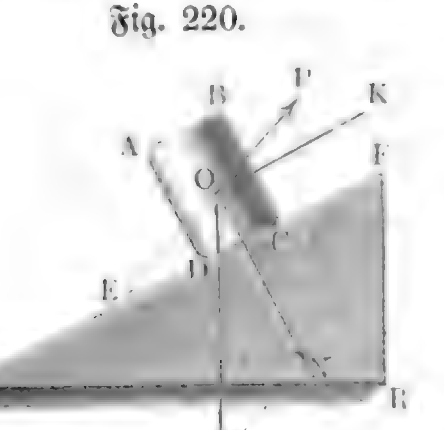
talebene, $= CM = e_1$ ausfällt. Ist nun $e_1$ negativ, so hat der Körper keine Stabilität, so lange er auf der Horizontalebene steht: ruht er aber auf einer geneigten Ebene, für deren Neigungswinkel $\alpha$, $tang. \alpha = \frac{e_1}{a}$ ist, so gelangt der Körper in eine stabile Gleichgewichtslage.

Wirkt außer der Schwerkraft noch eine andere Kraft $P$ auf den Körper $ABCD$, Fig. 209, so behält derselbe seine Stabilität, wenn die Mittelkraft $N$ aus dem Gewichte $G$ des Körpers und aus der Kraft $P$ eine Richtung hat, welche die Basis $CD$ des Körpers durchschneidet.

Beispiel. Bei dem Obelisken im Beispiele des Paragraphen 141 ist $e = \frac{7}{4}$ Fuß und $a = 10,342$ Fuß, es verliert folglich derselbe seine Stabilität, wenn er auf eine schiefe Ebene zu stehen kommt, für deren Neigungswinkel ist: $tang. \alpha = \frac{7}{4 \,.\, 10,342} = \frac{7000}{41368} = 0,16922$, deren Neigung folglich $\alpha = 9^0 36'$ beträgt.

**Theorie der schiefen Ebene.** Da die schiefe Ebene nur denjenigen Druck in sich aufnimmt, welcher winkelrecht gegen sie gerichtet ist, so bestimmt sich die Kraft $P$, welche nöthig ist, um einen übrigens vor dem Umstürzen geschützten Körper auf der schiefen Ebene zu erhalten, indem man die Bedingung festsetzt, daß die aus $P$ und $G$ hervorgehende Mittelkraft $N$, Fig. 220, winkelrecht zur schiefen Ebene stehe. Der Theorie des Parallelogrammes der Kräfte zufolge hat man: §. 147

Fig. 220.




$$\frac{P}{G} = \frac{sin. PNO}{sin. PON};$$

nun ist aber der Winkel $PNO =$ Winkel $GON = FHR = \alpha$, und der Winkel $PON = POK + KON = \beta + 90^0$, insofern man den Winkel $PEF = POK$, um welchen die Kraftrichtung von der schiefen Ebene abweicht, mit $\beta$ bezeichnet; man erhält daher:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin. \alpha}{sin. (90 + \beta)}, \text{ d. i. } \frac{P}{G} = \frac{sin. \alpha}{cos. \beta},$$

also die Kraft, welche den Körper auf der schiefen Ebene erhält:

$$P = \frac{G \, sin. \alpha}{cos. \beta}.$$

Für den Normaldruck $N$ ist

$$\frac{N}{G} = \frac{sin. OGN}{sin. ONG},$$

aber Winkel $OGN = 90^0 - (\alpha + \beta)$ und $ONG = PON = 90 + \beta$, daher folgt

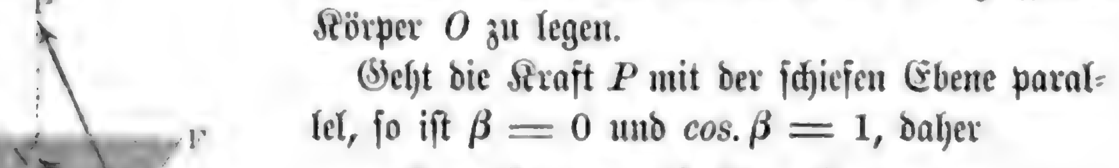
$$\frac{N}{G} = \frac{sin.[90^0 - (\alpha + \beta)]}{sin.(90^0 + \beta)} = \frac{cos.(\alpha + \beta)}{cos.\beta},$$

und der Normaldruck gegen die schiefe Ebene:

$$N = \frac{G\,cos.(\alpha + \beta)}{cos.\beta}.$$

Ist $\alpha + \beta > 90$ Grad, also $\beta > 90 - \alpha$, so fällt $N$ negativ aus, und es ist dann, wie Fig. 221 darstellt, die schiefe Ebene $HF$ über den von der Kraft $P$ ergriffenen Körper $O$ zu legen.

Fig. 221.



Geht die Kraft $P$ mit der schiefen Ebene parallel, so ist $\beta = 0$ und $cos.\beta = 1$, daher

$$P = G\,sin.\alpha \text{ und } N = G\,cos.\alpha.$$

Wirkt die Kraft $P$ vertical, so ist $\alpha + \beta = 90^0$, daher

$$cos.\beta = sin.\alpha, \text{ ferner } cos.(\alpha + \beta) = 0,$$

und $P = G$ sowie $N = 0$; dann hat also die schiefe Ebene keinen Einfluß auf den Körper.

Wirkt endlich die Kraft horizontal, so ist $\beta = -\alpha$ und $cos.\beta = cos.\alpha$, daher

$$P = \frac{G\,sin.\alpha}{cos.\alpha} = G\,tang.\alpha, \text{ sowie } N = \frac{G\,cos.0}{cos.\alpha} = \frac{G}{cos.\alpha}.$$

Beispiel. Um einen Körper von 500 Pfund auf einer schiefen Ebene von $50^0$ Neigung gegen den Horizont zu erhalten, wird eine Kraft aufgewendet, deren Richtung $75^0$ mit dem Horizonte einschließt; wie groß ist diese Kraft und wie stark drückt der Körper gegen die schiefe Ebene? Die Kraft ist:

$$P = \frac{500\,sin.50^0}{cos.(75-50)} = \frac{500\,sin.50^0}{cos.25^0} = 422,6 \text{ Pfund},$$

und der Druck gegen die Ebene:

$$N = \frac{500\,.\,cos.\,75^0}{cos.25^0} = 142,8 \text{ Pfund}.$$

§. 148 **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** Bringt man das in §. 138 näher auseinandergesetzte Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 83 und §. 98) in Verbindung, so stellt sich folgende Regel heraus: Halten zwei Körper, $M_1$ und $M_2$, Fig. 222, einander das Gleichgewicht, so ist für eine endliche geradlinige und auch für eine unendlich kleine krummlinige Bewegung des Druck- oder Berührungspunktes $A$, nicht allein die Summe der mechanischen Arbeiten von den Kräften jedes

einzelnen Körpers, sondern auch die Summe der mechanischen Arbeiten von den äußeren Kräften beider Körper, zusammengenommen, gleich Null. Sind $P_1$ und $S_1$ die Kräfte des einen Körpers, $P_2$ und $S_2$ die des anderen, so entsprechen denselben bei einer Verrückung des Berührungspunktes von $A$ nach $B$ die Wege $AD_1$, $AE_1$, $AD_2$ und $AE_2$, und es ist nach dem oben ausgesprochenen Gesetze:

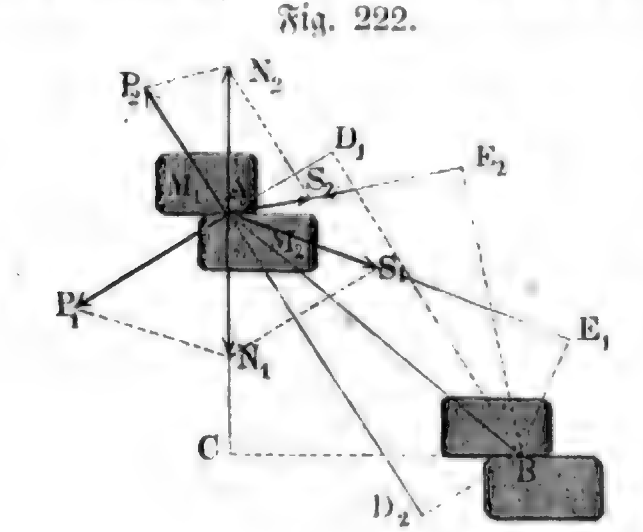


Fig. 222.

$$P_1 . \overline{AD_1} + S_1 . \overline{AE_1} + P_2 \overline{AD_2} + S_2 . \overline{AE_2} = 0,$$

oder ohne Rücksicht auf die Richtung,

$$P_1 \overline{AD_1} + S_1 . \overline{AE_1} = P_2 . \overline{AD_2} + S_2 . \overline{AE_2}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun. Da die Normaldrücke $N_1$ und $N_2$ einander gleich sind, so findet auch Gleichheit zwischen ihren Arbeiten $N_1 . \overline{AC}$ und $N_2 . \overline{AC}$ statt, nur mit dem Unterschiede, daß die Arbeit der einen Kraft positiv und die der anderen negativ ist. Nun hat man aber nach dem Früheren, die Arbeit $N_1 . \overline{AC}$ der Mittelkraft $N_1$ gleich der Summe $P_1 . \overline{AD_1} + S_1 . \overline{AE_1}$ der Arbeiten ihrer Componenten $P_1$ und $S_1$, und ebenso $N_2 . \overline{AC} = P_2 . \overline{AD_2} + S_2 . \overline{AE_2}$; es ist daher auch:

$$P_1 . \overline{AD_1} + S_1 . \overline{AE_1} = P_2 . \overline{AD_2} + S_2 . \overline{AE_2}.$$

Die Anwendung des so allgemeiner gemachten Principes der virtuellen Geschwindigkeiten gewährt bei statischen Untersuchungen oft große Vortheile, indem durch sie die Entwickelung der Gleichgewichtsformeln sehr vereinfacht wird. Verrückt man z. B. einen Körper $A$ auf der schiefen Ebene $FH$, Fig. 223, um den Weg $AB$, so ist der entsprechende Weg seines Gewichtes $G$, $= AC = AB . sin. ABC = AB . sin. FHR = AB . sin. \alpha$, dagegen der Weg der Kraft $P$, $= AD = AB . cos. BAD = AB . cos. \beta$ und endlich der Weg der Normalkraft $N$, $= 0$; nun ist aber die Arbeit von $N$ gleich der Arbeit von $G$ plus der Arbeit von $P$, man hat daher zu setzen:

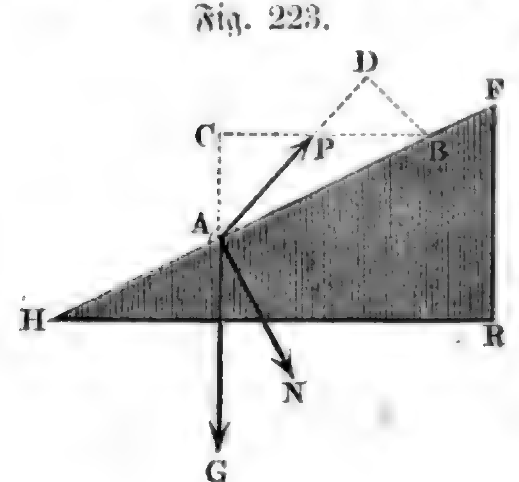


Fig. 223.

$$N . 0 = - G . \overline{AC} + P . \overline{AD},$$

und findet auf diese Weise die Kraft, welche den Körper auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht erhält:

$$P = \frac{AC}{AD} \cdot G = \frac{G \sin. \alpha}{\cos. \beta},$$

ganz in Uebereinstimmung mit dem vorigen Paragraphen.

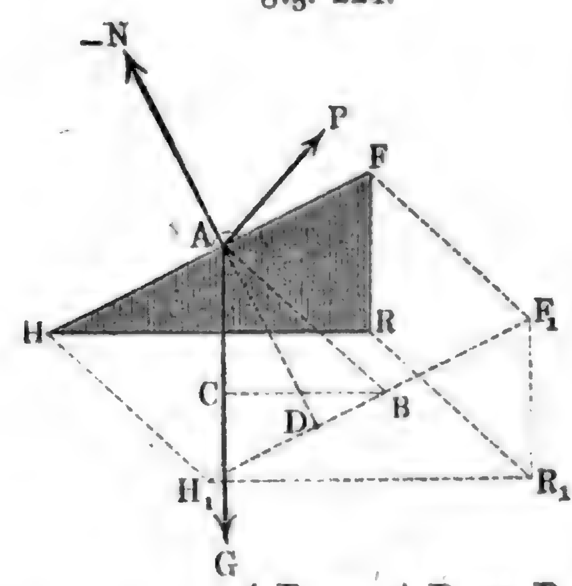



Fig. 224.

Um dagegen den Normaldruck $N$ zu finden, rücken wir diese schiefe Ebene $HF$, Fig. 224, um einen beliebigen Weg $AB$ rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung $AP$ fort, bestimmen die entsprechenden Wege der äußeren Kräfte und setzen die Arbeit des Gewichtes $G$ und die der Kraft $P$ des Körpers $A$ gleich der Arbeit der Kraft $N$ der schiefen Ebene oder des Druckes zwischen beiden Körpern.

Der Weg von $N$ ist:

$$AD = AB \cos. BAD = AB \cos. \beta,$$

der Weg von $G$ ist:

$$AC = AB \cos. BAC = AB \cos. (\alpha + \beta)$$

und der Weg von $P$ ist $= 0$, daher Arbeit:

$$N . \overline{AD} = G . \overline{AC} + P . 0,$$

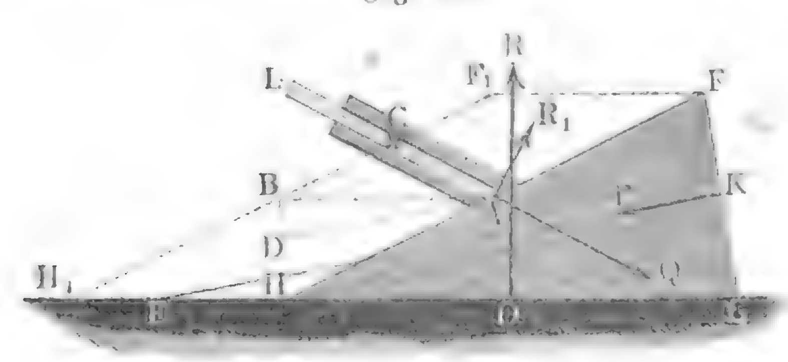
und

$$N = \frac{G . \overline{AC}}{\overline{AD}} = G \cdot \frac{\cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \beta},$$

wie im vorigen Paragraphen ebenfalls gefunden worden ist.

§. 149 **Theorie des Keiles.** Sehr einfach entwickelt sich hiernach die Theorie des Keiles. Der Keil (franz. coin; engl. wedge) ist eine durch ein dreiseitiges Prisma $FHG$, Fig. 225, gebildete, bewegliche schiefe Ebene. In der

Fig. 225.




Regel wirkt die Kraft $\overline{KP} = P$ rechtwinkelig auf den Rücken $FG$ des Keiles und hält einer anderen Kraft oder Last $AQ = Q$, welche gegen die

eine Seitenfläche $FH$ desselben drückt, das Gleichgewicht. Ist der die Schärfe des Keiles messende Winkel $FHG = \alpha$, ferner der Winkel, um welchen die Kraftrichtung $KP$ oder $AD$ von der Seitenfläche $GH$ abweicht, also $GEK = BAD, = \delta$, und endlich der Winkel $LAH$, um den die Richtung der Last $Q$ von der Seitenfläche $FH$ abweicht, $= \beta$, so ergeben sich die Wege, welche beim Verrücken des Keiles aus der Lage $FHG$ in die Lage $F_1 H_1 G_1$ zurückgelegt werden, auf folgende Weise. Der Weg des Keiles ist:

$$AB = FF_1 = HH_1,$$

ferner der Weg der Kraft ist:

$$AD = AB \cos. BAD = AB \cos. \delta,$$

und der Weg der Stange $AL$ oder Last $Q$ mißt:

$$AC = \frac{AB \sin. ABC}{\sin. ACB} = \frac{AB \sin. \alpha}{\sin. HAC} = \frac{AB \sin. \alpha}{\sin. \beta}.$$

Dagegen ist der Weg der dem Drucke auf die Grundfläche $EG$ entsprechenden Reaction $R$, so wie der Weg von der dem Drucke gegen die Leitung der Stange $AC$ entgegengesetzten Reaction $R_1$, $=$ Null. Setzt man nun die Summe der Arbeiten der äußeren Kräfte $P$, $Q$, $R$ und $R_1 =$ Null, also:

$$P.\overline{AD} - Q.\overline{AC} + R.0 + R_1.0 = 0,$$

so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$P = \frac{Q.\overline{AC}}{AD} = \frac{Q.\overline{AB} \sin. \alpha}{\overline{AB} \cos. \delta \sin. \beta} = \frac{Q \sin. \alpha}{\sin. \beta \cos. \delta},$$

wie sich allerdings auf dem Wege der Kraftzerlegung ebenfalls finden läßt.

Wenn die Kraftrichtung $KE$ durch die Kante $H$ des Keiles geht, und die Schärfe $FHG$ halbirt, so hat man $\delta = \frac{\alpha}{2}$, und daher

$$P = \frac{Q \sin. \alpha}{\sin. \beta \cos. \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\, Q \sin. \frac{\alpha}{2}}{\cos. \beta}.$$

Geht die Kraftrichtung parallel zur Basis oder Seitenfläche $GH$, so ist $\delta = 0$, daher:

$$P = \frac{Q \sin. \alpha}{\sin. \beta},$$

und ist noch die Lastrichtung winkelrecht zur Seitenfläche $FH$, also $\beta = 90^0$, so folgt:

$$P = Q \sin. \alpha.$$

Beispiel. Die Schärfe $FHG = \alpha$ eines Keiles betrage $25^0$, die Kraft sei parallel zur Basis $HG$ gerichtet, es sei also $\delta = 0$, und die Last $Q$ wirke win-

kelrecht zur Seitenfläche $FH$, also $\beta$ sei $= 90^0$, in welchem Verhältnisse stehen Kraft und Last zu einander? Es ist:

$$P = Q \, sin. \, \alpha, \text{ also } \frac{P}{Q} = sin. \, 25^0 = 0{,}4226.$$

Für eine Last $Q$ von 130 Pfund stellt sich hiernach die Kraft:

$$P = 130 \, . \, 0{,}4226 = 54{,}938 \text{ Pfund}$$

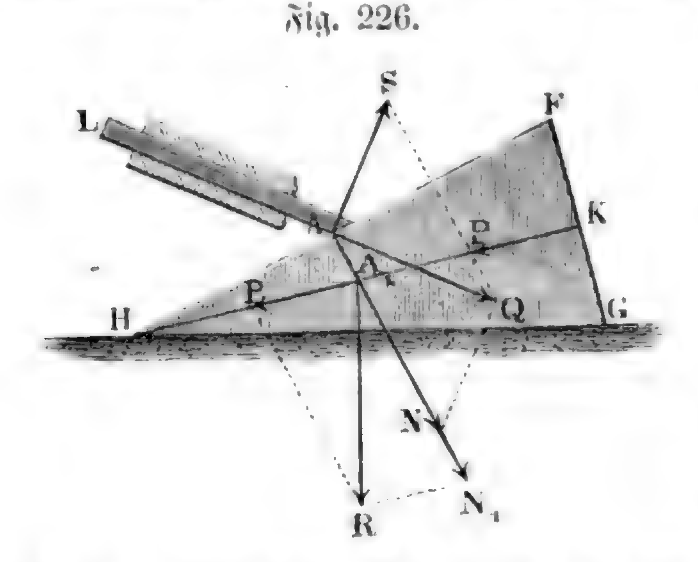
heraus. Um die Last oder Stange einen Fuß fortzuschieben, muß der Keil den Weg

$$AB = \frac{AC}{sin. \, \alpha} = \frac{1}{0{,}4226} = 2{,}3662 \text{ Fuß}$$

zurücklegen.

Anmerkung 1. Durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes bestimmt sich das Verhältniß zwischen Kraft $P$ und Last $Q$ des Keiles $FGH$, Fig. 226, wie folgt. Die Stangenlast, $\overline{AQ} = Q$ zerlegt sich in eine Seitenkraft $\overline{AN} = N$ normal auf die Seitenfläche $FH$ des Keiles, und in eine Seitenkraft $\overline{AS} = S$ normal auf die Stangenare $LA$. Während $S$ von der Leitung der Stange aufgenommen wird, geht $\overline{AN} = N$ auf den Keil über und vereinigt sich hier als $\overline{A_1 N_1}$ mit der Kraft $\overline{KP} = \overline{A_1 P} = P$ des Keiles zu einer Mittelkraft $\overline{A_1 R} = R$, deren Richtung winkelrecht auf der Grundfläche $GH$ des Keiles stehen muß, damit sie vollständig auf die Unterstützung des Keiles übergeht. Das Kräfteparallelogramm $A_1 P R N_1$ giebt:

Fig. 226.




$$\frac{P}{N_1} = \frac{sin. \, R A_1 N_1}{sin. \, A_1 R N_1} = \frac{sin. \, FHG}{sin. \, P A_1 R} = \frac{sin. \, \alpha}{cos. \, \delta},$$

und dem Kräfteparallelogramme $ANQS$ zufolge ist:

$$\frac{N}{Q} = \frac{sin. \, NQA}{sin. \, ANQ} = \frac{sin. \, QAS}{sin. \, LAH} = \frac{1}{sin. \, \beta};$$

da nun $N_1 = N$ ist, so ergiebt sich hiernach durch Multiplication dieser Proportionen:

$$\frac{P}{N} \cdot \frac{N}{Q} = \frac{P}{Q} = \frac{sin. \, \alpha}{sin. \, \beta \; cos. \, \delta}, \text{ also:}$$

$$P = \frac{Q \, sin. \, \alpha}{sin. \, \beta \; cos. \, \delta},$$

wie auch im Haupttext gefunden worden ist.

Anmerkung 2. Die Theorien des Hebels, der schiefen Ebene und des Keiles finden eine weitere Entwickelung im fünften Capitel, wo noch der Einfluß der Reibung in Betracht gezogen wird.

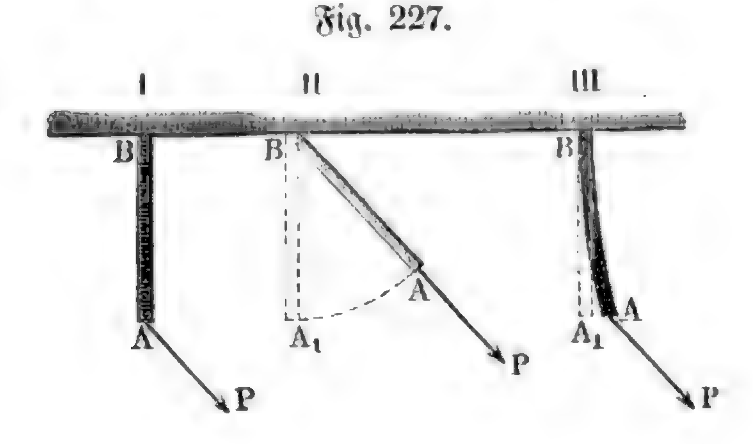
## Viertes Capitel.

# Gleichgewicht an den Seilmaschinen.

**Seilmaschine.** Wir haben seither die festen Körper als vollkommen starre oder steife Körper (franz. corps rigides; engl. rigid, stiff bodies), d. i. als solche angesehen, welche durch die Einwirkung äußerer Kräfte weder in Form noch im Volumen verändert werden; bei manchen Körpern und in vielen Fällen der Anwendung der Mechanik auf die Praxis ist jedoch die Annahme der vollkommenen Starrheit fester Körper nicht mehr zulässig, und deshalb nöthig, diese Körper insbesondere noch in zwei anderen Zuständen zu betrachten. Diese Zustände sind die vollkommene Biegsamkeit und die Elasticität, und wir unterscheiden hiernach noch die biegsamen Körper (franz. corps flexibles; engl. flexible bodies), und die elastischen Körper (franz. corps élastiques; engl. elastic bodies). Die biegsamen Körper nehmen nur Kräfte von einer gewissen Richtung ohne Formveränderung auf, folgen dagegen den Kräften, welche nach anderen Richtungen hinwirken, vollständig; die elastischen Körper hingegen geben bis zu einer gewissen Grenze jeder auf sie wirkenden Kraft nach. §. 150

Ein starrer Körper $AB$, Fig. 227, I, widersteht einer Kraft $P$ vollständig, ein biegsamer Körper $AB$, Fig. 227, II, folgt dagegen der auf ihn wirkenden Kraft $P$, wobei seine Axe die Richtung der Kraft annimmt, und ein

Fig. 227.




elastischer Körper $AB$, Fig. 227, III, widersteht der Kraft $P$ nur bis zu einem gewissen Grade, wobei seine Axe eine gewisse Biegung erleidet. Schnüre, Seile, Riemen, und in gewisser Beziehung auch Ketten, sind die Repräsentanten der biegsamen Körper, wiewohl sie eine vollkommene Biegsamkeit nicht

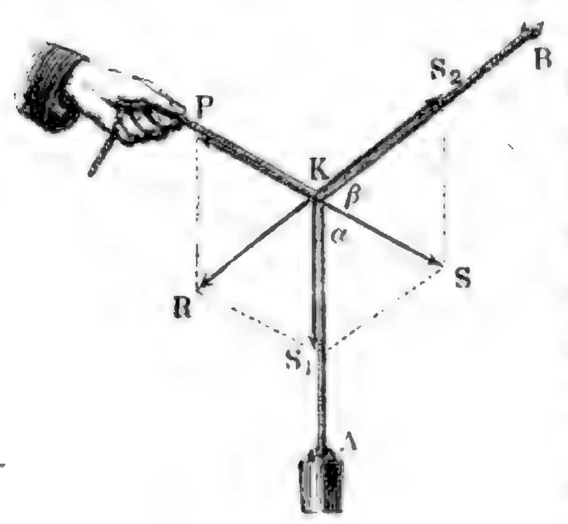
besitzen. Diese Körper sind der Gegenstand dieses Capitels; von den elastischen Körpern, oder vielmehr von der Elasticität der festen Körper wird dagegen erst im sechsten Capitel gehandelt.

Wir verstehen in der Folge unter einer **Seilmaschine** (franz. machine funiculaire; engl. machine of strings) ein Seil oder eine Verbindung von Seilen (das Wort Seil im allgemeinen Sinne genommen), welche von Kräften angespannt wird, und beschäftigen uns in diesem Capitel mit der Theorie des Gleichgewichtes dieser Maschinen. Derjenige Punkt einer Seilmaschine, wo eine Kraft angreift und deshalb das Seil einen Winkel bildet oder eine Richtungsveränderung erleidet, heißt ein **Knoten** (franz. noeud; engl. knot). Derselbe ist entweder **fest** (franz. fixe; engl. fixed), oder **beweglich** (franz. coulant; engl. moveable). **Spannung** (franz. und engl. tension) ist die Kraft, welche ein gespanntes Seil in der Richtung seiner Axe fortpflanzt. Die Spannungen an den Enden eines geraden Seiles oder Seilstückes sind gleich und entgegengesetzt (§. 86); auch kann das gerade Seil andere Kräfte als die in der Axenrichtung wirkende Spannung nicht fortpflanzen, weil es sich sonst biegen müßte, also nicht gerade bleiben könnte.

§. 151 **Gleichgewicht in einem Knoten.** Gleichgewicht einer Seilmaschine findet statt, wenn in jedem Knoten derselben Gleichgewicht vorhanden ist. Es sind daher zunächst die Verhältnisse des Gleichgewichts an einem Knoten kennen zu lernen.

In einem Knoten $K$, welchen ein Seilstück $AKB$, Fig. 228, bildet, findet Gleichgewicht statt, wenn die sich aus den Seilspannungen $\overline{KS_1} = S_1$ und $\overline{KS_2} = S_2$ ergebende Mittelkraft $\overline{KS} = S$ gleich und entgegengesetzt gerichtet ist der im Knoten angreifenden Kraft $P$, denn die Seilspannungen $S_1$ und $S_2$ bringen im Knoten $K$ dieselben Wirkungen hervor wie zwei ihnen gleiche und gleichgerichtete Kräfte, und drei Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn die eine von ihnen gleich ist und entgegengesetzt wirkt der Mittelkraft aus den beiden anderen (§. 87). Ebenso ist aber auch die Mittelkraft $R$ aus der Kraft $P$ und der einen Spannung $S_1$ gleich und entgegengesetzt gerichtet der zweiten Seilspannung $S_2$ u. s. w. Jedenfalls läßt sich diese Gleichheit dazu benutzen, zwei Bestimmungsstücke, z. B. die Spannung und Richtung des einen Seiles, zu

Fig. 228.



ermitteln. Ist z. B. die Kraft $P$, sowie die Spannung $S_1$ und der von beiden eingeschlossene Winkel

$$AKP = 180 - AKS = 180^0 - \alpha$$

gegeben, so hat man für die zweite Spannung

$$S_2 = \sqrt{P^2 + S_1^2 - 2PS_1 \cos.\alpha}$$

und für ihre Richtung oder Abweichung $BKS = \beta$, von $KS$:

$$\sin.\beta = \frac{S_1 \sin.\alpha}{S_2}.$$

Beispiel. Wenn das Seil $AKB$, Fig. 228, am Ende $B$ aufgehangen, am Ende $A$ aber durch ein Gewicht $G = 135$ Pfund und in der Mitte $K$ durch eine Kraft $P = 109$ Pfund, welche unter einem Neigungswinkel von 25 Grad aufwärts zieht, angespannt wird, so ist die Frage nach der Richtung und Spannung des Seilstückes $KB$. Die Größe der gesuchten Spannung ist:

$$S_2 = \sqrt{109^2 + 135^2 - 2.109.135 \cos.(90^0 - 25^0)}$$
$$= \sqrt{11881 + 18225 - 29430 . \cos. 65^0} = \sqrt{17668,3} = 132,92 \text{ Pfund.}$$

Für den Winkel $\beta$ ist:

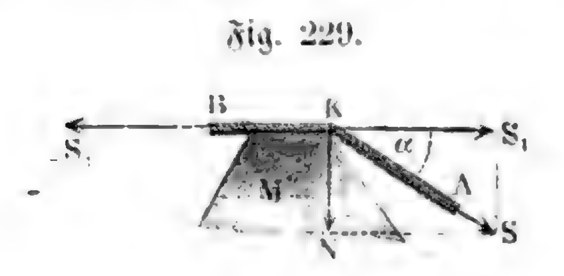
$$\sin.\beta = \frac{S_1 \sin.\alpha}{S_2} = \frac{135 . \sin. 65^0}{132,92}, \ Log.\sin.\beta = 0,96401 - 1,$$

daher $\beta = 67^0 0'$, und die Neigung des Seilstückes $KB$ gegen den Horizont:

$$\beta^0 - 25^0 = 67^0, 0' - 25^0, 0' = 42^0, 0'.$$

§. 152 Wenn ein Seil $AKB$, Fig. 229, dadurch einen festen Knoten $K$ bildet, daß sich das eine Seilstück $BK$ gegen eine feste Stütze $M$ anlegt, während das andere Seilstück $AK$ durch eine Kraft $\overline{KS} = S$ gespannt wird, deren Richtung um einen gewissen Winkel $SKS_1 = \alpha$ von der Richtung des ersteren abweicht, so ist die Spannung des Seilstückes $KB$:

Fig. 229.




$$\overline{KS_1} = S_1 = S \cos.\alpha,$$

weil der zweite Component $\overline{KN} = N = S \sin.\alpha$ der Spannung $S$ von der Stütze $M$ aufgenommen wird.

Uebrigens ist auch

$$S_1 = S\sqrt{1 - (\sin.\alpha)^2},$$

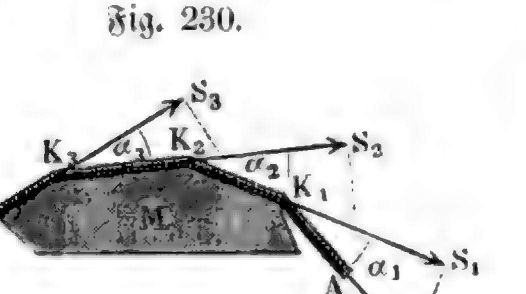
und daher für einen kleinen Ablenkungswinkel $\alpha$:

$$S_1 = \left(1 - \frac{1}{2}(\sin.\alpha)^2\right) S = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) S, \text{ dagegen}$$

$$S = \frac{S}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) S_1 \text{ zu setzen.}$$

Wenn sich ein Seil $AB$, Fig. 230, um einen prismatischen Körper $M$ legt, und dabei in seiner Richtung um die Winkel $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ abgelenkt wird, so wiederholt sich die vorige Kraftzerlegung, so daß im Knoten $K_1$ die Spannung $S$ in:

Fig. 230.




$$S_1 = S \cos. \alpha,$$

im Knoten $K_2$ die Spannung $S_1$ in:

$$S_2 = S_1 \cos. \alpha_2$$
$$= S \cos. \alpha_1 \cos. \alpha_2,$$

und im Knoten $K_3$ die Spannung $S_2$ in:

$$S_3 = S_2 \cos. \alpha_3 = S \cos. \alpha_1 \cos. \alpha_2 \cos. \alpha_3 \text{ übergeht.}$$

Sind die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha$, also einander gleich, so hat man:

$$S_3 = S (\cos. \alpha)^3, \text{ oder allgemein, bei } n \text{ Ablenkungen:}$$
$$S_n = S (\cos. \alpha)^n.$$

Geht das Prisma $M$ in einen Cylinder über, so ist $\alpha$ unendlich klein, und $n$ unendlich groß, daher:

$$S_n = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)^n S = \left(1 - \frac{n\alpha^2}{2}\right) S,$$

oder wenn man den ganzen Ablenkungswinkel $n\alpha$ durch $\beta$ bezeichnet:

$$S_n = \left(1 - \frac{\alpha\beta}{2}\right) S, \text{ d. i.:}$$

$S_n = S$, weil $\alpha$ und folglich auch $\frac{\alpha\beta}{2}$ unendlich klein gegen 1 ist.

Wenn also ein Seil so um einen glatten Körper gelegt ist, daß es einen Theil vom Umfang seines Querschnittes bedeckt, so wird dadurch seine Spannung nicht geändert, es sind also auch im Gleichgewichtszustande, die Spannungen an den beiden Enden desselben einander gleich.

§. 153 Ist der Knoten $K$ ein loser oder beweglicher, wirkt z. B. die Kraft $P$ mittels eines Ringes auf das durchgezogene Seil $AKB$, Fig. 231, so ist zwar wieder die Mittelkraft $S$ aus den Seilspannungen $S_1$ und $S_2$ gleich und entgegengesetzt gerichtet der Kraft $P$ am Ringe: außerdem sind aber noch die Seilspannungen unter sich gleich. Diese Gleichheit folgt

zwar schon aus §. 152, läßt sich aber auch leicht auf folgende Weise nachweisen. Zieht man das Seil um einen gewissen Weg $s$ in dem Ringe fort, so legt die eine Spannung $S_1$ den Weg $s$ und die andere Spannung $S_2$ den Weg $-s$, die Kraft $P$ aber den Weg Null zurück; es ist folglich, vollkommene Biegsamkeit vorausgesetzt, die Arbeit:

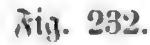
$$P.0 = S_1.s - S_2.s, \text{ d. i. } S_1 s = S_2 s \text{ und } S_1 = S_2.$$

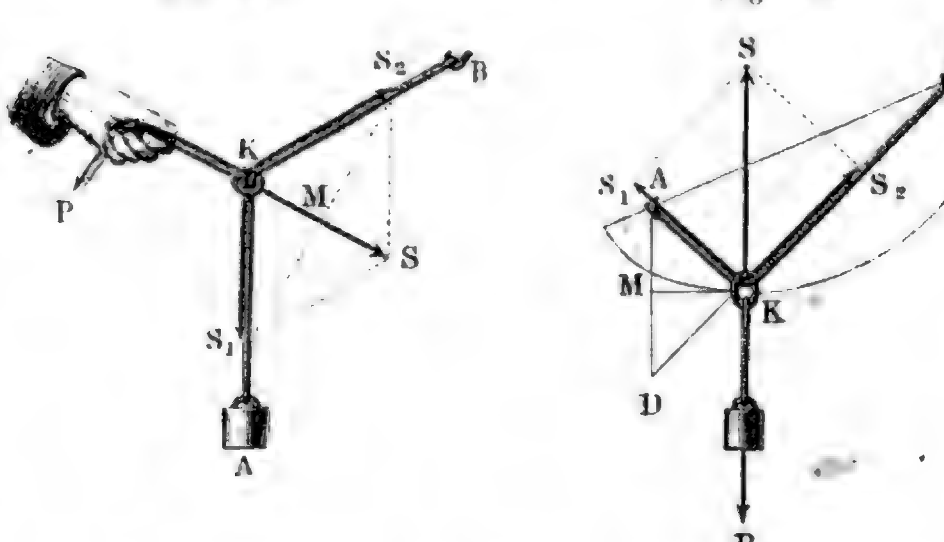
Aus dieser Gleichung der Spannungen folgt wieder die Gleichheit der Winkel $AKS$ und $BKS$, unter welchen die Richtung der Mittelkraft $S$ von den Seilrichtungen abweicht; setzen wir diese Winkel $= \alpha$, so giebt die Auflösung des Rhombus $KS_1 SS_2$:

$$S = P = 2 S_1 \cos.\alpha, \text{ und umgekehrt:}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \cos.\alpha}.$$

Fig. 231.



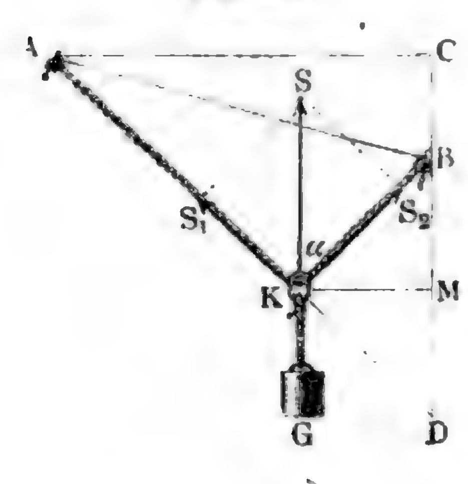



Sind $A$ und $B$, Fig. 232, feste Punkte eines Seiles $AKB$ von gegebener Länge ($2a$) mit einem beweglichen Knoten $K$, so findet man den Ort dieses Knotens, wenn man eine Ellipse construirt, deren Brennpunkte $A$ und $B$ sind und deren große Axe der Seillänge $2a$ gleich ist, und hierauf eine Tangente an diese Curve winkelrecht zur gegebenen Kraftrichtung legt: der sich ergebende Berührungspunkt ist der Ort des Knotens, weil bei der Ellipse die Normale $KS$ mit den Fahrstrahlen $KA$ und $KB$ gleiche Winkel einschließt, gerade so wie die Mittelkraft $S$ mit den Seilspannungen $S_1$ und $S_2$.

Zieht man $AD$ parallel zur gegebenen Kraftrichtung, macht $BD$ gleich der gegebenen Seillänge, halbirt $AD$ in $M$ und errichtet hierauf das Perpendikel $MK$, so erhält man den Ort des Knotens $K$ auch ohne eine Ellipsenconstruction, denn da dann Winkel $AKM$ = Winkel $DKM$ und $AK = DK$ ist, so folgt auch Winkel $AKS$ = Winkel $BKS$ und $AK + KB = DK + KB = DB$.

**Beispiel.** Zwischen den Punkten $A$ und $B$, Fig. 233, ist ein Seil von 9 Fuß Länge durch ein mittels eines Ringes angehängtes Gewicht $G$ von 170 Pfund ausgespannt; die Horizontalentfernung $AC$ beider Punkte ist $6\frac{1}{2}$ Fuß und der Verticalabstand $CB = 2$ Fuß; man sucht den Ort des Knotens sowie die Seilspannungen und Seilrichtungen. Aus der Länge $AD = 9$ Fuß als Hypotenuse und der Horizontalen $AC = 6\frac{1}{2}$ Fuß folgt die Verticale:

Fig. 233.




$$CD = \sqrt{9^2 - 6{,}5^2} = \sqrt{81 - 42{,}25}$$
$$= \sqrt{38{,}75} = 6{,}225 \text{ Fuß};$$

und hieraus die Basis des gleichschenkligen Dreieckes $BDK$:

$$BD = CD - CB = 6{,}225 - 2 = 4{,}225 \text{ Fuß}.$$

Die Aehnlichkeit der Dreiecke $DKM$ und $DAC$ giebt nun:

$$DK = BK = \frac{DM}{DC} \cdot DA = \frac{4{,}225 \,.\, 9}{2 \,.\, 6{,}225} = 3{,}054 \text{ Fuß};$$

hieraus folgt:

$$AK = 9 - 3{,}054 = 5{,}946 \text{ Fuß},$$

und für den Winkel $\alpha$, um welchen die Seilstücke von der Verticalen abweichen:

$$cos.\,\alpha = \frac{BM}{BK} = \frac{2{,}1125}{3{,}054} = 0{,}6917, \text{ daher } \alpha = 46^0\,14',$$

und endlich die Spannung der Seile:

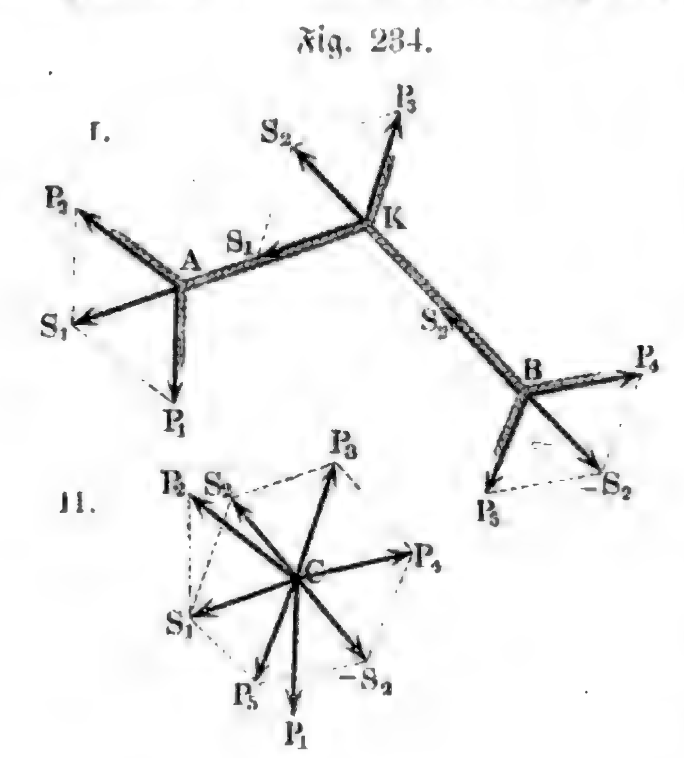
$$S_1 = S_2 = \frac{G}{2\,cos.\,\alpha} = \frac{170}{2 \,.\, 0{,}6917} = 122{,}9 \text{ Pfund}.$$

§. 154 **Gleichgewicht des ganzen Seilpolygons.** Die Verhältnisse des Gleichgewichtes an einem Seilpolygone, d. i. an einem angespannten Seile, welches an verschiedenen Punkten von Kräften ergriffen wird, sind in Uebereinstimmung mit den Verhältnissen des Gleichgewichtes von Kräften, welche in einem Punkte angreifen. Es sei $AKB$, Fig. 234 I, ein von den Kräften

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$$

angespanntes Seil, $P_1$ und $P_2$ greifen in $A$, $P_3$ in $K$ und $P_4$ und $P_5$ in $B$ an. Setzen wir die Spannung des Seilstückes $AK$, $= S_1$

Fig. 234.



und die des Stückes $BK$, $= S_2$, so erhalten wir $S_1$ als Mittelkraft von den in $A$ angreifenden Kräften $P_1$ und $P_2$, und tragen wir den Angriffspunkt $A$ dieser Spannung von $A$ auf $K$, so ergiebt sich wieder $S_2$ als Mittelkraft von $S_1$ und $P_3$ oder von $P_1$, $P_2$ und $P_3$; transportiren wir endlich den Angriffspunkt der Kraft $S_2$ von $K$ nach $B$, so erhalten wir in $S_2$, $P_4$ und $P_5$, oder, da $S_2$ Mittelkraft von $P_1$, $P_2$ und $P_3$ ist, auch in $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ ein sich das Gleichgewicht haltendes Kräftesystem. Wir können hiernach behaupten: wenn gewisse Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. w. ein Seilpolygon im Gleichgewichte erhalten, so werden sie sich auch selbst das Gleichgewicht halten, wenn man sie bei unveränderter Richtung und Größe, in einem einzigen Punkte, z. B. in $C$ (II.), angreifen läßt.

Fig. 235.

Wird das Seil $AK_1 K_2 \ldots B$, Fig. 235, in den Knoten $K_1$, $K_2$ durch Gewichte $G_1$, $G_2$ ... angespannt, und werden die Endpunkte $A$ und $B$ durch die Verticalkräfte $V_1$ und $V_n$ und die Horizontalkräfte $H_1$ und $H_n$ festgehalten, so ist die Summe der Verticalkräfte:

$$V_1 + V_n - (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots)$$

und die Summe der Horizontalkräfte: $H_1 - H_n$. Der Gleichgewichtszustand fordert aber beide Summen $=$ Null; es ist daher

1) $V_1 + V_n = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots$ und

2) $H_1 = H_n$; d. h.

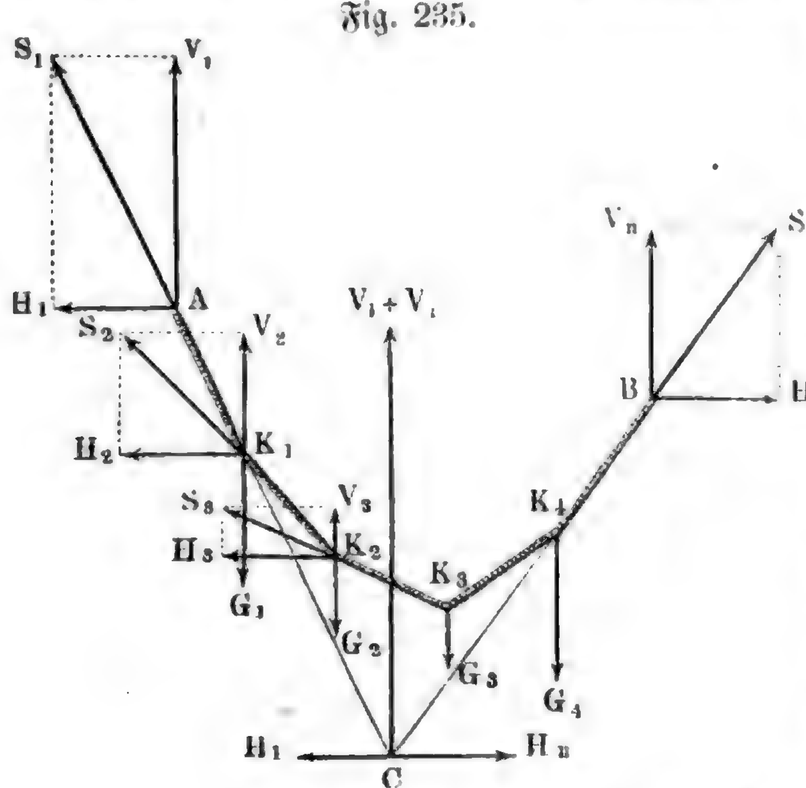
bei einem durch Gewichte angespannten Seilpolygone ist die Summe der Verticalkräfte oder Verticalspannungen in den End- oder Aufhängepunkten gleich der Summe der angehängten Gewichte, und es ist die Horizontalspannung des einen Endes gleich und entgegengesetzt gerichtet der Horizontalspannung im anderen Endpunkte.

Verlängert man die Richtungen der Spannungen $S_1$ und $S_n$ in den Endpunkten $A$ und $B$ bis zu ihrem Durchschnitte $C$ und verlegt man die Angriffspunkte jener Spannungen nach diesem Punkte, so erhält man eine

einzige Kraft $P = V_1 + V_n$, weil sich die Horizontalkräfte $H_1$ und $H_n$ aufheben. Da diese Kraft der Summe $G_1 + G_2 + G_3 + \cdots$ von den angehängten Gewichten das Gleichgewicht hält, so muß der Angriffs- oder Schwerpunkt dieser Gewichte in der Richtung derselben, d. i. in der durch $C$ gehenden Verticallinie, enthalten sein.

§. 155 Aus der Spannung $S_1$ des ersten Seilstückes $A K_1$ und dessen Neigungs- oder Fallwinkel $S_1 A H_1 = \alpha_1$ folgt die Verticalspannung $V_1 = S_1 \, sin. \, \alpha_1$ und die Horizontalspannung $H_1 = S_1 \, cos. \, \alpha_1$. Transportirt man nun den Angriffspunkt dieser Kräfte von $A$ nach dem ersten Knoten $K_1$, so kommt zu diesen Spannungen das vertical abwärts ziehende Gewicht $G_1$, und es ist nun für das folgende Seilstück $K_1 K_2$ die Verticalspannung

Fig. 235.




$$V_2 = V_1 - G_1 = S_1 \, sin. \, \alpha_1 - G_1,$$

wogegen die Horizontalspannung unverändert $H_2 = H_1 = H$ bleibt. Beide Kräfte geben vereinigt die Axenspannung des zweiten Seilstückes:

$$S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2}$$

und die Neigung $\alpha_2$ desselben durch die Formel:

$$tang. \alpha_2 = \frac{V_2}{H} = \frac{S_1 \, sin. \, \alpha_1 - G_1}{S_1 \, cos. \, \alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang. \alpha_2 = tang. \alpha_1 - \frac{G_1}{H}.$$

Trägt man den Angriffspunkt der Kräfte $V_2$ und $H$ von $K_1$ nach $K_2$, so erhält man in dem hinzukommenden Gewichte $G_2$ noch eine neue Verticalkraft, und es entsteht so die Verticalkraft des dritten Seilstückes:

$$V_3 = V_2 - G_2 = V_1 - (G_1 + G_2) = S_1 \, sin. \, \alpha_1 - (G_1 + G_2),$$

während die Horizontalkraft $H_3 = H$ bleibt. Die Gesammtspannung dieses dritten Seilstückes ist mithin:

$$S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2},$$

und für den Neigungswinkel $\alpha_3$ desselben hat man:

$$tang.\,\alpha_3 = \frac{V_3}{H} = \frac{S_1 \sin.\alpha_1 - (G_1 + G_2)}{S_1 \cos.\alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang.\,\alpha_3 = tang.\,\alpha_1 - \frac{G_1 + G_2}{H}.$$

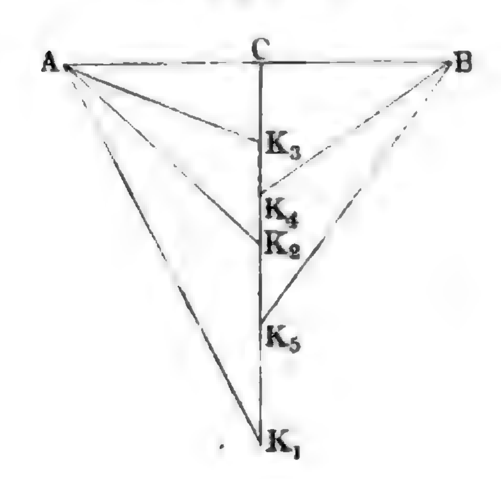
Für den Neigungswinkel des vierten Seilstückes ist:

$$tang.\,\alpha_4 = tang.\,\alpha_1 - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{H} \text{ u. s. w.}$$

Fällt $\frac{G_1 + G_2 + G_3}{H} > tang.\,\alpha_1$ oder $G_1 + G_2 + G_3 > V_1$ aus, so wird $tang.\,\alpha_4$ und folglich auch $\alpha_4$ negativ, so daß die entsprechende Polygonseite $K_3 K_4$ nicht mehr abwärts gerichtet ist, sondern aufsteigt. Dasselbe Verhältniß tritt natürlich auch in jedem anderen Punkte ein, für welchen $G_1 + G_2 + G_3 + \cdots > V_1$ ist.

Uebrigens lassen sich die Spannungen $S_1$, $S_2$, $S_3$ u. s. w., sowie die Neigungswinkel $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ u. s. w. der einzelnen Seiltrümer leicht geometrisch darstellen. Machen wir die Horizontale $CA = CB$, Fig. 236, = der Horizontalspannung $H$ und die Verticale $CK_1$ = der Verticalspannung $V_1$ im Aufhängepunkte $A$, so giebt die Hypotenuse $AK_1$ die Totalspannung $S_1$ des ersten Seilstückes und der Winkel $CAK_1$ die Neigung desselben gegen den Horizont an; tragen wir nun noch die Gewichte $G_1$, $G_2$, $G_3$ u. s. w. als Theile $K_1K_2$, $K_2K_3$ u. s. w. auf $CK$ auf und ziehen die Transversalen $AK_2$, $AK_3$ u. s. w., so erhalten wir in ihnen die Spannungen der folgenden Seilstücke und durch die Winkel $CAK_2$, $CAK_3$ u. s. w. auch die Neigungswinkel $\alpha_2$, $\alpha_3$ u. s. w. dieser Seilstücke.

Fig. 236.




§. 156 Aus den Untersuchungen im vorigen Paragraphen stellt sich als Gesetz für das Gleichgewicht der durch Gewichte gespannter Seile heraus:

1) die Horizontalspannung ist an allen Stellen des Seiles eine und dieselbe, nämlich:

$$H = S_1 \cos.\alpha_1 = S_n \cos.\alpha_n;$$

2) die Verticalspannung an irgend einer Stelle ist gleich der Verticalspannung am darüber befindlichen Ende minus der Summe der darüberhängenden Gewichte, also:

$$V_m = V_1 - (G_1 + G_2 + \cdots G_{m-1}).$$

Allgemeiner läßt sich dieser Satz auch so ausdrücken: Die Verticalspannung an irgend einer Stelle ist gleich der Verticalspannung an irgend einer tieferen oder höheren Stelle plus oder minus der Summe von den zwischen beiden Punkten hängenden Gewichten.

Kennt man außer den Gewichten den Winkel $\alpha_1$ und die Horizontalspannung $H$, so erhält man die Verticalspannung am Ende $A$:

$$V_1 = H . tang. \alpha_1.$$

und demnach die am Ende $B$:

$$V_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n) - V_1.$$

Sind hingegen die Neigungswinkel $\alpha_1$ und $\alpha_n$ an beiden Aufhängepunkten $A$ und $B$ bekannt, so ergeben sich die Horizontal- und Verticalspannungen zugleich; es ist nämlich:

$$\frac{V_n}{V_1} = \frac{tang. \alpha_n}{tang. \alpha_1},$$

und daher:

$$V_n = \frac{V_1 \, tang. \alpha_n}{tang. \alpha_1}.$$

Da man noch $V_1 + V_n = G_1 + G_2 + \cdots$, d. i.:

$$\left(\frac{tang. \alpha_1 + tang. \alpha_n}{tang. \alpha_1}\right) V_1 = G_1 + G_2 \cdots$$

hat, so folgt:

$$V_1 = \frac{(G_1 + G_2 + \cdots) \, tang. \alpha_1}{tang. \alpha_1 + tang. \alpha_n} = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{sin. \alpha_1 \, cos \, \alpha_n}{sin. (\alpha_1 + \alpha_n)},$$

$$V_n = \frac{(G_1 + G_2 + \cdots) \, tang. \alpha_n}{tang. \alpha_1 + tang. \alpha_n} = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{sin. \alpha_n \, cos. \alpha_1}{sin. (\alpha_1 + \alpha_n)},$$

und hieraus:

$$H = V_1 \, cotg. \alpha_1 = V_n \, cotg. \alpha_n = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{cos. \alpha_1 \, cos. \alpha_n}{sin. (\alpha_1 + \alpha_n)}.$$

Haben die beiden Seilenden einerlei Neigung, ist also $\alpha_n = \alpha_1$, so hat man $V_1 = V_n = \frac{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}{2}$; dann trägt also das eine Ende $A$ eben so viel wie das andere Ende $B$.

Diese Formeln gelten natürlich auch für jedes beliebige Paar Punkte oder Knoten des Seilpolygons, wenn man nur statt $G_1 + G_2 + \cdots$ die Summe der zwischenhängenden Gewichte u. s. w. einsetzt. Für die Verticalspannungen der Seile, welche ein und dasselbe Gewicht $G_m$ zwischen sich halten und die Neigungswinkel $\alpha_m$ und $\alpha_{m+1}$ haben, ist z. B.:

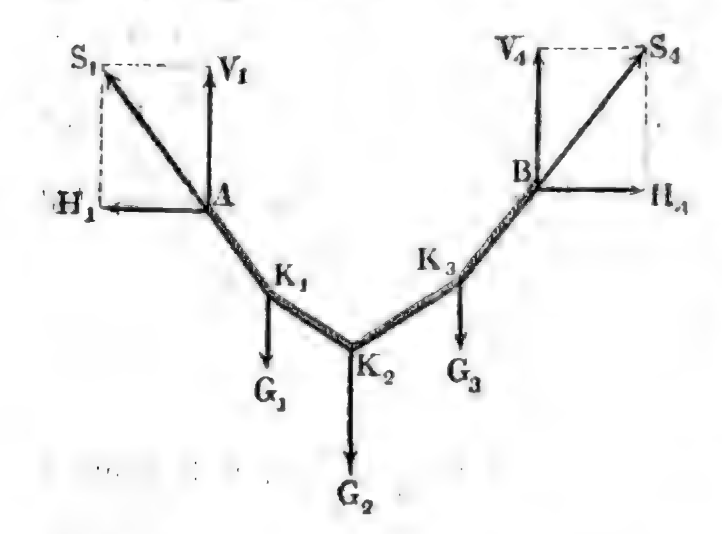
$$V_m = G_m \frac{sin.\,\alpha_m\,cos.\,\alpha_{m+1}}{sin.\,(\alpha_m + \alpha_{m+1})} = \frac{G_m}{1 + cotg.\,\alpha_m\,tang.\,\alpha_{m+1}} \text{ und}$$

$$V_{m+1} = G_m \frac{sin.\,\alpha_{m+1}\,cos.\,\alpha_m}{sin.\,(\alpha_m + \alpha_{m+1})} = \frac{G_m}{1 + tang.\,\alpha_m\,cotg.\,\alpha_{m+1}}.$$

**Uebrigens gelten diese Gesetze auch für durch Parallelkräfte angespannte Seilpolygone überhaupt, wenn man statt der Verticalen die Kraftrichtungen einführt.**

Beispiel. Das Seilpolygon $A K_1 K_2 K_3 B$, Fig. 237, ist durch drei Gewichte $G_1 = 20$, $G_2 = 30$ und $G_3 = 16$ Pfund, sowie durch die Horizontalkraft $H_1 = 25$ Pfund gespannt, man sucht die Axenspannungen und Neigungswinkel der Seiten unter der Voraussetzung, daß die Seilenden in $A$ und $B$ einerlei Neigung haben. Die Verticalspannungen in beiden Enden sind hier gleich, nämlich:

Fig. 237.




$$V_1 = V_4 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2} = \frac{20 + 30 + 16}{2} = 33 \text{ Pfund},$$

die Verticalspannung des zweiten Seilstückes ist dagegen:

$$V_2 = V_1 - G_1 = 33 - 20 = 13 \text{ Pfund},$$

und die des dritten:

$$V_3 = V_4 - G_3 \text{ (oder } G_1 + G_2 - V_1) = 33 - 16 = 17 \text{ Pfund};$$

die Neigungswinkel $\alpha_1$ und $\alpha_4$ der Seitenden sind bestimmt durch:

$$tang.\,\alpha_1 = tang.\,\alpha_4 = \frac{V_1}{H} = \frac{33}{25} = 1{,}32,$$

die der zweiten und dritten Seilstücke aber durch:

$$tang.\,\alpha_2 = tang.\,\alpha_1 - \frac{G_1}{H} = 1{,}32 - \frac{20}{25} = 0{,}52 \text{ und}$$

$$tang.\,\alpha_3 = tang.\,\alpha_4 - \frac{G_3}{H} = 1{,}32 - \frac{16}{25} = 0{,}68;$$

es ist hiernach:

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 52^0\,51',\ \alpha_2 = 27^0\,28',\ \alpha_3 = 34^0\,13';$$

endlich sind die Axenspannungen:

$$S_1 = S_4 = \sqrt{V_1^2 + H^2} = \sqrt{33^2 + 25^2} = \sqrt{1714} = 41{,}40 \text{ Pfund},$$

$$S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2} = \sqrt{13^2 + 25^2} = \sqrt{794} = 18{,}18 \text{ Pfund, und}$$

$$S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2} = \sqrt{17^2 + 25^2} = 30{,}23 \text{ Pfund}.$$

Allgemeiner läßt sich dieser Satz auch so ausdrücken: Die Verticalspannung an irgend einer Stelle ist gleich der Verticalspannung an irgend einer tieferen oder höheren Stelle plus oder minus der Summe von den zwischen beiden Punkten hängenden Gewichten.

Kennt man außer den Gewichten den Winkel $\alpha_1$ und die Horizontalspannung $H$, so erhält man die Verticalspannung am Ende $A$:

$$V_1 = H \,.\, tang.\, \alpha_1,$$

und demnach die am Ende $B$:

$$V_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n) - V_1.$$

Sind hingegen die Neigungswinkel $\alpha_1$ und $\alpha_n$ an beiden Aufhängepunkten $A$ und $B$ bekannt, so ergeben sich die Horizontal- und Verticalspannungen zugleich; es ist nämlich:

$$\frac{V_n}{V_1} = \frac{tang.\, \alpha_n}{tang.\, \alpha_1},$$

und daher:

$$V_n = \frac{V_1\, tang.\, \alpha_n}{tang.\, \alpha_1}.$$

Da man noch $V_1 + V_n = G_1 + G_2 + \cdots$, d. i.:

$$\left(\frac{tang.\, \alpha_1 + tang.\, \alpha_n}{tang.\, \alpha_1}\right) V_1 = G_1 + G_2 \cdots$$

hat, so folgt:

$$V_1 = \frac{(G_1 + G_2 + \cdots)\, tang.\, \alpha_1}{tang.\, \alpha_1 + tang.\, \alpha_n} = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{sin.\, \alpha_1\, cos\, \alpha_n}{sin.(\alpha_1 + \alpha_n)},$$

$$V_n = \frac{(G_1 + G_2 + \cdots)\, tang.\, \alpha_n}{tang.\, \alpha_1 + tang.\, \alpha_n} = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{sin.\, \alpha_n\, cos.\, \alpha_1}{sin.\,(\alpha_1 + \alpha_n)},$$

und hieraus:

$$H = V_1\, cotg.\, \alpha_1 = V_n\, cotg.\, \alpha_n = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{cos.\, \alpha_1\, cos.\, \alpha_n}{sin.\,(\alpha_1 + \alpha_n)}.$$

Haben die beiden Seilenden einerlei Neigung, ist also $\alpha_n = \alpha_1$, so hat man $V_1 = V_n = \frac{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}{2}$; dann trägt also das eine Ende $A$ eben so viel wie das andere Ende $B$.

Diese Formeln gelten natürlich auch für jedes beliebige Paar Punkte oder Knoten des Seilpolygons, wenn man nur statt $G_1 + G_2 + \cdots$ die Summe der zwischenhängenden Gewichte u. s. w. einsetzt. Für die Verticalspannungen der Seile, welche ein und dasselbe Gewicht $G_m$ zwischen sich halten und die Neigungswinkel $\alpha_m$ und $\alpha_{m+1}$ haben, ist z. B.:

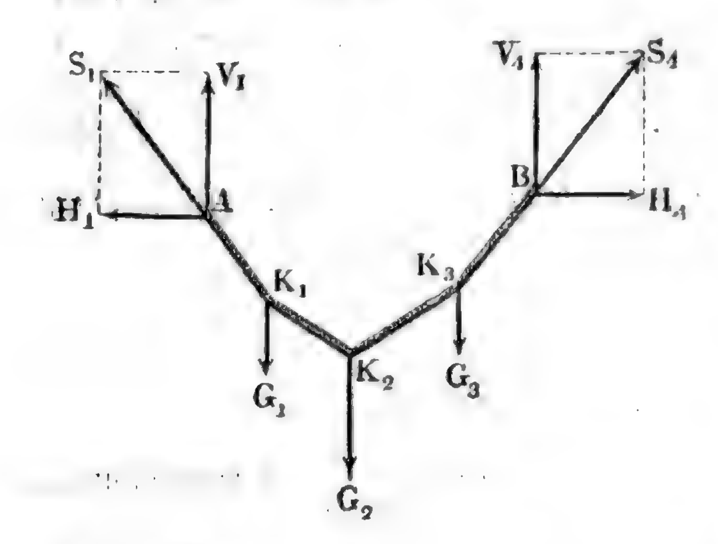
$$V_m = G_m \frac{\sin.\alpha_m \cos.\alpha_{m+1}}{\sin.(\alpha_m + \alpha_{m+1})} = \frac{G_m}{1 + \operatorname{cotg}.\alpha_m \operatorname{tang}.\alpha_{m+1}} \text{ und}$$

$$V_{m+1} = G_m \frac{\sin.\alpha_{m+1} \cos.\alpha_m}{\sin.(\alpha_m + \alpha_{m+1})} = \frac{G_m}{1 + \operatorname{tang}.\alpha_m \operatorname{cotg}.\alpha_{m+1}}.$$

**Uebrigens gelten diese Gesetze auch für durch Parallelkräfte angespannte Seilpolygone überhaupt, wenn man statt der Verticalen die Kraftrichtungen einführt.**

Beispiel. Das Seilpolygon $A K_1 K_2 K_3 B$, Fig. 237, ist durch drei Gewichte $G_1 = 20$, $G_2 = 30$ und $G_3 = 16$ Pfund, sowie durch die Horizontalkraft $H_1 = 25$ Pfund gespannt, man sucht die Axenspannungen und Neigungswinkel der Seiten unter der Voraussetzung, daß die Seilenden in $A$ und $B$ einerlei Neigung haben. Die Verticalspannungen in beiden Enden sind hier gleich, nämlich:

Fig. 237.




$$V_1 = V_4 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2}$$
$$= \frac{20 + 30 + 16}{2}$$
$$= 33 \text{ Pfund},$$

die Verticalspannung des zweiten Seilstückes ist dagegen:

$$V_2 = V_1 - G_1 = 33 - 20 = 13 \text{ Pfund},$$

und die des dritten:

$$V_3 = V_4 - G_3 \text{ (oder } G_1 + G_2 - V_1) = 33 - 16 = 17 \text{ Pfund};$$

die Neigungswinkel $\alpha_1$ und $\alpha_4$ der Seilenden sind bestimmt durch:

$$\operatorname{tang}.\alpha_1 = \operatorname{tang}.\alpha_4 = \frac{V_1}{H} = \frac{33}{25} = 1{,}32,$$

die der zweiten und dritten Seilstücke aber durch:

$$\operatorname{tang}.\alpha_2 = \operatorname{tang}.\alpha_1 - \frac{G_1}{H} = 1{,}32 - \frac{20}{25} = 0{,}52 \text{ und}$$

$$\operatorname{tang}.\alpha_3 = \operatorname{tang}.\alpha_4 - \frac{G_3}{H} = 1{,}32 - \frac{16}{25} = 0{,}68;$$

es ist hiernach:

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 52^0 51', \ \alpha_2 = 27^0 28', \ \alpha_3 = 34^0 13';$$

endlich sind die Axenspannungen:

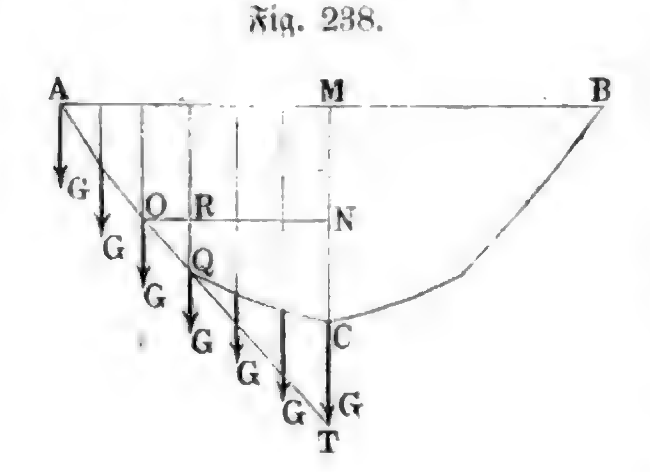
$$S_1 = S_4 = \sqrt{V_1^2 + H^2} = \sqrt{33^2 + 25^2} = \sqrt{1714} = 41{,}40 \text{ Pfund},$$

$$S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2} = \sqrt{13^2 + 25^2} = \sqrt{794} = 28{,}18 \text{ Pfund, und}$$

$$S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2} = \sqrt{17^2 + 25^2} = 30{,}23 \text{ Pfund}.$$

§. 157 **Die Parabel als Kettenlinie.** Setzen wir jetzt voraus, daß das Seil $ACB$, Fig. 238, durch lauter gleiche, in gleichen Horizontalabständen aufgehängte Gewichte $G_1, G_2, G_3$ u. s. w. gespannt sei. Bezeichnen wir den Horizontalabstand $AM$ zwischen dem Aufhängepunkte $A$ und dem tiefsten Punkte $C$ durch $b$, sowie den Verticalabstand $CM$ durch $a$; setzen wir ferner für einen anderen Punkt $O$ des Seilpolygons die gleichliegenden Coordinaten $ON = y$ und $CN = x$.

Fig. 238.




Ist nun die Verticalspannung in $A$, $= V$, so folgt die in $O$, $= \frac{y}{b} \cdot V$, und daher für den Neigungswinkel $NOT = ROQ = \varphi$ des Seilstückes $OQ$ gegen den Horizont:

$$tang.\,\varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H},$$

wo $H$ die constante Horizontalspannung ausdrückt.

Es ist hiernach $QR = \overline{OR}\,.\,tang.\,\varphi = \overline{OR} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H}$ der Höhenabstand zweier benachbarten Eckpunkte des Seilpolygons. Setzen wir $y$ der Reihe nach $\overline{OR}$, $2\overline{OR}$, $3\overline{OR}$ u. s. w., so giebt nun die letzte Gleichung die entsprechenden Höhenabstände des ersten, zweiten dritten Eckpunktes u. s. w., von unten nach oben gezählt; und addiren wir endlich alle diese Werthe, deren Anzahl $= m$ sein möge, so erhalten wir die Höhe $CN$ des Punktes $O$ über dem Fußpunkte $C$. Es ist nämlich:

$$x = CN = \frac{V}{H} \cdot \frac{OR}{b} \left(\overline{OR} + 2\overline{OR} + 3\overline{OR} + \cdots + m\,.\,\overline{OR}\right)$$

$$= \frac{V}{H} \cdot \frac{\overline{OR^2}}{b} (1 + 2 + 3 + \cdots + m) = \frac{V}{H} \cdot \frac{m\,(m+1)}{1\,.\,2} \cdot \frac{\overline{OR^2}}{b}$$

der Theorie der arithmetischen Reihen zufolge.

Endlich $OR = \frac{y}{m}$ gesetzt, erhält man:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{m\,(m+1)}{2\,m^2} \cdot \frac{y^2}{b},$$

oder, wenn man für den Neigungswinkel $\alpha$ des Seilendes $A$,

$tang.\,\alpha = \frac{V}{H}$ einsetzt:

$$x = \frac{m(m+1)\, y^2 \, tang.\, \alpha}{2\, m^2\, b}.$$

Ist die Zahl der Gewichte sehr groß, so kann $m + 1 = m$ angenommen werden, weshalb man erhält:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{y^2}{2\,b} = \frac{y^2}{2\,b}\, tang.\, \alpha.$$

Für $x = a$ ist $y = b$, daher hat man auch:

$$a = \frac{V}{H} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b\, tang.\, \alpha}{2}$$

und hiernach einfacher: $\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2}$,

welche Gleichung nur der Parabel zukommt.

Wird also ein übrigens gewichtsloses Seil durch unendlich viele gleiche, in gleichen Horizontalabständen angreifende Gewichte gespannt, so geht das Seilpolygon in eine **Parabel** über.

Für den Neigungswinkel $\varphi$ hat man hiernach:

$$tang.\, \varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{2\,a}{b} = 2\,y \cdot \frac{a}{b^2} = 2\,y \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{2\,x}{y}, \text{ sowie}$$

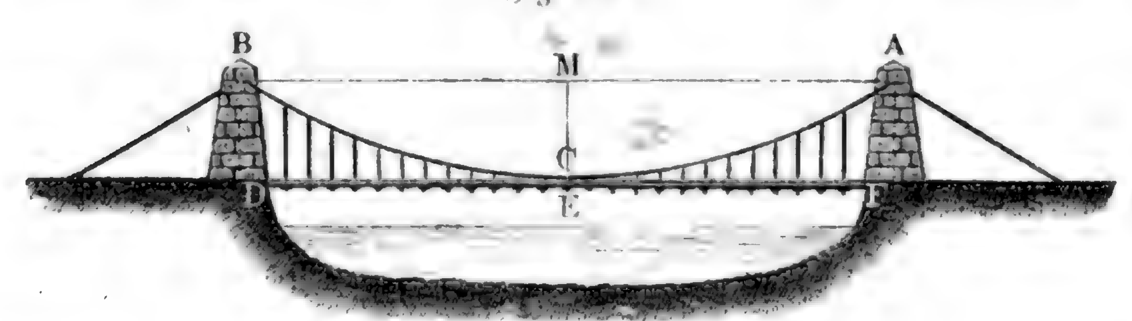
$$tang.\, \alpha = \frac{2\,a}{b}.$$

Die **Subtangente** für den Punkt $O$ ist:

$$\overline{NT} = \overline{ON}\, tang.\, \varphi = y\, \frac{2\,x}{y} = 2\,x = 2\,\overline{CN}.$$

Wären die Ketten und Hängeisen einer **Kettenbrücke** $ABDF$, Fig. 239,

Fig. 239.




gewichtslos, oder sehr leicht in Hinsicht auf das deshalb nur zu berücksichtigende Gewicht der belasteten Brücke $DEF$, so würde die Kette $ACB$ eine Parabel bilden.

Beispiel. Es sei die ganze Belastung der Kettenbrücke in Fig. 239, $G = 2\,V = 320000$ Pfund, die Spannweite $AB, = 2\,b = 150$ Fuß, die Bogenhöhe $CM, = a = 15$ Fuß, man sucht die Spannungen und übrigen Verhältnisse der Kette. Die Neigung der Kettenenden gegen den Horizont ist bestimmt durch die Formel:

$tang.\, \alpha = \frac{2\,a}{b} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5} = 0{,}4$, es ist also dieselbe $\alpha = 21^0\, 48'$.

Die Verticalspannung an jedem Aufhängepunkte ist:

$$V = \frac{1}{2}\,\text{Gewicht} = 160000 \text{ Pfund};$$

die Horizontalspannung:

$$H = V\,cotg.\,\alpha = 160000 \cdot \frac{1}{0{,}4} = 400000 \text{ Pfund},$$

endlich die Gesammtspannung an einem Ende:

$$S = \sqrt{V^2 + H^2} = V\sqrt{1 + cotg.\,\alpha^2} = 160000 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{0{,}4}\right)^2}$$

$$= 160000\sqrt{\frac{29}{4}} = 80000\sqrt{29} = 430813 \text{ Pfund}.$$

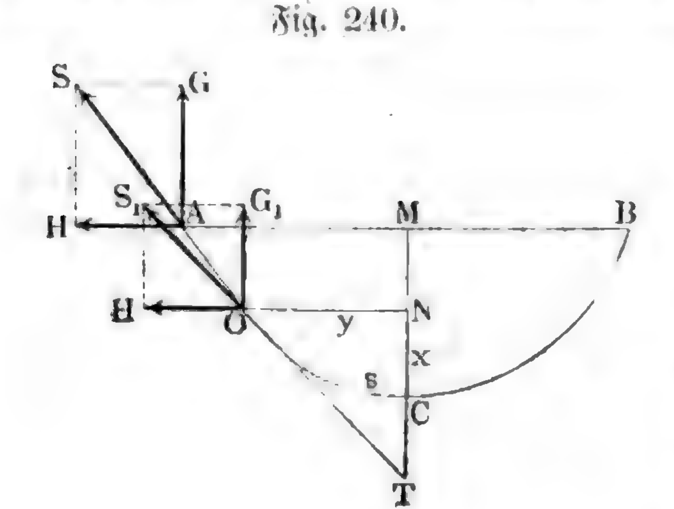
§. 158 **Die Kettenlinie.** Wird ein an zwei Punkten aufgehängtes vollkommen biegsames und unausdehnbares Seil, oder eine aus kurzen Gliedern bestehende Kette, durch das eigene Gewicht gespannt, so bildet die Axe derselben eine krumme Linie, die den Namen Kettenlinie (franz. chainette; engl. catenary) erhalten hat. Die unvollkommen elastischen und ausdehnbaren Schnüre, Seile, Bänder, Ketten u. s. w., wie sie im praktischen Leben vorkommen, geben krumme Linien, welche sich der Kettenlinie nur annähern, meist aber als solche behandelt werden können. Nach dem Vorhergehenden ist die Horizontalspannung der Kettenlinie an allen Punkten gleich stark, dagegen die Verticalspannung in einem Punkte gleich der Verticalspannung im darüber befindlichen Aufhängepunkte minus Gewicht des darüber befindlichen Kettenstückes. Da die Verticalspannung im Scheitel, wo die Kettenlinie horizontal ist, sich vernullt, also die Verticalspannung im Aufhängepunkte gleich ist dem Gewichte der Kette vom Aufhängepunkte bis zum Scheitel, so ist die Verticalspannung an jeder Stelle auch gleich dem Gewichte des darunter befindlichen Seil- oder Kettenstückes.

Sind gleich lange Stücke der Kette gleich schwer, so entsteht die sogenannte gemeine Kettenlinie, von welcher hier nur die Rede ist. Wiegt ein Seil- oder Kettenstück von 1 Fuß Länge, $\gamma$, und ist der den Coordinaten $CM = a$ und $MA = b$, Fig. 240, entsprechende Bogen $AOC = l$, so hat man das Gewicht des Kettenstückes $AOC$,

$$G = l\gamma;$$

ist dagegen die Länge des den Coordinaten $CN = x$ und $NO = y$ angehörigen Bogens $= s$, so hat man für das Gewicht dieses Bogens, $V = s\gamma$. Setzen wir endlich die Länge eines gleichartigen Kettenstückes, dessen Gewicht gleich ist der Horizontalspannung $H$, $= c$, so haben wir noch $H = c\gamma$,

Fig. 240.



und daher für die Neigungswinkel $\alpha$ und $\varphi$ in den Punkten $A$ und $O$:

$$tang.\, \alpha = tang.\, S\,A\,H = \frac{G}{H} = \frac{l\,\gamma}{c\,\gamma} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$tang.\, \varphi = tang.\, N\,O\,T = \frac{V}{H} = \frac{s\,\gamma}{c\,\gamma} = \frac{s}{c}.$$

§. 159

Macht man die Horizontale $CH$, Fig. 241, gleich der Länge $c$ des die Horizontalspannung messenden Kettenstückes und $CG$ gleich der Länge $l$ des Kettenbogens von der einen Seite, so bekommt man, in Uebereinstimmung mit §. 155, in der Hypotenuse $GH$ die Größe und die Richtung der Seilspannung im Aufhängepunkte $A$, denn es ist:

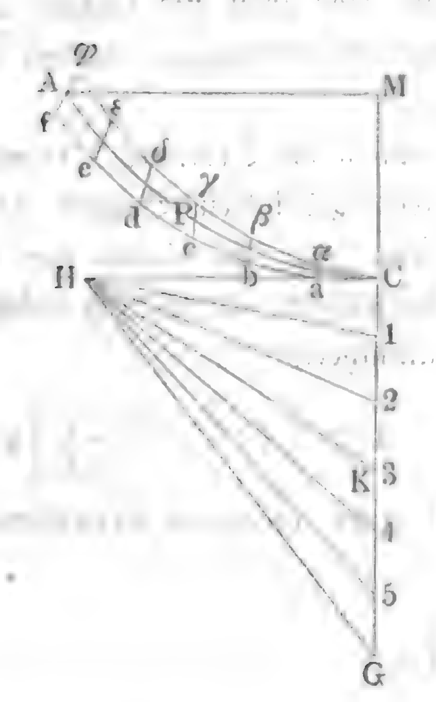
$$tang.\, C\,H\,G = \frac{C\,G}{C\,H} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$\overline{GH} = \sqrt{\overline{C\,G}^2 + \overline{C\,H}^2} = \sqrt{l^2 + c^2}, \text{ oder}$$

$$S = \sqrt{G^2 + H^2} = \sqrt{l^2 + c^2} \cdot \gamma = \overline{G\,H}\,.\,\gamma.$$

Theilt man nun $CG$ in gleiche Theile und zieht von $H$ nach den Theilpunkten 1, 2, 3 u. s. w. gerade Linien, so geben diese die Maße und Richtungen der Spannungen derjenigen Punkte in der Kettenlinie an, welche man erhält, indem man die Länge des Kettenbogens $A\,C$ in ebenso viel gleiche Theile theilt. So giebt z. B. die Linie $H\,K$ die Größe und Richtung der Spannung oder die Tangente im Theilpunkte $(P)$ des Bogens $A\,P\,C$ an, weil in diesem Punkte die Verticalspannung $= \overline{C\,K}\,.\,\gamma$ ist, während die Horizontalspannung unverändert $= c\,.\,\gamma$ bleibt, also für diesen Punkt

Fig. 241.




$$tang.\, \varphi = \frac{\overline{C\,K}\,.\,\gamma}{c\,\gamma} = \frac{C\,K}{C\,H}$$

ist, wie die Figur auch wirklich giebt.

Diese Eigenthümlichkeit der Kettenlinie läßt sich benutzen, um diese Curve annähernd genau mechanisch zu construiren. Nachdem man die gegebene Länge $C\,G$ des zu construirenden Kettenlinienbogens in sehr viele gleiche Theile getheilt, die die Horizontalspannung messende Linie $C\,H = c$ aufgetragen und die Transversalen $H\,1, H\,2, H\,3$ u. s. w. gezogen hat, trage man auf $CH$ einen Theil $\overline{C1}$ als $Ca$ des Kettenbogens auf, ziehe nun durch den erhaltenen Theilpunkt $(a)$ mit der Transversalen $\overline{H1}$ eine Parallele und schneide von ihr wieder einen Theil $a\,b = \overline{C\,1}$ ab, ebenso

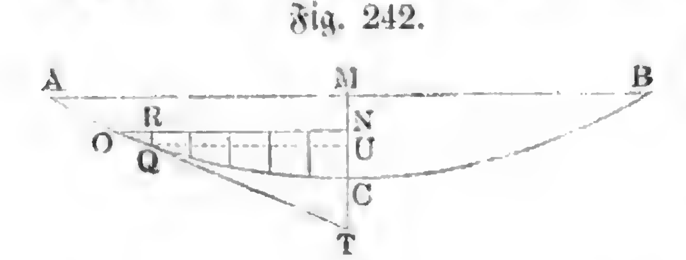
ziehe man durch den erhaltenen Eckpunkt ($b$) eine Parallele zur Transversalen $\overline{H2}$ und schneide von ihr $bc = \overline{C1}$ gleich einem Bogentheile ab; jetzt ziehe man durch den neuen Endpunkt $c$ eine Parallele zu $\overline{H3}$, mache $cd$ wieder gleich einem Bogenstück und fahre auf diese Weise fort, bis man das Polygon $Cabcdef$ erhält. Nun construire man ein anderes Polygon $C\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ dadurch, daß man $C\alpha$ parallel $H1$, $\alpha\beta$ parallel $\overline{H2}$, $\beta\gamma$ parallel $\overline{H3}$ u. s. w. legt und $C\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma$ u. s. w., $= \overline{C1} = \overline{12} = \overline{23}$ u. s. w. macht. Führt man endlich durch die Mittelpunkte von $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ . . . $f\varphi$ einen Zug $CPA$, so erhält man in demselben annähernd die gesuchte Kettenlinie.

Durch Aufhängen einer feingegliederten Kette an einer senkrechten Wand läßt sich für praktische Bedürfnisse oft genau genug eine Kettenlinie ebenfalls finden, welche gewissen Bedingungen, z. B. einer gegebenen Bogenweite und Bogenhöhe, oder einer gegebenen Bogenweite und Bogenlänge u. s. w. entspricht.

§. 160 **Angenäherte Gleichung der Kettenlinie.** In vielen Fällen, und namentlich auch bei Anwendungen in der Architektur und in dem Maschinenwesen, ist die Horizontalspannung der Kettenlinie sehr groß und deshalb ihre Bogenhöhe klein gegen die Weite. Unter dieser Voraussetzung ermittelt sich eine Gleichung dieser Curve auf folgende Weise.

Bezeichnet $s$ die Länge, $x$ die Abscisse $CN$ und $y$ die Ordinate $NO$ eines sehr gedrückten Bogens $CO$, Fig. 242, so können wir der beigefügten Anmerkung zufolge, annähernd

Fig. 242.




$$s = \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y,$$

daher die Verticalspannung in einem Punkte $O$ eines niedrigen Kettenlinienbogens:

$$V = \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y\gamma,$$

und für den Tangentenwinkel $TON = \varphi$ desselben:

$$tang.\,\varphi = \frac{s}{c} = \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]\frac{y}{c} \text{ setzen.}$$

Theilen wir die Ordinate $y$ in $m$ gleiche Theile, so finden wir das einem solchen Theile $OR$ entsprechende Stück $RQ = NU$ der Absciſſe $x$, indem wir setzen:

$$\overline{RQ} = \overline{OR}\,.\,tang.\,\varphi = \overline{OR}\,.\,\frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right].$$

Da $x$ klein sein soll gegen $y$, so ist annähernd $\overline{RQ} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}$.

Setzt man nun $OR = \frac{y}{m}$ und successiv für $y$ die Werthe $\frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. s. w., so bekommt man nach und nach sämmtliche Theile von $x$, deren Summe nun

$$x = \frac{y^2}{cm^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + m) = \frac{y^2}{cm^2} \cdot \frac{m(m+1)}{2} \text{ (§. 157)} = \frac{y^2}{2c}$$

ist und wieder der Gleichung der Parabel entspricht.

Gehen wir aber noch genauer, setzen wir in

$$\overline{QR} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right],$$

statt $x$ den letztgefundenen Werth $\frac{y^2}{2c}$ ein, so erhalten wir:

$$\overline{QR} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}\left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{OR}{c}\left(y + \frac{1}{6} \cdot \frac{y^3}{c^2}\right).$$

Nehmen wir nun wieder nach einander $y = \frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. s. w., und setzen wir statt $\overline{OR}$ ebenfalls $\frac{y}{m}$, so finden wir nach und nach sämmtliche Theile von $x$ und hieraus die Summe selbst:

$$x = \frac{y}{cm}\left[\frac{y}{m}(1+2+3+\cdots+m) + \frac{1}{6c^2} \cdot \left(\frac{y}{m}\right)^3 (1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3)\right].$$

Für eine sehr große Anzahl von Gliedern ist aber die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis $m$, $= \frac{m^2}{2}$ und die Summe ihrer Cuben, $= \frac{m^4}{4}$ (s. „Ingenieur“, Seite 88); es ist demnach:

$$x = \frac{y}{c}\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{6c^2} \cdot \frac{y^3}{4}\right), \text{ d. i.}$$

$$1)\quad x = \frac{y^2}{2c} + \frac{y^4}{24c^3} = \frac{y^2}{2c}\left[1 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{y}{c}\right)^2\right],$$

die Gleichung einer stark gespannten Kettenlinie.

Durch Umkehrung folgt:

$$y^2 = 2cx - \frac{y^4}{12c^2} = 2cx - \frac{4c^2x^2}{12c^2} = 2cx - \frac{x^2}{3},$$

daher:

$$2)\quad y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}}, \text{ oder annähernd,}$$

$$y = \sqrt{2cx}\left(1 - \frac{x}{12c}\right).$$

Das Maß der Horizontalspannung ergiebt sich ferner:

$$c = \frac{y^2}{2x} + \frac{y^4}{2x \cdot 12c^2} = \frac{y^2}{2x} + \frac{y^4}{24x} \cdot \frac{4x^2}{y^4}, \text{ d. i.}$$

$$3) \; c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6}.$$

Der Tangentenwinkel $\varphi$ wird bestimmt durch die Formel

$$tang. \varphi = \frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = \frac{y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}{\frac{y^2}{2x}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{2x}{y}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right], \text{ d. i.}$$

$$4) \; tang. \varphi = \frac{2x}{y}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right].$$

Hierzu ist endlich noch die Rectificationsformel:

$$5) \; s = y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = y\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{y}{c}\right)^2\right] \text{ zu setzen.}$$

Beispiele. 1) Für eine Spannweite $2b = 16$ Fuß und Bogenhöhe $a = 2\frac{1}{2}$ Fuß ist die Länge der Kettenlinie:

$$2l = 2b\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 16 \cdot \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2,5}{8}\right)^2\right]$$

$$= 16 + 16 \cdot 0,065 = 17,04 \text{ Fuß},$$

ferner die Länge des die Horizontalspannung messenden Kettenstückes:

$$c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{64}{5} + \frac{5}{12} = 12,8 + 0,417 = 13,217 \text{ Fuß};$$

die Tangente des Aufhängewinkels:

$$tang. \alpha = \frac{2a}{b}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \frac{5}{8} \cdot \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{16}\right)^2\right] = \frac{5 \cdot 1,03255}{8} = 0,6453\ldots,$$

hiernach der Aufhängewinkel selbst, $\alpha = 32^0 50'$.

2) Eine Kette von 10 Fuß Länge und $9\frac{1}{2}$ Fuß Spannweite hat die Bogenhöhe:

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}(l - b)b} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{(10 - 9\frac{1}{2})}{2} \cdot \frac{9\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{19}{16}} = \sqrt{\frac{57}{32}}$$

$$= \sqrt{1,7812} = 1,335 \text{ Fuß},$$

und das Maß der Horizontalspannung:

$$c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{4,75^2}{2 \cdot 1,335} + \frac{1,335}{6} = 8,673 \text{ Fuß}.$$

3) Wenn eine 30 Fuß lange und 8 Pfund schwere Schnur mit einer Kraft von 20 Pfund so viel wie möglich horizontal ausgespannt wird, so ist die Verticalspannung:

$$V = \frac{1}{2} G = 4 \text{ Pfund},$$

die Horizontalkraft:

$$H = \sqrt{S^2 - V^2} = \sqrt{20^2 - 4^2} = \sqrt{384} = 19{,}596 \text{ Pfund},$$

die Tangente des Aufhängewinkels:

$$tang.\, \varphi = \frac{V}{H} = \frac{4}{19{,}596} = 0{,}20412,$$

der Winkel $\varphi$ selbst $= 11^0\, 32'$; ferner das Maß der Horizontalspannung:

$$c = \frac{H}{\gamma} = H \cdot \frac{8}{30} = \frac{30}{8}\, H = 73{,}485 \text{ Fuß},$$

die Spannweite:

$$2b = 2l\left[1 - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{l}{c}\right)^2\right] = 30.\left[1 - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{15}{73{,}48}\right)^2\right] = 30 - 0{,}208 = 29{,}792 \text{ Fuß}$$

und die Bogenhöhe:

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}\, b\,(l - b)} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{29{,}792 \,.\, 0{,}208}{2 \,.\, 2}} = \sqrt{29{,}792 \,.\, 0{,}078} = 1{,}524 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Man findet aus dem Halbmesser $CA = CB = CD = r$ und der Ordinate $AM = y$ eines Kreisbogens $AB$, Fig. 243, die Ordinate $AN = BN = y_1$ des halben Bogens $AD = BD$, wenn man setzt:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 + (CB - CM)^2$$

$$= \overline{AM}^2 + \left(CB - \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2}\right)^2 = 2\,\overline{CA}^2 - 2\,CA\sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2},$$

Fig. 243. d. i.:

$$4\,y_1^2 = 2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Es ist hiernach:

$$y_1 = \sqrt{\frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - y^2}}{2}},$$ oder annähernd, wenn $y$ klein ist gegen $r$:

$$y_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[r^2 - r\left(r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{y^2}{4}\left(1 + \frac{y^2}{4r^2}\right)} = \frac{y}{2}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel findet man die Ordinate des Viertelbogens:

$$y_2 = \frac{y_1}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{8\,r^2}\right) = \frac{y}{4}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{8r^2}\right),$$

ferner die des Achtelbogens:

$$y_3 = \frac{y_2}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{8r^2}\right) = \frac{y}{8}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + (\tfrac{1}{4})^2\,\frac{y^2}{8r^2}\right)$$

$$= \frac{y}{8}\left(1 + [1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2]\,\frac{y^2}{8\,r^2}\right).$$

Da die Ordinaten sehr kleiner Bögen den Bogen gleichgesetzt werden können, so erhalten wir hiernach den Bogen $AB$ annähernd:

$$s = 8 . y_3 = y\left(1 + [1 + 1/4 + (1/4)^2] \frac{y^2}{8r^2}\right), \text{ oder genauer:}$$

$$= y \left(1 + [1 + 1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \cdots] \frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Aber $1 + 1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \cdots$ ist (nach „Ingenieur" Seite 82) $= \frac{1}{1 - 1/4} = 4/3$, daher folgt:

$$s = \left(1 + \frac{y^2}{6r^2}\right) y;$$

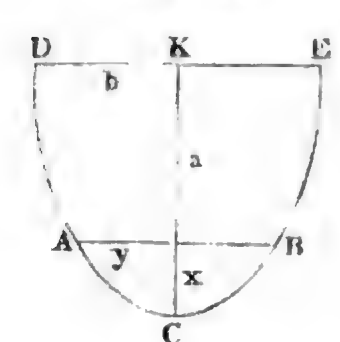
oder wenn man statt $r$ die Abscisse $\overline{BM} = x$ einführt, und $2rx = y^2$ setzt:

$$s = \left[1 + 2/3 \left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y.$$

Diese Formel ist nicht bloß auf Kreisbögen, sondern auch auf alle gedrückte Curvenbögen anzuwenden.

Anmerkung 2. Vergleicht man die gefundene Gleichung

Fig. 244.




$$y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}}$$

mit der Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

einer Ellipse (s. „Ingenieur" Seite 169), so findet man:

$$\frac{b^2}{a} = c \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = 1/3, \text{ folglich}$$

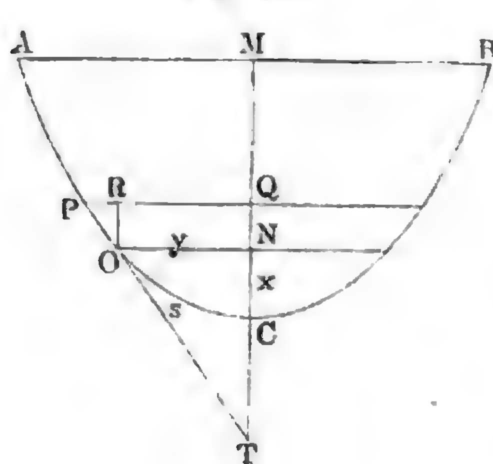
$$a = 3c \text{ und } b = a\sqrt{1/3} = c\sqrt{3}.$$

Es läßt sich also eine stark gespannte Kettenlinie als ein Bogen $ACB$, Fig. 244, einer Ellipse ansehen, deren große Halbaxen $KC = a = 3c$ und kleine Halbaxe $KD = KE = b = c\sqrt{3} = a\sqrt{1/3} = 0,577 . a$ ist.

**(§. 161) Gleichung der Kettenlinie.** Die vollständige Gleichung einer gemeinen Kettenlinie läßt sich mittels des höheren Calculs auf folgende Weise finden.

Nach §. 158 ist für den Aufhängewinkel $TON = \varphi$, Fig. 245, welchen die Berührungslinie $OT$ eines Punktes $O$ der Kettenlinie $ACB$ mit der horizontalen Ordinate $ON$ einschließt, wenn der Bogen $CO$ durch $s$ bezeichnet und die Horizontalspannung $H = c\gamma$ gesetzt wird:

Fig. 245.




$$tang. \varphi = \frac{s}{c}.$$

Nun ist aber $\varphi$ auch gleich dem Winkel $OPR$, welchen ein Bogenelement $OP = \partial s$ mit einem Ele-

mente $PR = \partial y$ der Ordinate $ON = y$ einschließt, und

$$tang.\, OPR = \frac{OR}{PR} = \frac{\partial x}{\partial y},$$

da $OR$ als ein Element $\partial x$ der Abscisse $CN = x$ anzusehen ist; demnach folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{s}{c}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2}.$$

Auch ist $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, also $\partial y^2 = \partial s^2 - \partial x^2$,

und daher: $$\frac{\partial s^2 - \partial x^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2}.$$

Durch weitere Umformung ergiebt sich:

$$\partial x^2 (s^2 + c^2) = s^2 \partial s^2, \text{ oder } \partial x = \frac{s \partial s}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Setzt man $s^2 + c^2 = u$, so erhält man:

$$2 s \partial s = \partial u, \text{ und } \partial x = \frac{\frac{1}{2} \partial u}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \partial u;$$

und durch Integration folgt nun (nach Art. 18 der analyt. Hülfslehren):

$$x = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} \partial u = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + Const. = \sqrt{u} + Const.$$
$$= \sqrt{s^2 + c^2} + Const.,$$

endlich, da $x$ und $s$ zugleich Null sind, also $0 = \sqrt{c^2} + Const.$, d. i. $Const. = -c$ ist:

1) $x = \sqrt{s^2 + c^2} - c$; sowie umgekehrt,
$s = \sqrt{(x + c)^2 - c^2} = \sqrt{2 c x + x^2}$, und
$$c = \frac{s^2 - x^2}{2x}.$$

Beispiel. Wenn eine 10 Fuß lange und 30 Pfund schwere Kette $ACB$ so aufgehangen wird, daß die Bogenhöhe $CM = 4$ Fuß beträgt, so hat man:

$$\gamma = \frac{30}{10} = 3 \text{ Pfund},$$
$$c = \frac{s^2 - x^2}{2x} = \frac{5^2 - 4^2}{8} = \frac{9}{8},$$

und daher die Horizontalspannung:

$$H = c\gamma = 3 \cdot \frac{9}{8} = 3\frac{3}{8} \text{ Pfund}.$$

Sowie wir im vorigen Paragraphen durch Entfernung von $\partial y$ auf eine Gleichung zwischen dem Bogen $s$ und der Abscisse gestoßen sind, ebenso können wir nun durch Eliminirung von $\partial x$ eine Gleichung zwischen dem Bogen $s$ und der Ordinate $y$ finden. Man setzt zu diesem Zwecke in der Gleichung: (§. 162)

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2}, \; \partial x^2 = \partial s^2 - \partial y^2,$$

und erhält so die Gleichung:

$$\frac{s^2}{c^2} = \frac{\partial s^2 - \partial y^2}{\partial y^2}, \text{ oder } \partial y^2 (s^2 + c^2) = c^2 \partial s^2, \text{ also}$$

$$\partial y = \frac{c \partial s}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Dividirt man im Zähler und Nenner durch $c$ und setzt $\frac{s}{c} = v$, so erhält man:

$$\partial y = \frac{c \partial \left(\frac{s}{c}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}} = \frac{c \partial v}{\sqrt{1 + v^2}},$$

und es liefert nun die Formel XIII. im Art. 26 der analytischen Hülfslehren das entsprechende Integral:

$$y = c \int \frac{\partial v}{\sqrt{1 + v^2}} = c \,.\, Log.\, nat.\, (v + \sqrt{1 + v^2}), \text{ d. i.}$$

$$2)\; y = c \,.\, Log.\, nat. \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}\right).$$

Setzt man in dieser Formel $s = \sqrt{2cx + x^2}$, so erhält man die eigentliche Coordinatengleichung der gemeinen Kettenlinie:

$$3)\; y = c \,.\, Log.\, nat. \left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right),$$

auch ist:

$$4)\; y = c\; Log.\, nat. \left(\frac{s + x}{s - x}\right) = \frac{s^2 - x^2}{2x}\; Log.\, nat. \left(\frac{s + x}{s - x}\right).$$

Endlich folgt aber durch Umkehrung von 2. und 3.:

$$5)\; s = \left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right) \cdot \frac{c}{2} \text{ und}$$

$$6)\; x = \left[{}^1/_2 \left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right) - 1\right] c,$$

und es bezeichnet $e$ die Grundzahl 2,71828 . . . des natürlichen Logarithmensystemes (s. Art. 19 der analyt. Hülfslehren).

Beispiel. Zwei zusammengehörige Coordinaten einer Kettenlinie sind $x = 2$ Fuß und $y = 3$ Fuß, man sucht die Horizontalspannung $c$ dieser Curve?

Annähernd ist nach Nro. 3 des Paragraphen 160:

$$c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6} = \frac{9}{4} + \frac{2}{6} = 2{,}58.$$

Nach Nro. 3 dieses Paragraphen (162) ist aber genau:

$$y = c\,Ln.\left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right), \text{ d. i.:}$$

$$3 = c\,Ln.\left(\frac{c + 2 + \sqrt{4c + 4}}{c}\right).$$

Hierin $c = 2{,}58$ gesetzt, bekommt man den Fehler:

$$f = 3 - 2{,}58\,Ln.\left(\frac{4{,}58 + 2\sqrt{3{,}58}}{2{,}58}\right) = 3 - 2{,}58\,Ln.\left(\frac{8{,}3642}{2{,}58}\right)$$

$$= 3 - 3{,}035 = -0{,}035;$$

nimmt man aber $c = 2{,}53$, so erhält man den Fehler:

$$f_1 = 3 - 2{,}53\,Ln.\left(\frac{4{,}53 + 2\sqrt{3{,}53}}{2{,}53}\right) = 3 - 2{,}53\,Ln.\left(\frac{8{,}2876}{2{,}53}\right)$$

$$= 3 - 3{,}002 = -0{,}002.$$

Um nun den wahren Werth von $c$ zu finden, setzen wir nach einer bekannten Regel (s. „Ingenieur", Seite 76):

$$\frac{c - 2{,}58}{c - 2{,}53} = \frac{f}{f_1} = \frac{0{,}035}{0{,}002} = 17{,}5,$$

auf diese Weise folgt: $16{,}5 \,.\, c = 17{,}5 \,.\, 2{,}53 - 2{,}58 = 41{,}69$, daher:

$$c = \frac{41{,}69}{16{,}5} = 2{,}527 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Sehr einfach lassen sich für die gemeine Kettenlinie $s$, $x$ und $y$ durch den Aufhängewinkel $\varphi$ ausdrücken; es ist nämlich nach dem Vorstehenden:

$$s = c\ tang.\ \varphi = \frac{c\ sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi}, \text{ ferner:}$$

$$x = c\left(\sqrt{1 + tang.\ \varphi^2} - 1\right) = \frac{c\,(1 - cos.\ \varphi)}{cos.\ \varphi} \text{ und}$$

$$y = c\ Log.\ nat.\ (tang.\ \varphi + \sqrt{1 + tang.\ \varphi^2}) = c\ Log.\ nat.\left(\frac{1 + sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi}\right).$$

Mittels dieser Formeln kann man die Bogen- und Coordinatenlängen für verschiedene Neigungs- oder Aufhängewinkel berechnen, und es läßt sich hierzu leicht eine zweckmäßige Tabelle, wie im „Ingenieur" S. 353, anfertigen. Hierbei hat man nur eine einzige Kettenlinie, am besten diejenige, bei welcher das Maß $c$ der Horizontalspannung $= 1$ ist, zu Grunde zu legen; für eine andere Kettenlinie, welche der Horizontalspannung $c$ entspricht, findet man dann $s$, $x$ und $y$, indem man die durch die Tabelle angegebenen Werthe von $s$, $x$ und $y$ mit $c$ multiplicirt.

Wäre $tang.\ \varphi$ nicht $= \frac{s}{c}$, sondern $= \frac{y}{c}$, so hätte man es mit der gemeinen Parabel zu thun, für welche

$$s = \frac{c}{2}\left[\frac{sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi^2} + Ln.\ tang.\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \varphi}{2}\right)\right],$$

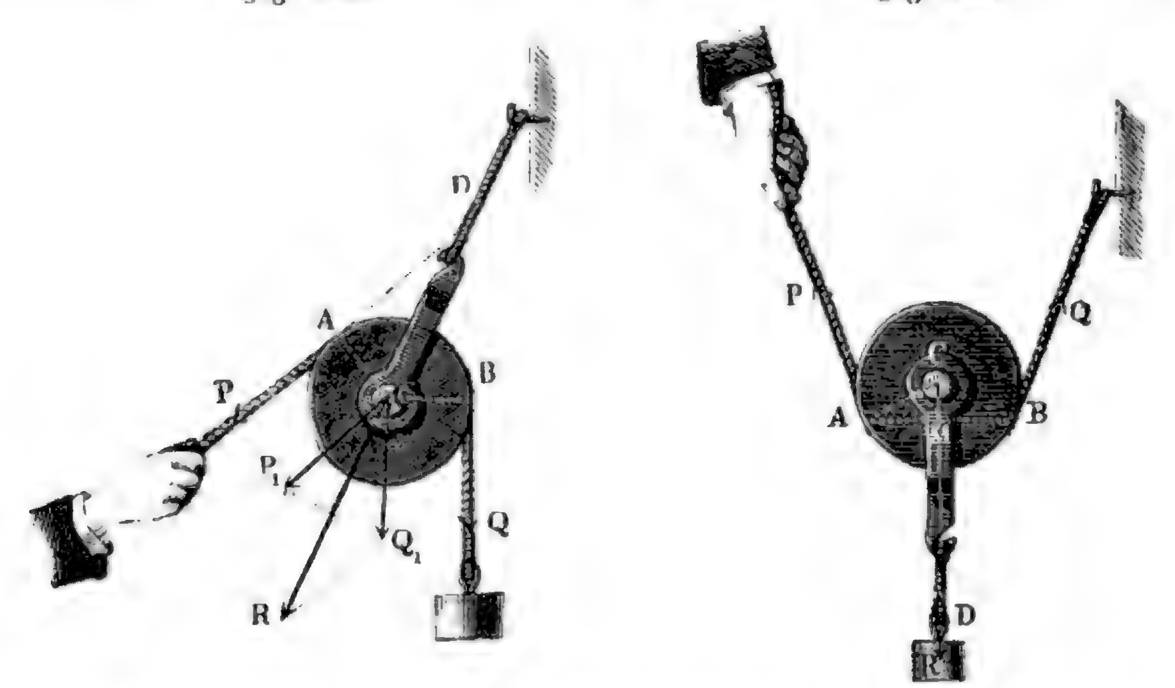
$$x = \frac{c}{2}\ tang.\ \varphi^2 = \frac{c}{2}\left(\frac{sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi}\right)^2 \text{ und}$$

$$y = c\ tang.\ \varphi = \frac{c\ sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi} \text{ ist.}$$

§. 163 **Gleichgewicht der Rolle.** Seile, Riemen u. s. w. sind auch die gewöhnlichsten Mittel, wodurch Kräfte auf Rollen und Radwellen übertragen werden. Von den Theorien dieser beiden Vorrichtungen möge deshalb hier noch das Allgemeinste, so viel es ohne Berücksichtigung der Reibung und Steifigkeit möglich ist, entwickelt werden.

Eine Rolle (franz. poulie; engl. pulley) ist eine um eine Axe drehbare kreisförmige Scheibe $ABC$, Fig. 246 und Fig. 247, um deren Umfang

Fig. 246. Fig. 247.




ein Seil liegt, dessen Enden durch Kräfte $P$ und $Q$ angespannt werden. Bei einer festen Rolle (franz. p. fixe; engl. fixed p.) ist das Gehäuse oder Lager (franz. chape; engl. block), worin ihre Axen oder Zapfen ruhen, unbeweglich, bei einer losen Rolle (franz. p. mobile; engl. moveable p.) hingegen ist das Zapfengehäuse beweglich.

Im Gleichgewichtszustande einer jeden Rolle sind die Kräfte $P$ und $Q$ an den Seilenden gleich groß, denn jede Rolle ist ein gleicharmiger Winkelhebel, den man erhält, wenn man von der Axe $C$ Perpendikel $CA$ und $CB$ auf die Kräfte- oder Seilrichtungen $DP$ und $DQ$ fällt. Auch ist klar, daß die Kräfte $P$ und $Q$ bei irgend einer Drehung um $C$ einerlei Weg, nämlich $r\beta$, zurücklegen, wenn $r$ den Halbmesser $CA = CB$ und $\beta^0$ den Umdrehungswinkel bezeichnet, und daß sich auch hieraus auf die Gleichheit zwischen $P$ und $Q$ schließen läßt. Aus den Kräften $P$ und $Q$ entspringt noch eine vom Zapfenlager aufzunehmende Mittelkraft $\overline{CR} = R$, die von dem Winkel $ADB = \alpha$, unter welchem die Seilrichtungen zusammenstoßen, abhängig ist und sich als Diagonale des aus $P$ und $\alpha$ zu construirenden Rhombus $CP_1RQ_1$,

$$R = 2\,P\,cos.\,\frac{\alpha}{2} \text{ ergiebt.}$$

Bei der festen Rolle, Fig. 246, wirkt die zu hebende Last oder der zu §. 164 überwindende Widerstand $Q$ an einem Seilende genau wie die Kraft $P$; es ist daher hier Kraft gleich Last, und es bewirkt die Anwendung dieser Rolle nichts weiter als eine Richtungsveränderung, weshalb man sie auch eine Leitrolle nennt. Bei der losen Rolle, Fig. 247, hingegen wirkt die Last $R$ an dem hakenförmigen Ende des Zapfenlagers, während das eine Seilende an einem unbeweglichen Gegenstande befestigt ist; hier ist also die Kraft

$$P = \frac{R}{2 \cos. \frac{\alpha}{2}}$$

zu setzen. Bezeichnen wir die Sehne $AMB$, welche dem mit Seil bedeckten Bogen entspricht, durch $a$ und den Halbmesser $CA = CB$, wie vorhin, durch $r$, so ist:

$$a = 2\overline{AM} = 2.\overline{CA} \cos. CAM = 2\overline{CA} \cos. ADM = 2 r \cos. \frac{\alpha}{2},$$

es läßt sich daher

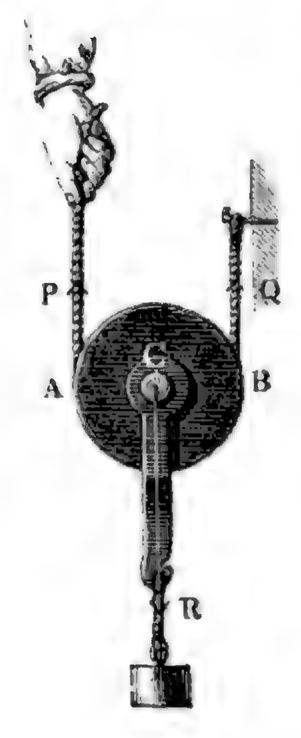
$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2 \cos. \frac{\alpha}{2}} \text{ und ebenso}$$

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{a}$$

setzen. Diesem nach verhält sich also bei der losen Rolle die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des Seilbogens.

Ist $a = 2r$, bedeckt also das Seil einen Halbkreis, Fig. 248, so fällt die Kraft am kleinsten, nämlich $P = \frac{1}{2} R$ aus; ist $a = r$, also $60^0$ von der Rolle mit Seil bedeckt, so hat man $P = R$. Je kleiner nun $a$ ausfällt, desto größer wird $P$, und für ein unendlich kleines $a$, d. h. für eine unendlich kleine Seilbedeckung ist die Kraft $P$ unendlich groß. Bei den Wegen tritt ein umgekehrtes Verhältniß ein; ist $s$ der Weg von $P$, welcher einem Wege $h$ von $R$ entspricht, so hat man $Ps = Rh$, daher:

Fig. 248.



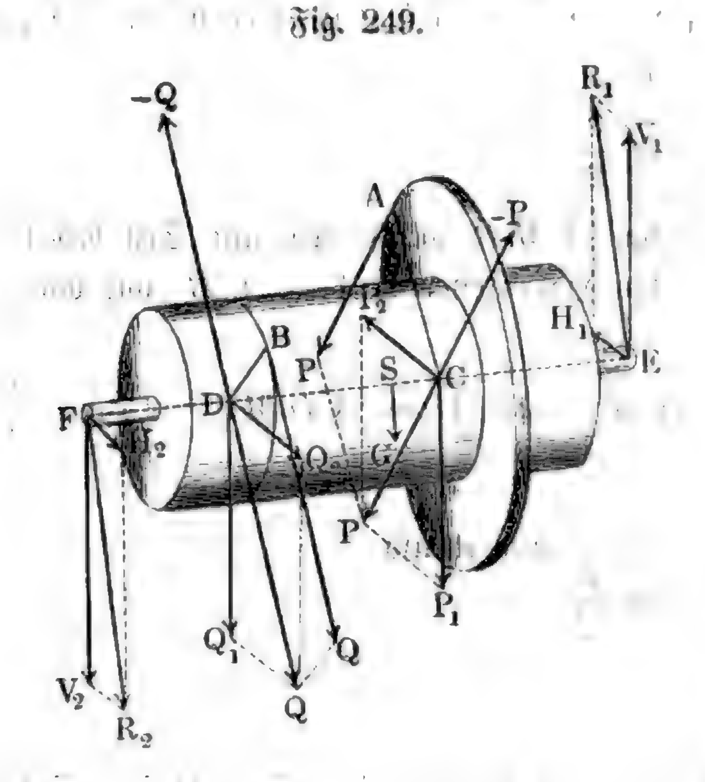

$$\frac{s}{h} = \frac{a}{r}.$$

Die lose Rolle ist also ein Mittel zur Kraftveränderung, weshalb sie auch die Kraftrolle genannt wird; es läßt sich durch dieselbe z. B. eine gegebene Last durch eine kleinere Kraft heben; in dem Verhältnisse aber, um welches man an Kraft gewinnt, verliert man an Weg.

Anmerkung. Von der Zusammensetzung der Rollen zu Rollen- und Flaschenzügen, sowie von dem Einflusse der Reibung und des Steifigkeitswiderstandes auf das Gleichgewicht der Rollen ist im dritten Bande die Rede.

§. 165 **Radwelle.** Die Radwelle (franz. roue sur l'arbre; engl. wheel and axle) ist eine feste, um eine gemeinschaftliche Axe drehbare Verbindung, $ABFE$, Fig. 249, von zwei festen Rollen oder Rädern. Das kleinere von diesen Rädern heißt Welle (franz. arbre; engl. axle), das größere aber Rad (franz. roue; engl. wheel). Die runden Enden $E$ und $F$, womit die Vorrichtung aufruht, heißen Zapfen (franz. tourillons; engl. trunnions). Die Umdrehungsaxe einer Radwelle ist entweder horizontal, oder vertical, oder schief. Hier soll zunächst nur von derjenigen Radwelle die Rede sein, welche sich um eine horizontale Axe dreht; auch wollen wir hier voraussetzen, daß die Kräfte $P$ und $Q$ oder die Kraft $P$ und die Last $Q$ an den Enden vollkommen biegsamer Seile wirken, welche um die Umfänge des Rades und der Welle gelegt sind. Die zu beantwortenden Fragen sind: in welchem Verhältnisse stehen Kraft $P$ und Last $Q$ zu einander, und welche Drücke haben die Zapfenlager bei $E$ und $F$ aufzunehmen?

Fig. 249.




Denkt man sich in dem Punkte $C$, wo die Umdrehungsebene der Kraft $P$ die Axe $EF$ der Maschine schneidet, noch zwei Gegenkräfte $CP = P$ und $C\overline{P} = -P$ wirksam, welche der in $A$ angreifenden Umdrehungskraft gleich und ihr parallel gerichtet sind, so erhält man aus der Zusammensetzung dieser drei Kräfte eine Axenkraft $CP = P$ und ein Kräftepaar $(P, -P)$, dessen Moment $= P \, . \, \overline{CA} = Pa$ ist, wenn $a$ den Hebelarm der Kraft $AP = P$, oder den Halbmesser $\overline{CA}$ des Rades bezeichnet; und denken wir uns gleichfalls im Punkte $D$, wo die Umdrehungsebene der Last $Q$ von der Axe $EF$ geschnitten wird, die Gegenkräfte $DQ = Q$ und $D\overline{Q} = -Q$ angebracht, so erhalten wir auch noch eine Axenkraft $DQ = Q$ und ein Kräftepaar $(Q, -Q)$, dessen Moment $= Q \, . \, \overline{DB} = Qb$ ist, wenn $b$

den Hebelarm der in $B$ angreifenden Last $Q$ oder den Halbmesser $\overline{DB}$ der Welle bezeichnet.

Da die Axenkräfte $CP = P$ und $DQ = Q$ von der Axe aufgenommen werden, und folglich gar keinen Einfluß auf die Umdrehung der Maschine ausüben, so ist zur Herstellung des Gleichgewichts nöthig, daß die beiden in parallelen Ebenen wirkenden Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (vergl. §. 94) gleiche Momente haben, daß also

$$Pa = Qb, \text{ oder}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$$

ist.

Es ist also bei jeder beliebig langen Radwelle, wie bei jedem Hebel, im Gleichgewichtszustande, das Moment $Pa$ der Kraft gleich dem Momente $Qb$ der Last, oder das Verhältniß der Kraft zur Last gleich dem des Lastarmes zu dem Kraftarme.

Wirken mehr als zwei Kräfte an einer Radwelle, so ist natürlich auch die Summe der Momente der Kräfte, welche nach der einen Umdrehungsrichtung wirken, gleich der Summe der Momente der Kräfte mit der anderen Umdrehungsrichtung zu setzen.

§. 166 Die Axenkräfte $CP = P$ und $DQ = Q$ lassen sich nur noch in die Verticalkräfte $CP_1 = P_1$ und $DQ_1 = Q_1$, und in die Horizontalkräfte $CP_2 = P_2$ und $DQ_2 = Q_2$ zerlegen; es geben nun die ersteren Kräfte in Vereinigung mit dem im Schwerpunkte $S$ der Maschine angreifenden Gewichte $G$ der Maschine den gesammten verticalen Zapfendruck, d. i.:

$$V_1 + V_2 = P_1 + P_2 + G,$$

während aus den Horizontalkräften $P_2$ und $Q_2$ seitliche Zapfendrücke $H_1$ und $H_2$ hervorgehen. Ist $\alpha$ der Neigungswinkel $PCP_2$ der Richtung der Kraft $P$ gegen den Horizont, und $\beta$ der Neigungswinkel $QDQ_2$ der Last, so hat man:

$$P_1 = P \sin.\alpha \text{ und } P_2 = P \cos.\alpha, \text{ sowie}$$
$$Q_1 = Q \sin.\beta \text{ und } Q_2 = Q \cos.\beta.$$

Ist ferner $l$ die ganze Axenlänge $\overline{EF}$, $d$ der Abstand $\overline{CE}$, $e$ der Abstand $\overline{DE}$ und $s$ der Abstand $\overline{SE}$ der Axenpunkte $C$, $D$ und $S$ von dem einen Axenende $E$, so hat man der Theorie des Hebels (§. 137) zufolge:

1) Wenn man $E$ als Stützpunkt des von den Kräften $P_1$, $Q_1$ und $G$ ergriffenen Hebels $EF$ ansieht:

$$V_2 \,.\, \overline{EF} = P_1 \,.\, \overline{EC} + Q_1 \,.\, \overline{ED} + G \,.\, \overline{ES}, \text{ d. i.:}$$
$$V_2 l = P_1 d + Q_1 e + G s,$$

wonach sich der Verticaldruck:

$$V_2 = \frac{P_1 d + Q_1 e + G s}{l}$$

ergiebt, und

2) wenn man $F$ als Stützpunkt des gedachten Hebels behandelt:

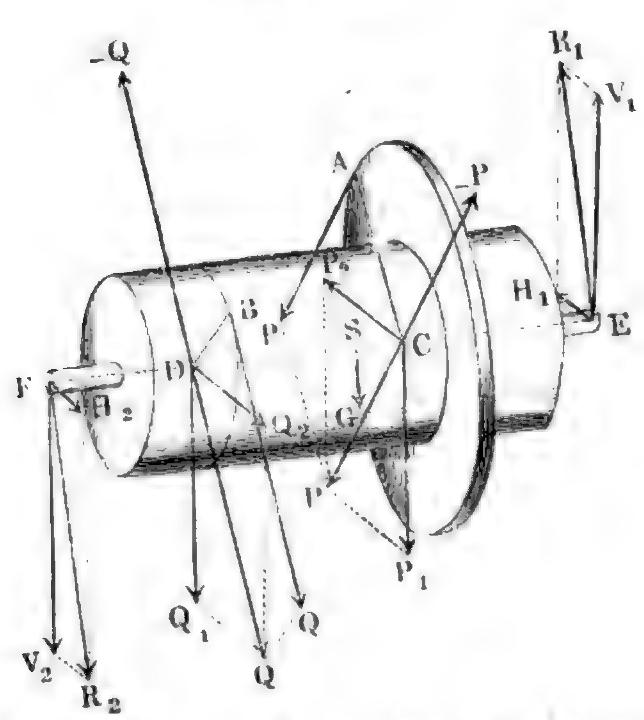
$$V_1 \,.\, \overline{FE} = P_1 \,.\, \overline{FC} + Q_1 \,.\, \overline{FD} + G \,.\, \overline{FS}, \text{ d. i.:}$$
$$V_1 l = P_1 (l - d) + Q_1 (l - e) + G (l - s),$$

so daß der Verticaldruck:

$$V_1 = \frac{P_1 (l - d) + Q_1 (l - e) + G (l - s)}{l}$$

folgt.

Fig. 249.




Die Horizontaldrücke $H_1$ und $H_2$ ergeben sich aus den Horizontalkräften $P_2$ und $Q_2$ wie folgt.

1) Wenn man $E$ als Stützpunkt des von $P_2$ und $Q_2$ ergriffenen Hebels $EF$ annimmt, und hiernach

$$H_2 \,.\, \overline{EF} = P_2 \,.\, \overline{EC} - Q_2 \,.\, \overline{ED}, \text{ d. i.:}$$
$$H_2 l = P_2 d - Q_2 c$$

setzt, folgt der Horizontaldruck: $H_2 = \dfrac{P_2 d - Q c}{l}$, und

2) wenn man $F$ als Stützpunkt behandelt:

$$H_1 \,.\, \overline{FE} = P_2 \,.\, \overline{FC} - Q_2 \,.\, \overline{FD}, \text{ d. i.:}$$
$$H_1 l = P_2 (l - d) - Q_2 (l - e),$$

ergiebt sich der Horizontaldruck:

$$H_1 = \frac{P_2 (l - d) - Q_2 (l - e)}{l}.$$

Durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes erhält man nun die gesammten Drücke $R_1$ und $R_2$ an den Zapfen $E$ und $F$, und zwar:

$$R_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} \text{ und } R_2 = \sqrt{V_2^2 + H_2^2}.$$

Sind endlich noch $\delta_1$ und $\delta_2$ die Winkel $R_1 E H_1$ und $R_2 F H_2$, um welche diese Drücke von dem Horizonte abweichen, so hat man:

$$tang.\, \delta_1 = \frac{R_1}{H_1} \text{ und } tang.\, \delta_2 = \frac{R_2}{H_2}.$$

Beispiel. Die Last $Q$ einer Radwelle zieht senkrecht nieder und beträgt 365 Pfund; der Halbmesser des Rades ist $a = 1^3/_4$ Fuß; der Halbmesser der Welle, $b = {}^3/_4$ Fuß; das Gewicht der leeren Radwelle beträgt 200 Pfund; ihr Schwerpunkt steht von dem Zapfenlager $E$ um $s = 1^1/_2$ Fuß ab, das Radmittel ist um $d = {}^3/_4$ Fuß von diesem Zapfen $E$ und die Verticalebene, in welcher die Last wirkt, ist um $e = 2$ Fuß von demselben entfernt, während die ganze Axenlänge $EF = l = 4$ Fuß beträgt; wenn nun die zur Herstellung des Gleichgewichts nöthige Kraft $P$ am Rade, unter einem Winkel $\alpha$ von 50 Grad vom Horizonte abweichend, niederzieht, wie groß wird dieselbe ausfallen und welches werden die Zapfendrücke sein? Es ist $Q = 365$, $\beta = 90^0$, folglich $Q_1 = Q\, sin.\, \beta = Q$ und $Q_2 = Q\, cos.\, \beta = 0$, ferner $P$ unbekannt und $\alpha = 50^0$, daher $P_1 = P\, sin.\, \alpha = 0{,}7660 \,.\, P$ und $P_2 = P\, cos.\, \alpha = 0{,}6428 \,.\, P$; nun ist aber $a = 1^3/_4 = {}^7/_4$ und $b = {}^3/_4$, es folgt daher:

$$P = \frac{b}{a} Q = {}^3/_7 \,.\, 365 = 156{,}4 \text{ Pfd.}, \; P_1 = 119{,}8 \text{ und } P_2 = 100{,}5 \text{ Pfd.}$$

Weil ferner $l = 4$, $d = {}^3/_4$, $e = 2$ und $s = {}^3/_2$ ist, so folgt $l - d = {}^{13}/_4$, $l - e = 2$ und $l - s = {}^5/_2$. Nun ergiebt sich:

1) Für den Zapfen $F$:
der Verticaldruck

$$V_2 = \frac{119{,}8 \,.\, {}^3/_4 + 365 \,.\, 2 + 200 \,.\, {}^3/_2}{4} = 280{,}0 \text{ Pfund},$$

und der Horizontaldruck:

$$H_2 = \frac{100{,}5 \,.\, {}^3/_4 - 0 \,.\, 2}{4} = 18{,}8 \text{ Pfund},$$

folglich der Mitteldruck:

$$R_2 = \sqrt{V_2^2 + H_2^2} = \sqrt{280^2 + 18{,}8^2} = 280{,}6 \text{ Pfund},$$

und für dessen Neigung $\delta_2$ gegen den Horizont:

$$tang.\, \delta_2 = \frac{280{,}0}{18{,}8}, \; Log.\, tang.\, \delta_2 = 1{,}17300, \text{ also } \delta_2 = 86^0\, 9',5.$$

2) Für den Zapfen $E$:

$$V_1 = \frac{119{,}8 \,.\, {}^{13}/_4 + 365 \,.\, 2 + 200 \,.\, {}^5/_2}{4} = 404{,}8 \text{ Pfund},$$

$$H_1 = \frac{100{,}5 \,.\, {}^{13}/_4 - 0}{4} = 81{,}7 \text{ Pfund},$$

folglich der Mitteldruck:

$$R_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = \sqrt{404{,}8^2 + 81{,}7^2} = 413{,}0 \text{ Pfund},$$

und für dessen Neigung $\delta$ gegen den Horizont:

$$tang. \delta = \frac{113,0}{[illegible]}, \; Log. tang. \delta = 0{,}69502, \; \delta = 78^\circ 25'.$$

Uebrigens ist sehr richtig:

$$V + V_1 = 280 + 404,8 = 684,8 = P + Q + G, \text{ und ebenso}$$
$$H + H_1 = 81,7 + 18,8 = 100,5 = P_1 + Q_1.$$

## Fünftes Capitel.

## Die Widerstände der Reibung und Steifigkeit der Seile.

§. 167 **Widerstand der Reibung.** Wir haben seither angenommen (§. 138), daß zwei Körper nur durch Kräfte winkelrecht zur gemeinschaftlichen Berührungsebene auf einander wirken können. Wären diese Körper vollkommen starr und ihre Oberflächen an den Stellen der Berührung vollkommen mathematische, d. h. auch nicht von den kleinsten unregelmäßigen Erhabenheiten und Vertiefungen unterbrochen, so würde dieses Gesetz auch durch die Erfahrung vollkommen bestätigt werden; weil aber jeder materielle Körper einen gewissen Grad von Elasticität, oder auch bleibenden Weichheit, besitzt, und weil die Oberfläche eines jeden Körpers, selbst wenn sie polirt oder in hohem Grade geglättet ist, noch kleine Erhebungen und Vertiefungen hat und in Folge der Porosität der Materie kein Continuum bildet, so findet bei der gegenseitigen Wirkung zweier sich berührenden Körper auch immer ein gegenseitiges Eindrücken und Eingreifen der Theile an der Berührungsstelle statt, wodurch sich ein Zusammenhang zwischen beiden Körpern bildet, der nur durch eine besondere Kraft, deren Richtung in die Berührungsebene selbst fällt, aufgehoben werden kann.

Dieser, durch das Eindringen und Ineinandergreifen der sich berührenden Körper hervorgebrachte Zusammenhang und der daraus entspringende, in der Berührungsebene wirkende Widerstand ist es, welcher den Namen **Reibung** (franz. frottement; engl. friction) erhalten hat. Die Reibung tritt bei der Bewegung der Körper als eine **passive Kraft** oder als **Widerstand** (Reibungswiderstand) auf, weil sie nur Bewegungen verhindert oder hemmt, dieselben aber nie erzeugt oder befördert. Sie läßt sich bei Untersuchungen in der Mechanik als eine Kraft einführen, die jeder Bewegung, deren Richtung in die Ebene der Berührung beider Körper fällt, entgegenwirkt. In welcher Richtung man auch einen auf einer horizontalen oder geneigten Ebene ruhenden Körper fortbewegt, immer wird die Reibung in der Richtung der Bewegung entgegenwirken, sie wird z. B. dem Hinabsinken auf der schiefen Ebene

ebenso viel hinderlich sein als dem Hinaufgleiten auf derselben. Bei einem im Gleichgewichtszustande befindlichen Kräftesysteme erzeugt der kleinste Zusatz an Kraft Bewegung, so lange die Reibung außer Spiel bleibt; influirt aber dieselbe, so ist zur Störung des Gleichgewichtes ein größerer, von der Reibung abhängiger Zusatz an Kraft nöthig.

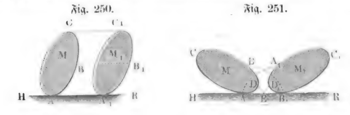
§. 168 Während der Ueberwindung der Reibung werden die in Berührung gekommenen Theile zusammengedrückt, die vorstehenden Theile umgebogen, nach Befinden abgerissen, abgebrochen u. s. w. Es hängt deshalb die Reibung nicht nur von der Rauhigkeit oder Glätte der reibenden Flächen, sondern auch von der materiellen Beschaffenheit der Körper selbst ab. Härtere Metalle geben z. B. meist weniger Reibung als weichere. Uebrigens lassen sich über die Abhängigkeit der Reibung von den natürlichen Eigenschaften der Körper a priori keine allgemeinen Regeln aufstellen; es ist vielmehr nöthig, mit Körpern von verschiedenen Materien Reibungsversuche anzustellen, um daraus die unter anderen Verhältnissen stattfindenden Reibungen zwischen Körpern von denselben Materien ermitteln zu können.

Einen besonderen Einfluß auf die Reibung und auf das daraus hervorgehende Abreiben und Abnutzen der sich berührenden Körper üben die Schmieren (franz. les enduits; engl. the ungents) aus, mit denen man die sich reibenden Flächen bestreicht. Durch die ganz- oder halbflüssigen Schmiermittel, wie Oel, Unschlitt, Fett, Seife u. s. w., werden die Poren der Körper ausgefüllt und andere Rauhheiten vermindert, und wird überhaupt das tiefere Eindringen der Körper in einander verhindert, weshalb sie meist eine bedeutende Verminderung der Reibung herbeiführen.

Uebrigens ist die Reibung nicht mit der Adhäsion, d. h. mit demjenigen Zusammenhängen zweier Körper zu verwechseln, welches eintritt, wenn Körper in vielen Punkten in Berührung kommen und ein gegenseitiger Druck nicht stattfindet. Die Adhäsion wächst mit der Größe der Berührungsfläche und ist vom Drucke unabhängig, während bei der Reibung das Gegentheil statt hat. Bei kleinen Pressungen tritt sie in Beziehung auf die Reibung bedeutend hervor; sind aber die Pressungen groß, so ist sie nur ein kleiner Theil der Reibung und in der Regel ganz zu vernachlässigen. Schmieren, wie überhaupt alle flüssigen Körper, vermehren die Adhäsion, weil sie eine größere Anzahl von Berührungspunkten herstellen.

§. 169 **Reibungsarten.** Man unterscheidet zwei Arten der Reibung von einander, nämlich die gleitende und rollende oder wälzende. Die gleitende Reibung (franz. f. de glissement; engl. f. of sliding) ist derjenige Reibungswiderstand, welcher sich herausstellt, wenn sich ein Körper gleitend, d. h. so bewegt, daß alle Punkte desselben parallele Linien beschreiben. Die

rollende oder wälzende Reibung (franz. f. de roulement; engl. f. of rolling) hingegen ist derjenige Widerstand, welcher beim Wälzen, d. h. bei derjenigen Bewegung eines Körpers entsteht, wo sich jeder Punkt progressiv und drehend zugleich bewegt und der Berührungspunkt auf dem bewegten Körper einen eben so großen Weg zurücklegt als auf dem ruhenden Körper. Ein gegen die Ebene $HR$ sich stützender Körper $M$, Fig. 250, geht z. B.




gleitend über die Ebene hin und hat somit gleitende Reibung zu überwinden, wenn alle Punkte desselben, wie $A$, $B$, $C$ u. s. w., die parallen Wege $A A_1$, $B B_1$, $C C_1$ u. s. w. zurücklegen und deshalb immer nur dieselben Punkte des bewegten Körpers mit anderen der Unterlage in Berührung kommen. Der Körper $M$, Fig. 251, rollt oder wälzt sich dagegen auf der Ebene $HR$ und hat dabei wälzende Reibung zu überwinden, wenn sich die Punkte $A$, $B$ u. s. w. seiner Oberfläche so bewegen, daß der Weg $A E B_1$ = dem Wege $A D B = A_1 D_1 B_1$, ebenso der Weg $A E$ = dem Wege $A D$, der Weg $B_1 E = B_1 D_1$ u. s. w. ist.

Eine besondere Art der gleitenden Reibung ist die Axen- oder Zapfenreibung, welche entsteht, wenn sich ein cylindrischer Zapfen in seinem Lager herumdreht. Man unterscheidet aber zweierlei Zapfen, liegende und stehende. Der liegende Zapfen (franz. tourillon; engl. axle, auch gudgeon) reibt sich an seinem Umfange oder Mantel, indem nach und nach andere Punkte desselben immer mit denselben Punkten des Lagers oder der Pfanne in Berührung kommen. Der stehende Zapfen (franz. und engl. pivot) hingegen drückt mit seiner kreisförmigen Basis gegen das Lager, während die Punkte der letzteren in concentrischen Kreisen herumgehen.

Besondere Reibungen entstehen noch, wenn ein Körper über einer Schneide oscillirt, wie z. B. beim Wagebalken, oder wenn ein schwingender Körper in einer Spitze aufliegt, wie z. B. die Magnetnadel.

Ferner ist die Reibung einzutheilen in unmittelbare Reibung (franz. f. immédiat; engl. immediate f.) und in mittelbare Reibung (franz. f. médiat; engl. mediate f.). Bei jener sind die sich reibenden Körper in unmittelbarer Berührung; bei dieser sind sie hingegen durch Schmieren, z. B. durch eine dünne Oelschicht u. s. w. von einander getrennt.

Endlich unterscheidet man noch die **Reibung der Ruhe** (franz. f. de répos; engl. f. of quiescence), welche zu überwinden ist, wenn ein ruhender Körper in Bewegung gesetzt wird, von **Reibung der Bewegung** (franz. f. de mouvement; engl. f. of motion), welche sich der Fortsetzung einer Bewegung entgegensetzt.

**Reibungsgesetze.** Die allgemeinen Gesetze, welchen die Reibung unterworfen ist, sind folgende: §. 170

1) Die Reibung ist **proportional dem Normaldrucke** zwischen den sich reibenden Körpern. Wenn man einen Körper jetzt noch einmal so stark gegen seine Unterlage drückt als vorher, so fällt die Reibung auch noch einmal so groß aus; der dreifache Druck giebt auch eine dreifache Reibung u. s. w. Wenn dieses Gesetz bei kleinen Drücken Abweichungen von den Beobachtungen giebt, so hat man diese dem hier verhältnißmäßig größeren Einflusse der Adhäsion beizumessen.

2) Die Reibung ist **unabhängig** von der Größe der **Reibungs-** oder **Berührungsflächen**. Je größer die Reibungsflächen sind, desto größer ist zwar die Zahl der sich reibenden Theile, allein desto kleiner ist auch der Druck und deshalb auch die Reibung eines jeden Theiles; die Summe der Reibungen aller Theile ist deshalb bei einer größeren Fläche dieselbe wie bei einer kleineren, insofern der Druck und die übrigen Verhältnisse dieselben sind. Sind die Seitenflächen eines parallelepipedischen Ziegelsteines von gleicher materieller Beschaffenheit, so ist die Kraft zum Fortschieben desselben auf einer horizontalen Ebene dieselbe, man mag ihn mit der kleinsten oder mit der mittleren oder mit der größten Seitenfläche aufruhen lassen. Nur bei sehr großen Seitenflächen und kleinen Drücken scheint diese Regel in Folge des Einflusses der Adhäsion eine Ausnahme zu erleiden.

3) Die Reibung der Ruhe ist zwar meist größer als die der Bewegung, letztere aber ist von der Geschwindigkeit nicht abhängig; sie ist bei großen Geschwindigkeiten dieselbe wie bei kleinen Geschwindigkeiten.

4) Die Reibung eingeschmierter Flächen (mittelbare Reibung) ist in der Regel kleiner als die uneingeschmierter Flächen (unmittelbare Reibung), und hängt weniger von den sich reibenden Körpern als von der Schmiere selbst ab.

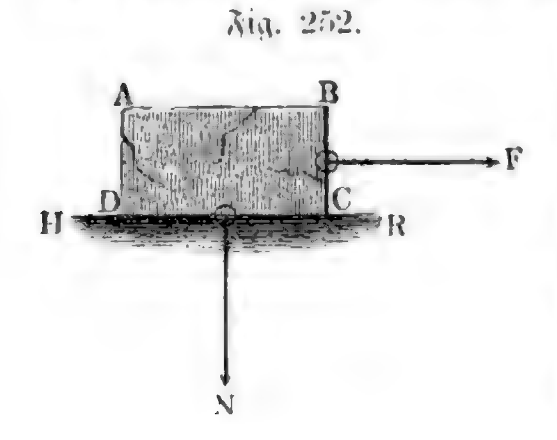
5) Die drehende oder Zapfenreibung ist kleiner als die gemeine gleitende oder schiebende Reibung; die wälzende Reibung zwischen glatten Flächen ist in den meisten Fällen so klein, daß sie in Rücksicht auf die gleitende Reibung nicht in Betracht zu ziehen ist.

Anmerkung. Die vorstehenden Regeln gelten streng nur dann, wenn der Zapfendruck auf die Flächeneinheit ein mittlerer ist, und wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens gewisse Grenzen nicht überschreitet. Dieser mittlere Druck auf

den Quadratzoll ist etwa 250 bis 500 Pfund, und die mittlere Umfangsgeschwindigkeit 2 bis 10 Zoll. Bei viel kleineren Drücken bildet die Adhäsion einen ansehnlichen Theil des Widerstandes, welcher dann auch von der Größe der Reibungsfläche mit abhängt, und bei sehr großen Drücken und Geschwindigkeiten findet eine so große Wärmeentwickelung statt, daß die Schmiere schnell verdampft, und der Zapfen, sowie das Lager desselben, der Zerstörung entgegeneilt. Lassen sich große Geschwindigkeiten nicht umgehen, wie z. B. bei Eisenbahnwagen, Turbinen u. s. w., so muß man der Erhitzung der Zapfen durch Vergrößerung der Reibungsfläche, d. i. durch größere Stärke und Länge der Zapfen, entgegenwirken.

§. 171 **Der Reibungscoefficient.** Aus dem ersten der im vorigen Paragraphen aufgeführten Gesetze läßt sich zunächst Folgendes ableiten. Ein Körper $AC$, Fig. 252, drücke gegen seine Unterlage ein Mal mit der Kraft $N$ und erfordere zum Fortziehen, d. h. zur Ueberwindung seiner Reibung, die Kraft $F$, und ein zweites Mal mit der Kraft $N_1$ und mache dann die Kraft $F_1$ nothwendig, um aus der Ruhe in Bewegung überzugehen. Nach dem Vorigen ist nun:

Fig. 252.




$$\frac{F}{F_1} = \frac{N}{N_1}, \text{ und daher } F = \frac{F_1}{N_1} \cdot N.$$

Hat man durch einen Versuch die einem gewissen Drucke $N_1$ entsprechende Reibung $F_1$ gefunden, so findet man hiernach, wenn die sich reibenden Körper und die übrigen Umstände dieselben sind, die einem anderen Drucke $N$ entsprechende Reibung $F$, indem man diesen Druck durch das Verhältniß $\left(\frac{F_1}{N_1}\right)$ zwischen den der ersten Beobachtung entsprechenden Werthen $F_1$ und $N_1$ multiplicirt.

Dieses Verhältniß der Reibung zum Drucke oder die Reibung für den Druck = Eins, z. B. 1 Pfund, heißt der **Reibungscoefficient** (franz. coëfficient du frottement; engl. coefficient of friction) und soll in der Folge immer durch $\varphi$ ausgedrückt werden, weshalb sich allgemein

$F = \varphi . N$ setzen läßt.

Der Reibungscoefficient ist bei verschiedenen Materien und verschiedenen Zuständen der Reibung verschieden und muß deshalb durch besonders hierzu angestellte Versuche ermittelt werden.

Wird der Körper $AC$ um den Weg $s$ auf der Unterlage fortgezogen, so hat man die Arbeit $Fs$ zu verrichten; es ist also die von der Reibung beanspruchte mechanische Arbeit $\varphi Ns$ gleich dem Producte aus Reibungscoefficient, Normaldruck und Weg auf der Berührungsebene. Ist die Unterlage

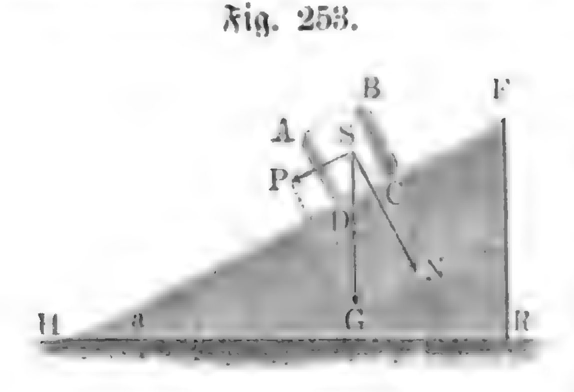
ebenfalls beweglich, so hat man unter $s = s_1 - s_2$ den relativen Weg des Körpers zu verstehen und es ist dann $Fs = \varphi Ns$ die Arbeit der Reibung für beide Körper zusammengenommen. Der schneller gehende Körper nimmt beim Durchlaufen des Weges $s_1$ die Arbeit $\varphi N s_1$ in Anspruch und der langsamer gehende Körper gewinnt bei Zurücklegung des Weges $s_2$ durch die Reibung die Arbeit $\varphi N s_2$; es ist also der durch die Reibung zwischen beiden Körpern entstehende Arbeitsverlust:

$$\varphi N s_1 - \varphi N s_2 = \varphi N (s_1 - s_2) = \varphi N s.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einem Drucke von 260 Pfund die Reibung 91 Pfund beträgt, so ist der entsprechende Reibungscoefficient $\varphi = {}^{91}/_{260} = {}^{7}/_{20} = 0{,}35$. 2) Um einen 500 Pfund schweren Schlitten auf einer horizontalen und sehr glatten Schneebahn fortzuziehen, ist bei dem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}04$, die nöthige Kraft $F = 0{,}04 \,.\, 500 = 20$ Pfund. 3) Wenn der Reibungscoefficient einer auf dem Straßenpflaster fortgezogenen Schleife 0,45 und die Belastung dieser Schleife 500 Pfund beträgt, so ist die erforderliche Arbeit, um diese Schleife 480 Fuß fortzuziehen, $\varphi N s = 0{,}45 \,.\, 500 \,.\, 480 = 108000$ Fußpfund.

**Der Reibungswinkel und Reibungskegel.** Liegt ein Körper $AC$, Fig. 253, auf einer schiefen Ebene $FH$, deren Neigungswinkel $FHR = \alpha$ ist, so läßt sich dessen Gewicht $G$ in den Normaldruck $N = G \cos. \alpha$ und in die Parallelkraft $S = G \sin. \alpha$ zerlegen. Aus der ersteren Kraft entspringt nun die Reibung $F = \varphi G \cos. \alpha$, welche jeder Bewegung auf der Ebene entgegenwirkt, weshalb die Kraft zum Hinaufschieben auf der Ebene: §. 172

Fig. 253.




$$P = F + S = \varphi G \cos. \alpha + G \sin. \alpha$$

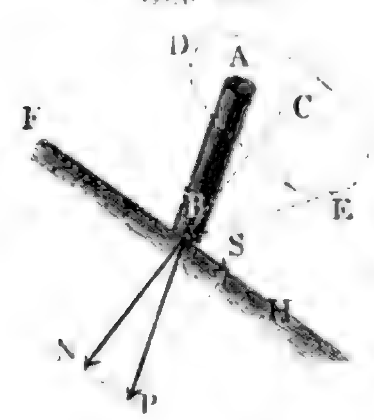
$= (\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)\, G$, dagegen die Kraft zum Hinabschieben:

$$P_1 = F - S = (\varphi \cos. \alpha - \sin. \alpha)\, G$$

ausfällt. Die letztere Kraft fällt Null aus, d. h. der Körper erhält sich durch seine Reibung auf der schiefen Ebene, wenn $\sin. \alpha = \varphi \cos. \alpha$, d. i. wenn $tang. \alpha = \varphi$ ist. So lange die schiefe Ebene einen Neigungswinkel $\alpha$ hat, dessen Tangente kleiner als $\varphi$ ist, so lange bleibt der Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe; ist aber die Tangente des Neigungswinkels wenig größer als $\varphi$, so gleitet der Körper auf der schiefen Ebene herab. Man nennt diesen Winkel, d. i. denjenigen, dessen Tangente dem Reibungscoefficienten gleich ist, Reibungs-, auch Ruhewinkel (franz. angle du frottement; engl. angle of friction, angle of resistance). Es ergiebt sich hiernach durch Beobachtung des Reibungswinkels $\varrho$, der Reibungscoefficient (für die Reibung der Ruhe), wenn man setzt: $\varphi = tang. \varrho$.

In Folge der Reibung nimmt die Oberfläche $FH$, Fig. 254, eines Körpers nicht nur den Normaldruck $N$ eines anderen Körpers $AB$, sondern auch dessen schiefen Druck $P$ auf, wenn nur die Abweichung $NBP = \alpha$ der Richtung dieses Druckes von der Normale $BN$ nicht den Reibungswinkel überschreitet; denn da die Kraft $P$ den Normaldruck:

Fig. 254.




$$\overline{BN} = P\cos.\alpha$$

und den Seiten- oder Tangentialdruck:

$$\overline{BS} = S = P\sin.\alpha$$

giebt und aus dem Normaldrucke $P\cos.\alpha$ die jeder Bewegung in der Ebene $FH$ entgegenwirkende Reibung $\varphi P\cos.\alpha$ entsteht, so wird $S$ eine Bewegung nicht hervorbringen können, also im Gleichgewicht bleiben, so lange

$$\varphi P\cos.\alpha > P\sin.\alpha \text{ oder } \varphi\cos.\alpha > \sin.\alpha, \text{ d. i.}$$
$$tang.\alpha < \varphi \text{ oder } \alpha < \varrho$$

ist. Dreht man den Ruhewinkel $CBD = \varrho$ um die Normale $CB$, so beschreibt er einen Kegel, den man Reibungskegel (franz. cone de fr.; engl. cone of resistance) nennen kann. Der Reibungskegel umschließt alle diejenigen Kraftrichtungen, bei welchen eine vollständige Aufnahme des schiefen Druckes stattfindet.

Beispiel. Um einen gefüllten und 200 Pfund schweren Kübel auf einer unter 50 Grad ansteigenden Holzbahn hinaufzuziehen, ist bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}48$ die nöthige Kraft:

$$P = (\varphi\cos.\alpha + \sin.\alpha)\,G = (0{,}48\cos.50^0 + \sin.50^0)\,.\,200$$
$$= (0{,}308 + 0{,}766)\,.\,200 = 215 \text{ Pfund};$$

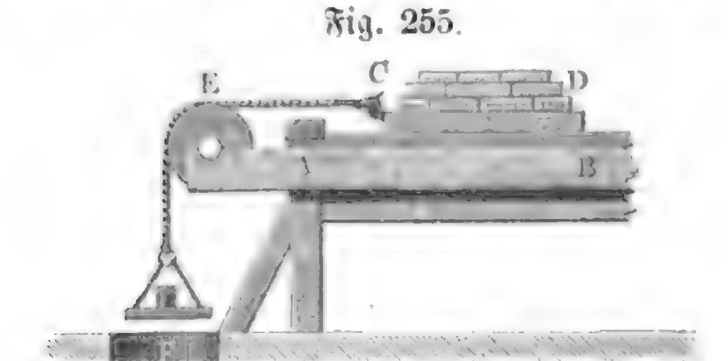
um ihn hinunterzulassen, oder sein Hinuntergehen zu verhindern, ist dagegen die erforderliche Kraft:

$$P = (\varphi\cos.\alpha - \sin.\alpha)\,G = -(\sin.50^0 - 0{,}48\,.\cos.50^0)\,.\,200$$
$$P_1 = -(0{,}766 - 0{,}308)\,.\,200 = -91{,}5 \text{ Pfund.}$$

§. 173 **Reibungsversuche.** Versuche über die Reibung sind von Vielen angestellt worden; am ausgedehntesten und im größten Maßstabe ausgeführt sind aber die Versuche von Coulomb und Morin. Beide wendeten zur Erforschung der Reibungscoefficienten für die gleitende Bewegung einen auf einer horizontalen Bahn fortgleitenden Schlitten an, der durch ein über eine feste Rolle weggelegtes und durch Gewichte angespanntes Seil fortgezogen wurde, wie in Fig. 255, wo $AB$ die Bahn, $CD$ den Schlitten, $E$ die Rolle und $F$ das sinkende Gewicht vorstellt, zu ersehen ist. Um die Reibungscoefficienten für verschiedene Materien zu erhalten, wurden nicht nur die Schlittenläufe, sondern die die Unterlage bildenden Balken mit möglichst abgeglätteten Schienen aus den zu untersuchenden Substanzen, wie Holz, Eisen u. s. w. bekleidet.

Die Coefficienten für die Reibung der Ruhe ergaben sich aus dem Gewichte, welches nöthig war, um den Schlitten aus der Ruhe in Bewegung zu setzen;

Fig. 255.




und die Coefficienten für die Reibung der Bewegung ließen sich mit Hülfe der Zeit $t$ berechnen, welche der Schlitten brauchte, um einen gewissen Weg $s$ zu durchlaufen. Ist $G$ das Gewicht des Schlittens und $P$ das Gewicht zum Fortziehen desselben, so hat man die Reibung $= \varphi G$, die bewegende Kraft $= P - \varphi G$ und die Masse $M = \frac{P + G}{g}$, es folgt daher nach §. 68 die Acceleration der entstehenden gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$p = \frac{P - \varphi G}{P + G} g,$$

und, durch Umkehrung, der Reibungscoefficient:

$$\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P + G}{G} \cdot \frac{p}{g}.$$

Es ist aber noch $s = \frac{1}{2} p t^2$ (§. 11), daher $p = \frac{2s}{t^2}$ und

$$\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P + G}{G} \cdot \frac{2s}{g t^2}.$$

Läßt man den Schlitten von einer schiefen Ebene herabgleiten, so ist die bewegende Kraft $= G(sin. \alpha - \varphi \, cos. \alpha)$, und die beschleunigte Masse $= \frac{G}{g}$, daher die Beschleunigung

$$p = \frac{2s}{t^2} = \frac{G(sin. \alpha - \varphi \, cos. \alpha)}{\frac{G}{g}} = g(sin. \alpha - \varphi \, cos. \alpha),$$

oder: $\frac{2s}{g t^2} = sin. \alpha - \varphi \, cos. \alpha$, und daher der Coefficient der gleitenden Reibung

$$\varphi = tang. \alpha - \frac{2s}{g t^2 \, cos. \alpha}.$$

Bezeichnet $h$ die Höhe, $l$ die Länge und $a$ die Basis der geneigten Ebene, so hat man auch

$$\varphi = \frac{h}{a} - \frac{2sl}{g a t^2}.$$

Zur Ausmittelung der Reibungscoefficienten für die Zapfenreibung wurde eine feste Rolle $A\,C\,B$, Fig. 256 (a. f. S.), mit einem umgelegten und durch

Gewichte $P$ und $Q$ angespannten Seile angewendet. Aus der Summe $P + Q$ der Gewichte ergab sich der Druck $R$, und aus der Differenz $P - Q$ die Kraft am Umfang der Rolle, welche der Reibung $F = \varphi (P + Q)$ am Umfang des Zapfens das Gleichgewicht hält; ist nun $CA = a$ der Rollenhalbmesser und $CD = r$ der Zapfenhalbmesser, so hat man wegen der Gleichheit der statischen Momente:

$$(P - Q)\, a = F r = \varphi\, (P + Q)\, r.$$

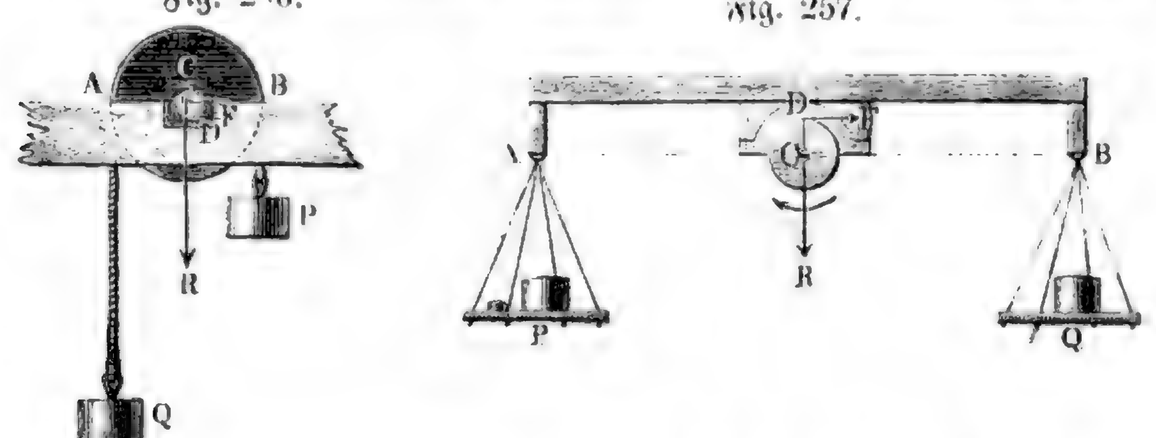
und daher für die Reibung der Ruhe:

$$\varphi = \frac{P - Q}{P + Q} \cdot \frac{a}{r},$$

dagegen für die der Bewegung, wenn das Gewicht $P$ in der Zeit $t$ um $s$ sinkt und $Q$ eben so viel steigt:

$$\varphi = \left(\frac{P - Q}{P + Q} - \frac{2s}{g t^2}\right) \frac{a}{r}.$$

Zu den neuesten Versuchen über die Zapfenreibung hat der Ingenieur Hirn den in Fig. 257 abgebildeten Apparat, welchen er eine Reibungswage




(balance de frottement) nennt, angewendet. Es ist hier $C$ der durch irgend eine Maschine, z. B. durch ein Wasserrad, in stetige Umdrehung zu setzende Zapfen, $D$ das Zapfenlager und $ADB$ ein gleicharmiger Hebel, welcher mittels der Gewichte $P$ und $Q$ dieses Lager auf den Zapfen aufdrückt. Der Zapfendruck $R = P + Q$ erzeugt die Reibung

$$F = \varphi R = \varphi\, (P + Q)$$

zwischen dem Zapfen und seinem Lager. Mit dieser Kraft sucht der in der Richtung des Pfeiles umlaufende Zapfen das Lager sammt dem mit ihm fest verbundenen Hebel $ADB$ umzudrehen, und es ist daher, um denselben in horizontaler Lage zu erhalten, auf der einen Seite $A$ desselben das Gewicht $P$ so viel größer zu nehmen, als das Gewicht $Q$ auf der anderen Seite, bis $P - Q$ der Reibung $F$ das Gleichgewicht hält. Nun wirkt aber die Reibung $F$ an dem dem Zapfenhalbmesser gleichen Hebelarme $CD = r$, und die Gewichtsdifferenz $P - Q$ an dem Arme $CA = a$, welche dem Horizontalabstande der Axe $C$ des Zapfens von der Verticalen durch den Aufhängepunkt $A$ gleich ist; daher hat man:

$$F r = \varphi R r = \varphi (P + Q) r = (P - Q) a.$$

und den gesuchten Reibungscoefficienten wieder

$$\varphi = \frac{P - Q}{P + Q} \cdot \frac{a}{r}.$$

Anmerkung. Vor Coulomb hatten sich schon Amontons, Camus, Bülfinger, Muschenbroek, Ferguson, Vince u. A. mit der Reibung beschäftigt und Versuche über die Reibung angestellt. Die Ergebnisse aller dieser Untersuchungen haben jedoch für die Praxis wenig Werth, weil sie in zu kleinem Maßstabe angestellt worden sind. Denselben Mangel haben selbst noch die Versuche von Ximenes, welche mit denen von Coulomb fast gleichzeitig angestellt wurden. Die Ergebnisse des Ximenes findet man in dem Werke „Teoria e Pratica delle resistenze de' solidi ne' loro attriti, Pisa 1782". Die Versuche Coulomb's sind ausführlich beschrieben in dem Werke: „Théorie des machines simples etc. par Coulomb. Nouv. édit. 1821". Einen Auszug hiervon findet man in der Preisschrift von Metternich „vom Widerstande der Reibung, Frankfurt und Mainz 1789". Die neueren Versuche über die Reibung wurden von Rennie und Morin angestellt. Rennie wendete bei seinen Versuchen theils einen Schlitten auf horizontaler Bahn, theils auch eine schiefe Ebene an, von welcher er die Körper herabgleiten ließ und wobei er aus dem Reibungswinkel auf die Größe der Reibung schloß. Die Versuche Rennie's erstrecken sich auf mannigfaltige in der Technik vorkommende Stoffe, als Eis, Tuch, Leder, Holz, Steine und Metalle; sie liefern auch wichtige Ergebnisse über die Abnutzung der Körper, allein der Apparat und die Art der Ausführung dieser Versuche lassen eine hinreichende Sicherheit, wie sie zumal die Versuche Morin's erreicht zu haben scheinen, nicht erwarten. Eine deutsche Bearbeitung der Rennie'schen Versuche liefert der 17. Band (1832) der Wiener Jahrbücher des K. K. polytechnischen Institutes, auch der 34. Band (1829) von Dingler's polytechnischem Journal. Die ausgedehntesten und einen hohen Grad von Sicherheit versprechenden Versuche sind von Morin zur Ausführung gebracht worden, obgleich nicht abgeleugnet werden kann, daß sie einige Zweifel und Unsicherheiten, und noch dies und jenes zu wünschen übrig lassen. Es ist hier nicht der Ort, die Methoden und Apparate bei diesen Versuchen zu beschreiben, wir können hier nur auf Morin's Schriften: „Nouvelles Expériences sur le frottement" u. s. w. verweisen. Eine vortreffliche Bearbeitung des Artikels „Reibung" und eine ziemlich ausführliche Beschreibung aller Versuche über die Reibung, namentlich auch der Morin'schen, giebt Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 16. und 17. Jahrgang, Berlin 1837 und 1838. Neuere Versuche über die mittelbare Reibung, namentlich mit Berücksichtigung der verschiedenen Schmiermittel, von M. G. Ad. Hirn, sind beschrieben im Bulletin de la société industrielle de Mulhouse, No. 128 und 129, 1855, unter dem Titel: „Etudes sur les principaux phénomènes que présentent les frottements médiats etc."; im Auszuge: „polytechnisches Centralblatt, 1855. Lieferung 10". Die neuesten Versuche über die Reibung von Bochet sind unter der Ueberschrift: „Nouv. Recherches expérimentales sur le frottement de glissement, par M. Bochet" in den Annales des Mines, Cinq. Série, Tome XIX, Paris 1861, beschrieben. Ueber die Versuche mit Waltjen's Reibungswage giebt Herr Prof. Rühlmann im polytechnischen Centralblatt 1861, Heft 10 einige Nachrichten.

§. 174 **Reibungstafeln.** Folgende Tabellen enthalten eine gedrängte Zusammenstellung der im Praktischen vorzüglich brauchbaren Coefficienten der gleitenden Reibung.

## Tafel I.

### Reibungscoefficienten der Ruhe.

| Namen der sich reibenden Körper. | | Zustand der Flächen und Natur der Schmieren. | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Trocken. | Mit Wasser benetzt. | Mit Olivenöl. | Schweineschmalz. | Talg. | Trockene Seife. | Polirt und fettig. | Fettig und benetzt. |
| Holz auf Holz . . . | kleinster Werth | 0,30 | 0,65 | — | — | 0,14 | 0,22 | 0,30 | |
| | mittlerer „ | 0,50 | 0,68 | — | 0,21 | 0,19 | 0,36 | 0,35 | |
| | größter „ | 0,70 | 0,71 | — | — | 0,25 | 0,44 | 0,40 | |
| Metall auf Metall | kleinster Werth | 0,15 | — | 0,11 | | | | | |
| | mittlerer „ | 0,18 | — | 0,12 | 0,10 | 0,11 | — | 0,15 | |
| | größter „ | 0,24 | — | 0,16 | | | | | |
| Holz auf Metall . . . . . . . . . . . . | | 0,60 | 0,65 | 0,10 | 0,12 | 0,12 | — | 0,10 | |
| Hanf in Seilen, Zöpfen oder Gurten auf Holz . . . | kleinster Werth | 0,50 | | | | | | | |
| | mittlerer „ | 0,63 | 0,87 | | | | | | |
| | größter „ | 0,80 | | | | | | | |
| Dickes Sohlenleder zu Liderungen auf Holz od. Gußeisen | hochkantig . . . | 0,43 | 0,62 | 0,12 | | | | | |
| | flach . . . . . . | 0,62 | 0,80 | 0,13 | — | — | — | — | 0,27 |
| Schwarze Lederriemen über Trommeln . . . | von Holz . . | 0,47 | | | | | | | |
| | von Metall . | 0,54 | — | — | — | — | — | 0,28 | 0,38 |
| Steine oder Ziegel auf Steinen oder Ziegeln, glatt bearbeitet . . . . . . | kleinster Werth | 0,67 | | | | | | | |
| | größter „ | 0,75 | | | | | | | |
| Steine auf Schmiedeeisen . . . . . . | kleinster Werth | 0,42 | | | | | | | |
| | größter „ | 0,49 | | | | | | | |
| Hirnholz auf Steinen . . . . . . . . . | | 0,64 | | | | | | | |

## Tafel II.

### Reibungscoefficienten der Bewegung.

| Namen der sich reibenden Körper. | | Zustand der Flächen und Art der Schmieren. Trocken. | Mit Wasser. | Olivenöl. | Schweineschmalz. | Talg. | Schweinefett u. Graphit. | Reine Wagenschmiere. | Trockene Seife. | Fettig. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Holz auf Holz | kleinster Werth | 0,20 | — | — | 0,06 | 0,06 | — | – | 0,14 | 0,08 |
| | mittlerer „ | 0,36 | 0,25 | — | 0,07 | 0,07 | | -- | 0,15 | 0,12 |
| | größter „ | 0,48 | — | — | 0,07 | 0,08 | — | – | 0,16 | 0,15 |
| Metall auf Metall ..... | kleinster Werth | 0,15 | — | 0,06 | 0,07 | 0,07 | 0,06 | 0,12 | — | 0,11 |
| | mittlerer „ | 0,18 | 0,31 | 0,07 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,15 | 0,20 | 0,18 |
| | größter „ | 0,24 | -- | 0,08 | 0,11 | 0,11 | 0,09 | 0,17 | – | 0,17 |
| Holz auf Metall | kleinster Werth | 0,20 | — | 0,05 | 0,07 | 0,06 | — | — | – | 0,10 |
| | mittlerer „ | 0,42 | 0,24 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,08 | 0,10 | 0,20 | 0,14 |
| | größter „ | 0,62 | — | 0,08 | 0,08 | 0,10 | – | – | – | 0,16 |
| Hanfseile, Zöpfe u. s. w. .... | auf Holz .. | 0,45 | 0,33 | | | | | | | |
| | auf Eisen . | — | — | 0,15 | — | 0,19 | | | | |
| Sohlenleder, flach auf Holz oder Metall ..... | roh ..... | 0,54 | 0,36 | 0,16 | — | 0,20 | | | | |
| | geklopft ... | 0,30 | — | | | | | | | |
| | fettig .... | -- | 0,25 | | | | | | | |
| Desgl. hochkantig, für Kolbenliderung .... | trocken ... | 0,34 | 0,31 | 0,14 | — | 0,14 | | | | |
| | fettig .... | — | 0,24 | | | | | | | |

Anmerkung. Vollständigere Tabellen der Reibungscoefficienten enthält der „Ingenieur“, Seite 403 u. s. w. Die Reibungscoefficienten lockerer Massen u. s. w. werden im zweiten Theile, bei der Theorie des Erddruckes, mitgetheilt.

§. 175 **Die neuesten Reibungsversuche.** Durch Bochet's Versuche über die gleitende Reibung erhalten die im Vorstehenden enthaltenen Ergebnisse älterer Versuche von Coulomb und Morin noch einige wesentliche Ergänzungen. Diese wurden auf einer söhligen Eisenbahnstrecke mit Eisenbahnwagen von 6 bis 10 Tonnen Gewicht angestellt, welche entweder mittels ihrer festgekeilten Räder, oder mittels besonderer Schuhe (patins) auf der Schienenbahn fortglitten. Diese Schuhe waren vor, hinter und zwischen den Rädern an dem Wagengestelle befestigt und bei verschiedenen Versuchsreihen mit verschiedenen Sohlen von Holz, Leder, Eisen u. s. w. bekleidet, wobei der Druck pro Quadratcentimeter nach Belieben auf 2, 4, 6, 10 und 15 Kilogramm gebracht werden konnte. Die Bewegung dieses zu einem Schlitten umgeschaffenen Vehikels erfolgte durch einen vorgespannten Dampfwagen, und ein zwischen beiden eingeschaltetes Federdynamometer gab mittels eines Zeichnenapparates die der gleitenden Reibung des Schlittens gleichzusetzende Zugkraft an. Um den Widerstand der Luft so viel wie möglich zu beseitigen, gab man dem Wagen, welcher dem Schlitten vorauslief, einen Querschnitt, welcher den des letzteren noch übertraf.

Durch diese Versuche wird die Richtigkeit der Formel $F = \varphi N$, wonach die Reibung $F$ dem Druck proportional ist, von Neuem bestätigt; was aber den Reibungscoefficienten betrifft, so ist derselbe nicht allein von der Art und dem Zustande der Reibungsflächen, sondern auch von anderen Verhältnissen, namentlich auch von der Geschwindigkeit des Gleitens und nächstdem von dem specifischen Drucke, d. i. dem Drucke pro Flächeneinheit, abhängig. Herr Bochet setzt:

$$\varphi = \frac{\varkappa - \gamma}{1 + \alpha v} + \gamma,$$

wobei $v$ die Geschwindigkeit der Bewegung, $\varkappa$ den Werth von $\varphi$ für eine unendlich langsame und dagegen $\gamma$ den Werth von $\varphi$ für eine sehr schnelle Bewegung bezeichnet. Hiernach nimmt also der Reibungscoefficient mit dem Wachsen der Geschwindigkeit allmälig von $\varkappa$ auf $\gamma$ ab. Der Coefficient $\alpha$ ist im Mittel $= 0,3$ zu setzen, wenn man $v$ in Meter ausdrückt, dagegen $= 0,094$, wenn man $v$ in Fußen giebt. Man kann hiernach nur bei Geschwindigkeiten von 0 bis höchstens 1 Fuß den Reibungscoefficienten bei übrigens gleichen Verhältnissen als constant annehmen. Die Coefficienten $\varkappa$ und $\gamma$ sind verschieden bei verschiedenen Stoffen, und abhängig von dem Grade der Glätte der Reibungsflächen, von der Schmiere, von dem specifischen Drucke u. s. w.

Den größten Werth hat der Reibungscoefficient $\varkappa$ beim Gleiten von Holz, zumal weichem, sowie von Leder und Guttapercha auf trockenen und ungeschmierten Eisenschienen. Hier ist $\varkappa = 0,40$ bis $0,70$; im Mittel für weiches Holz, $\varkappa = 0,60$ und für hartes, $\varkappa = 0,55$.

Für die Reibung von Eisen auf Eisen ist $\varkappa$ ebenfalls sehr verschieden ausgefallen, sind die Reibungsflächen nicht polirt, so hat man: $\varkappa = 0{,}25$ bis 0,60, dagegen bei polirten Reibungsflächen: $\varkappa = 0{,}12$ bis 0,40. Die Reibung von Eisen auf Eisen wird durch das Benetzen mit Wasser nicht vermindert, dagegen fällt die Reibung von Holz, Leder und Guttapercha auf nassen Eisenschienen beträchtlich kleiner aus als auf trockenen Eisenschienen. Bei eingeölten Flächen sinkt $\varkappa$ bis auf 0,05 bis 0,20.

Der Coefficient $\gamma$ ist stets kleiner als $\varkappa$; bei großen Geschwindigkeiten, großer Glätte der Flächen, gehörig angewendeter Schmiere und mäßigem specifischen Drucke nähert sich für alle Stoffe $\gamma$ einem und demselben Werthe.

Die Reibung der Ruhe ist nur in den Fällen größer und zwar doppelt so groß, als die der Bewegung, wenn Holz oder Leder auf benetzten oder eingeschmierten Eisenschienen gleitet.

Nach diesen Versuchen ist:

1) für **trockenes weiches Holz**, bei mindestens 10 Kilogramm Druck pro Quadratcentimeter, oder 137 Pfund pro Quadratzoll:

$$\varphi = \frac{0{,}30}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}30;$$

2) für **trockenes hartes Holz**, bei demselben Drucke:

$$\varphi = \frac{0{,}30}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}25;$$

3) für **halbpolirtes Eisen**, trocken oder naß, bei mehr als 300 Kilogramm Druck pro Quadratcentimeter oder 4103 Pfund pro Quadratzoll.

$$\varphi = \frac{0{,}15}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}15;$$

4) für dasselbe, entweder trocken unter dem Drucke von wenigstens 100 Kilogramm pro Quadratcentimeter, oder polirt und geschmiert, bei einem specifischen Drucke von mindestens 20 Kilogramm, so wie für nicht harziges Holz beim Schmieren mit reinem Wasser, unter demselben Drucke:

$$\varphi = \frac{0{,}175}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}075;$$

5) für Holz mit fettigem Wasser oder Fett geschmiert, bei gehöriger Politur und unter dem Drucke von mindestens 20 Kilogramm pro Quadratcentimeter (274 Pfund pro Quadratzoll):

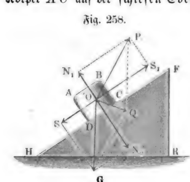
$$\varphi = \frac{0{,}10}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}06.$$

Ist $v$ in Fußen gegeben, so muß man im Nenner statt $0{,}3\,v$, $0{,}094\,v$ setzen.

Anmerkung. Es ist sehr zu wünschen, daß diese in sehr großem Maßstabe ausgeführten Versuche, welche zum größten Theil von dem seither Bekannten ganz abweichende Resultate gegeben haben, noch von Anderen wiederholt werden.

§. 176 **Schiefe Ebene.** Die Theorie der gleitenden Reibung findet ihre vorzüglichste Anwendung bei der Untersuchung des Gleichgewichtes von einem Körper $AC$ auf der schiefen Ebene $FH$, Fig. 258. Ist, in Uebereinstimmung mit §. 146, $FHR = \alpha$ der Neigungswinkel der schiefen Ebene, und $POS_1 = \beta$, der Winkel, welchen die Kraft $P$ mit der schiefen Ebene einschließt, so hat man die aus dem Gewichte $G$ des Körpers entspringende Normalkraft

Fig. 258.




$$N_0 = G\ cos.\ \alpha,$$

dagegen die Kraft zum Herabgleiten $= S = G\ sin.\ \alpha$, ferner die Kraft $N_1$, mit welcher $P$ den Körper von der Ebene abzuziehen sucht, $= P sin. \beta$, und die Kraft $S_1$, mit welcher sie den Körper auf der Ebene hinaufzieht, $= P\ cos. \beta$. Der übrig bleibende Normaldruck ist:

$$N = N_0 - N_1 = G\ cos. \alpha - P\ sin. \beta,$$

folglich die Reibung:

$$F = \varphi (G\ cos.\ \alpha - P\ sin.\ \beta).$$

Kommt es darauf an, die Kraft $P$ zum Hinaufziehen des Körpers auf der schiefen Ebene zu finden, so ist die Reibung zu überwinden, es muß also sein:

$$S_1 = S + F, \text{ d. i. } P cos. \beta = G sin. \alpha + \varphi (G cos. \alpha - P sin. \beta).$$

Soll aber die Kraft bestimmt werden, welche den Körper am Herabgleiten verhindert, so kommt die Reibung der Kraft zu Hülfe, es ist also:

$$S_1 + F = S, \text{ d. i. } P cos. \beta + \varphi (G cos. \alpha - P sin. \beta) = G sin. \alpha.$$

Hiernach bestimmt sich die Kraft für den ersten Fall:

$$P = \frac{sin. \alpha + \varphi\ cos. \alpha}{cos\ \beta + \varphi\ sin. \beta} \cdot G, \text{ und für den zweiten:}$$

$$P = \frac{sin. \alpha - \varphi\ cos. \alpha}{cos. \beta - \varphi\ sin. \beta} \cdot G.$$

Führt man den Reibungswinkel $\varrho$ ein, indem man

$$\varphi = tang.\ \varrho = \frac{sin.\ \varrho}{cos.\ \varrho} \text{ setzt, so erhält man:}$$

$$P = \frac{sin. \alpha . cos. \varrho \pm cos. \alpha . sin. \varrho}{cos. \beta . cos. \varrho \pm sin. \beta . sin. \varrho} \cdot G,$$

oder, nach bekannten Sätzen der Trigonometrie:

$$P = \frac{sin.(\alpha \pm \varrho)}{cos.(\beta \mp \varrho)} \cdot G;$$

und es gelten die oberen Zeichen, wenn es darauf ankommt, Bewegung hervorzubringen, dagegen die unteren, wenn Bewegung zu verhindern ist.

So lange $P > \frac{sin.(\alpha - \varrho)}{cos.(\beta + \varrho)} G$ und

$< \frac{sin.(\alpha + \varrho)}{cos.(\beta - \varrho)}$ ist,

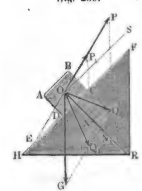
kann natürlich der Körper weder auf- noch abwärts gleiten.

Ist $\alpha < \varrho$, so erfordert das Herabschieben die Kraft:

$$P = \frac{G\, sin.(\varrho - \alpha)}{cos.(\varrho + \beta)}.$$

Die letzte Formel findet man auch durch eine einfache Anwendung des Kräfteparallelogrammes $OPQG$, Fig. 259. Da ein Körper noch diejenige Kraft eines anderen Körpers aufnimmt, welche um den Reibungswinkel $\varrho$ von der Normale einer Oberfläche abweicht (§. 172), so findet in dem vorliegenden Falle Gleichgewicht statt, wenn die Mittelkraft $\overline{OQ} = Q$ aus den Kräften $P$ und $G$ mit der Normale $ON$ den Winkel $NOQ = \varrho$ einschließt. Setzt man nun in der allgemeinen Formel:

Fig. 259.




$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\, GOQ}{sin.\, POQ},$$

$GOQ = GON + NOQ = \alpha + \varrho$, und

$POQ = POS + SOQ = \beta + 90^0 - \varrho$, so erhält man:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin.(\alpha + \varrho)}{sin.(\beta - \varrho + 90^0)} = \frac{sin.(\alpha + \varrho)}{cos.(\beta - \varrho)}.$$

Wenn die Kraft $P_1$ das Herabgleiten von der schiefen Ebene verhindern soll, so fällt die Mittelkraft $Q_1$ auf die untere Seite der Normale $ON$, und es ist der Reibungswinkel $\varrho$ negativ in Rechnung zu bringen, wonach dann folgt:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin.(\alpha - \varrho)}{cos.(\beta + \varrho)},$$

ganz in Uebereinstimmung mit dem Obigen.

Ruht der Körper auf einer Horizontalebene, so ist $\alpha = 0$, daher die Kraft zum Fortschieben:

$$P = \frac{\varphi G}{\cos.\beta + \varphi \sin.\beta} = \frac{G \sin.\varrho}{\cos.(\beta - \varrho)}.$$

Wirkt die Kraft parallel zur schiefen Ebene, d. h. in der Richtung ihrer Falllinie, so hat man $\beta = 0$, und daher:

$$P = (\sin.\alpha \pm \varphi \cos.\alpha)\, G = \frac{\sin.(\alpha \pm \varrho)}{\cos.\varrho} \cdot G \text{ (vergl. §. 172).}$$

Wirkt endlich die Kraft horizontal, so hat man:

$\beta = -\alpha$; $\cos.\beta = \cos.\alpha$ und $\sin.\beta = -\sin.\alpha$, daher:

$$P = \frac{\sin.\alpha \pm \varphi \cos.\alpha}{\cos.\alpha \mp \varphi \sin.\alpha} \cdot G = \frac{tang.\alpha \pm \varphi}{1 \mp \varphi\, tang.\alpha} \cdot G, \text{ d. i.}$$

$P = tang.(\alpha \pm \varrho)\, G$, wie auch die Auflösung des Parallelogrammes $OPQG$ unmittelbar giebt.

Uebrigens fällt die Kraft zum Hinaufschieben am kleinsten aus, wenn der Nenner $\cos.(\beta - \varrho)$ am größten, nämlich $= 1$, also $\beta - \varrho = 0$, d. i. $\beta = \varrho$ ist. Wenn also die Kraftrichtung um den Reibungswinkel von der schiefen Ebene abweicht, so ist die Kraft selbst am kleinsten, und zwar:

$$P = \sin.(\alpha + \varrho) \,.\, G.$$

Beispiel. Welchen Axendruck hat die Spreize $AE$, Fig. 260, auszuhalten, wenn dieselbe einen Felsblock (eine Wand) $ABCD$ vom Gewichte $G = 5000$ Pfund von dem Herabgleiten von einer schiefen Ebene $CD$ (dem Liegenden) abhalten soll, vorausgesetzt, daß die Neigung der Spreize gegen den Horizont 35°, die der schiefen Ebene $CD$ aber 50° und der Reibungscoefficient $\varphi = 0,75$ beträgt? Es ist hier:

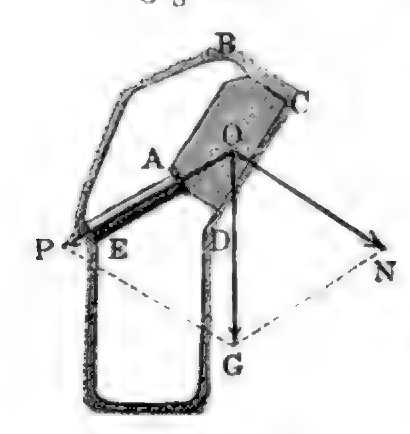
$G = 5000$, $\alpha = 50^0$, $\beta = 35^0 - 50^0 = -15^0$ und $\varphi = 0,75$,

daher giebt die Formel:

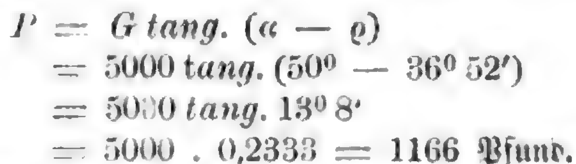
$$P = \frac{\sin.\alpha - \varphi\cos.\alpha}{\cos.\beta - \varphi \sin.\beta} \cdot G = \frac{\sin.50^0 - 0,75\cos.50^0}{\cos.15^0 + 0,75\sin.15^0} \cdot 5000$$

$$= \frac{0,766 - 0,482}{0,966 + 0,194} \cdot 5000 = \frac{1420}{1,160} = 1224 \text{ Pfund.}$$

Fig. 260.




Wäre die Spreize horizontal, so hätte man $\beta = -50^0$, und $tang.\varrho = 0,75$, daher: $\varrho = 36^0 52'$, endlich:



$$P = G\, tang.(\alpha - \varrho)$$
$$= 5000\, tang.(50^0 - 36^0 52')$$
$$= 5000\, tang.\, 13^0 8'$$
$$= 5000 \,.\, 0,2333 = 1166 \text{ Pfund.}$$

Um dieselbe Wand durch eine horizontale Kraft auf dem Liegenden hinaufzuschieben, wäre unter übrigens gleichen Umständen die Kraft:

$$P = G\, tang.(\alpha + \varrho)$$
$$= 5000\, tang.\, 86^0 52'$$
$$= 5000 \,.\, 18,2676 = 91338 \text{ Pfd.}$$

nöthig.

Der **Normaldruck**, welchen der Körper $A\,C$ auf der schiefen Ebene $FH$, §. 177 Fig. 261, ausübt, ist beim **Hinaufschieben**:

$$N = Q\,cos.\,\varrho = \frac{G\,sin.\,OPQ}{sin.\,POQ}\,cos.\,\varrho = \frac{G\,sin.(90^0 - \alpha - \beta)}{sin.(\beta + 90^0 - \varrho)}\,cos.\,\varrho$$

$$= \frac{G\,cos.(\alpha + \beta)\,cos.\,\varrho}{cos.(\beta - \varrho)},$$

und dagegen in den Fällen, wenn der Körper am **Herabgleiten** verhindert wird:

$$N_1 = Q_1\,cos.\,Q_1\,O\,N_1 = Q_1\,cos.\,\varrho = \frac{G\,cos.(\alpha + \beta)\,cos.\,\varrho}{cos.(\beta + \varrho)}.$$

Ist die Richtung der Kraft parallel zur Falllinie der Ebene, so hat man $\beta = 0$, und $N = G\,cos.\,\alpha$; ist dagegen die Richtung derselben horizontal, so hat man $\beta = -\alpha$ und daher

$$N = \frac{G\,cos.\,\varrho}{cos.\,(\alpha \pm \varrho)} \text{ zu setzen.}$$

Fig. 261.

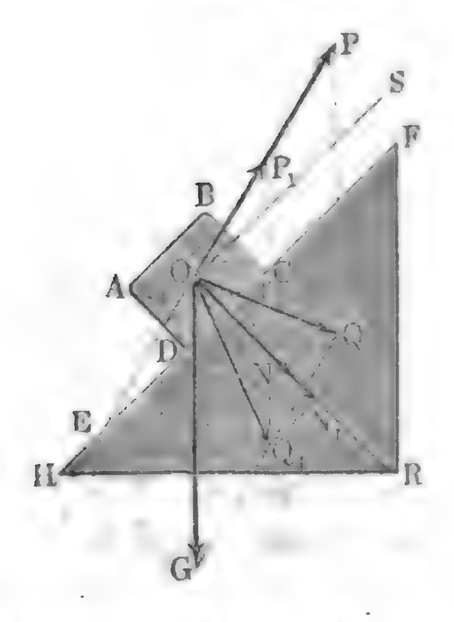
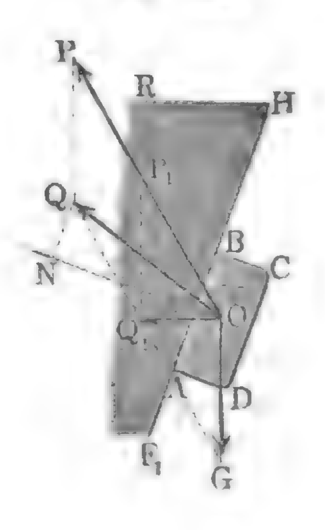



Fig. 262.

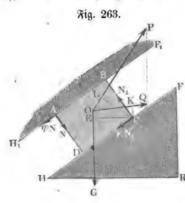



Der **Normaldruck** fällt = Null aus, wenn $cos.\,(\alpha + \beta) = 0$, also $\alpha + \beta = 90$ Grad ist, und wird negativ, wenn $\alpha + \beta > 90^0$, oder $\beta > 90 - \alpha$ wird. Im letzteren Falle ist natürlich die schiefe Ebene nicht unter, sondern, wie Fig. 262 darstellt, **über den Körper** zu legen. Es finden natürlich auch hier wieder die beiden extremen Fälle des Gleichgewichtes statt, wobei die Richtung der auf die schiefe Ebene $FH$ übergehenden Mittelkraft $Q$ oder $Q_1$ entweder auf der oberen oder auf der unteren Seite von der Normalen um den Reibungswinkel $NOQ = NOQ_1 = \varrho$ abweicht.

Bei den vorstehenden Entwickelungen der Formeln für das Gleichgewicht eines Körpers auf der schiefen Ebene ist noch vorauszusetzen, daß die Mittelkraft $Q$ vollkommen vom Körper $A\,C$ auf die eine schiefe Ebene bildende

Stütze $FHR$ übergehen könne; dies ist jedoch (nach §. 146) nur dann möglich, wenn die Richtung dieser Kraft die Auflagersfläche $CD$ des Körpers $AC$ selbst durchschneidet. Außerdem hat der Körper, wie z. B. $AC$, Fig. 263, in Folge der Kraft $Q$ ein Bestreben zum Drehen oder Kippen um die äußerste Kante $C$, welches um so größer ausfällt, je größer der Abstand $CK = e$ dieser Kante von der Richtung $OQ$ der Mittelkraft $Q$ ist.

Fig. 263.




Bezeichnet $a$ den Abstand $CL$ der Kraftrichtung $OP$, und $b$ den Abstand $CE$ der verticalen Schwerlinie $OG$ des Körpers von der äußersten Kante $C$ desselben, so ist das Moment, mit welchem sich der Körper von links nach rechts um $C$ zu drehen sucht:

$$Qe = Pa - Gb.$$

Wäre nun $Pa = Gb$, oder $\frac{P}{G} = \frac{b}{a}$, so ginge die Mittelkraft $Q$ gerade durch $C$, wobei sie eben noch von der schiefen Ebene aufgenommen würde; und wäre $Pa < Gb$, so würde sich der Körper um $C$ von rechts nach links zu drehen suchen, woran ihn aber die Undurchdringlichkeit seiner Masse verhindert.

Wenn dagegen $Pa > Gb$ ist, so muß der Körper noch eine zweite Unterstützung erhalten, z. B. noch von einer zweiten geneigten Ebene $F_1 H_1$ geleitet werden. Wenn diese zweite Ebene in $A$ einen Druck $N$ und die daraus erwachsende Reibung $\varphi N$ aufnimmt, also die geneigte Ebene $F_1 H_1$ mit den Gegenkräften $- N$ und $- \varphi N$ auf den Körper in $A$ zurückwirkt, welche die Umdrehung des Körpers um $C$ verhindern, so muß die Summe der Momente dieser Kräfte gleich sein dem Umdrehungsmomente von $Q$, also:
$Nl + \varphi N d = Qe = Pa - Gb$, oder

$$1)\quad N(l + \varphi d) = Pa - Gb,$$

wobei $l$ und $d$ die Abstände $CD$ und $CB$ der Kante $A$ von $C$ in den Richtungen parallel und winkelrecht zur geneigten Ebene bezeichnen.

Ist überdies noch $N_1$ der Druck des Körpers auf die geneigte Ebene $FH$ in $C$, so wie $\varphi N_1$ die demselben entsprechende Reibung, so kann man setzen:

$$2)\quad P \cos. \beta = G \sin. \alpha + \varphi (N + N_1) \text{ und}$$
$$3)\quad P \sin. \beta = G \cos. \alpha + N - N_1.$$

Eliminirt man aus den letzten beiden Gleichungen $N_1$, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$P(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) = G(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) + 2\varphi N,$$

und wenn man hierein den Werth $N = \frac{Pa - Gb}{l + \varphi d}$ aus Gleichung (1) einsetzt, so folgt die Gleichung:

$$P(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) = G(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) + \frac{2\varphi(Pa - Gb)}{l + \varphi d},$$

oder:

$$P\left(\frac{l + \varphi d}{2}(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) - \varphi a\right)$$
$$= G\left(\frac{l + \varphi d}{2}(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) - \varphi b\right),$$

woraus sich endlich ergiebt:

$$P = \frac{(l + \varphi d)(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) - 2\varphi b}{(l + \varphi d)(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) - 2\varphi a} G$$
$$= \frac{(l + \varphi d)\sin.(\alpha + \varrho) - 2\varphi b \cos.\varrho}{(l + \varphi d)\cos.(\beta - \varrho) - 2\varphi a \cos.\varrho} \cdot G.$$

Soll $N =$ Null sein, so hat man $Pa = Gb$ und

$$\frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)} = \frac{b}{a},$$

daher, wie auch oben gefunden worden ist:

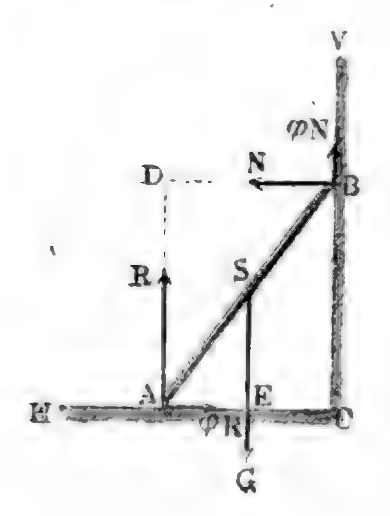
$$P = \frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)} G.$$

**Zurückführung der Theorie des Gleichgewichtes unterstützter Körper auf die des Gleichgewichtes freier Körper.** §. 178 Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes eines Körpers mit Berücksichtigung der Reibung gelangt man auch sicher zum Ziele, wenn man sich den Körper ganz frei denkt, und annimmt, daß jeder andere Körper, mit welchem er in Berührung ist, zwei Kräfte auf ihn ausübt, und zwar eine Kraft $N$, normal von der Berührungsfläche desselben ausgehend, und eine andere Kraft $\varphi N$, der vorausgesetzten Bewegung des Berührungspunktes in dieser Fläche entgegengesetzt und der Reibung zwischen beiden Körpern entsprechend. Dadurch erhält man ein festes System von Kräften, dessen Gleichgewichtszustand nach den Regeln in §. 90 u. s. w. zu beurtheilen ist, wie im folgenden speciellen Falle gezeigt werden soll.

Eine prismatische Stange $AB$, Fig. 264 (a. f. S.), stützt sich unten auf einen horizontalen Boden $CH$ und lehnt sich oben gegen eine verticale Wand $CV$; bei welcher Neigung $BAC = \alpha$ verliert dieselbe ihre Gleichgewichtslage? Hier können wir die Rückwirkung des Bodens auf den Körper durch eine Verticalkraft $R$ und durch die horizontal wirkende Reibung $\varphi R$, und dagegen die Rückwirkung der Wand durch eine Horizontalkraft $N$ und durch eine von unten

nach oben wirkende Reibung $\varphi N$ ausdrücken. Ist folglich $G$ das im Schwerpunkte $S$ niederziehende Gewicht der Stange, so haben wir es mit

Fig. 264.




einem Systeme von den Verticalkräften $G, R, \varphi N$ und einem solchen von den Horizontalkräften $N$ und $\varphi R$ zu thun.

Der Gleichgewichtszustand unter diesen Kräften fordert nun, daß

1) $G = R + \varphi N$,
2) $\varphi R = N$ und
3) $G . \overline{AE} = N . \overline{AD} + \varphi N . \overline{AC}$ sei.

Nun ist aber der Hebelarm $AE$
$= AS \cos. \alpha = \frac{1}{2} AB \cos. \alpha$,
ferner der Hebelarm $AD$
$= AB \sin. \alpha$,
und der Hebelarm $AC$
$= AB \cos. \alpha$, daher ist die dritte Gleichung einfach:
$\frac{1}{2} G \cos. \alpha = N (\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)$ zu schreiben.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$G = R + \varphi^2 R = (1 + \varphi^2) R, \text{ also}$$

$$R = \frac{G}{1 + \varphi^2} \text{ und } N = \frac{\varphi G}{1 + \varphi^2}$$

und setzt man diesen Werth von $N$ in die Gleichung (3) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{2} G \cos. \alpha = \frac{\varphi G}{1 + \varphi^2} (\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha), \text{ oder}$$

$$\frac{1 + \varphi^2}{2 \varphi} = tang. \alpha + \varphi,$$

also für den gesuchten Neigungswinkel:

$$tang. \alpha = \frac{1 + \varphi^2 - 2 \varphi^2}{2 \varphi} = \frac{1 - \varphi^2}{2 \varphi} = \frac{1 - tang. \varrho^2}{2 tang. \varrho}$$

$$= \frac{\cos. \varrho^2 - \sin. \varrho^2}{2 \sin. \varrho \cos. \varrho} = \frac{\cos. 2 \varrho}{\sin. 2 \varrho} = cotg. 2 \varrho$$

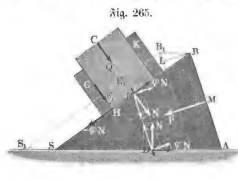
$$= tang. (90^0 - 2 \varrho); \text{ daher ist}$$

$$\angle BAC = \alpha = 90^0 - 2 \varrho, \text{ und } \angle ABC = \beta = 2 \varrho.$$

179 **Theorie des Keiles.** Auch bei dem Keile (s. §. 149) hat die Reibung einen großen Einfluß auf die Gleichgewichtsverhältnisse. Setzen wir voraus, daß der Querschnitt desselben ein gleichschenkliges Dreieck $ABS$, Fig. 265, mit der Schärfe $ASB = \alpha$ bilde, daß die Kraft $P$ in der Mitte $M$ des Keilrückens $AB$ und winkelrecht gegen denselben wirke, und daß ebenso der Körper $CHK$

mit einer gewissen Kraft $N$ rechtwinklig gegen die Keilfläche $BS$ drücke, während der Keil mit der Fläche $AS$ auf einer horizontalen Ebene aufruht.

Fig. 265.




Uebrigens soll der Körper $CHK$ von zwei Backen $G$ und $K$ umgeben sein, welche ihn nöthigen, sammt der Last $Q$ beim Fortschieben des Keiles auf der Horizontalebene, in der gegen die Keilfläche $BS$ rechtwinklig stehenden Richtung $EC$ aufzusteigen.

Da die Richtung der Kraft $P$ von den Keilflächen $AS$ und $BS$ gleichviel abweicht, so sind die Normaldrücke $N, N$ gegen beide Flächen und folglich auch die aus denselben entspringenden Reibungen $\varphi N, \varphi N$ in denselben einander gleich, und es müssen daher auch die Kräfte $P, N, N, \varphi N$ und $\varphi N$ einander das Gleichgewicht halten. Zerlegt man die letzten vier Kräfte parallel und rechtwinklig zur Richtung der Kraft $P$ in je zwei Seitenkräfte, so muß folglich auch die Summe derjenigen dieser Kräfte, welche mit $P$ gleichgerichtet sind, mit $P$ allein im Gleichgewichte sein. Nun weichen aber die Richtungen von $N, N$ um $90 - \frac{\alpha}{2}$, und die von $\varphi N, \varphi N$ um $\frac{\alpha}{2}$ von der Richtung $MS$ der Kraft $P$ ab, daher sind die Componenten von $N, N$ in der Richtung $MS$, $N\, sin. \frac{\alpha}{2}$ und $N\, sin. \frac{\alpha}{2}$, sowie die von $\varphi N$ und $\varphi N$, $\varphi N\, cos. \frac{\alpha}{2}$ und $\varphi N\, cos. \frac{\alpha}{2}$, und es ist zu setzen:

$$P = 2\, N sin. \frac{\alpha}{2} + 2\, \varphi\, N cos. \frac{\alpha}{2} = 2\, N \left( sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi\, cos. \frac{\alpha}{2} \right).$$

In Folge der Reibung $\varphi N$ zwischen der Keilfläche $BS$ und der Grundfläche des Körpers $CHK$ wird dieser Körper noch mit einer gleichen Gegenkraft $-\varphi N$ gegen den Leitbacken $GH$ gedrückt, woraus eine Reibung $F_1 = \varphi_1 . \varphi N = \varphi \varphi_1 N$ entsteht, welche dem Aufschieben des Körpers $CHK$ entgegenwirkt, und weshalb

$$N - F_1 = Q, \text{ oder } N\,(1 - \varphi \varphi_1) = Q, \text{ also}$$

$$N = \frac{Q}{1 - \varphi \varphi_1} \text{ zu setzen ist.}$$

Führt man nun diesen Ausdruck für $N$ in die obigen Formeln ein, so erhält man die zum Aufheben der Last $Q$ nöthige Kraft:

$$P = \frac{2\,Q}{1 - \varphi\,\varphi_1}\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\ \ cos.\ \frac{\alpha}{2}\right),\ \text{annähernd}$$

$$= 2\,Q\,(1 + \varphi\,\varphi_1)\,\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\ \frac{\alpha}{2}\right)$$

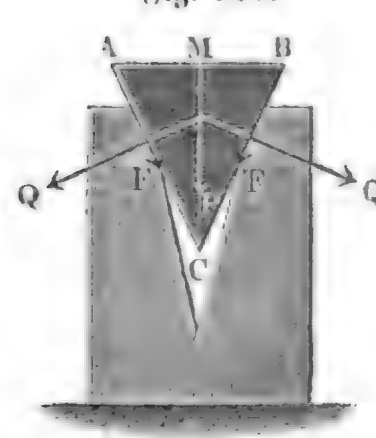
$$= 2\,Q\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\ \frac{\alpha}{2} + \varphi\,\varphi_1\,sin.\ \frac{\alpha}{2}\right),$$

oder wenn man den Coefficienten $\varphi_1$ der Reibung längs $GH$ gleich dem Coefficienten $\varphi$ der Reibung an den Seitenflächen $AS$ und $BS$ setzt:

$$P = \frac{2\,Q}{1 - \varphi^2}\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\frac{\alpha}{2}\right),\ \text{annähernd}$$

$$= 2\,Q\,\left((1 + \varphi^2)\,sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 266.




Bei einem Keile $ABC$, Fig. 266, wie er zum Zerspalten und Zerdrücken der Körper gebraucht wird, ist die dem Normaldruck $Q$ gegen die Seitenflächen $AC$ und $BC$ entsprechende Kraft auf den Rücken $AB$:

$$P = 2\,Q\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\frac{\alpha}{2}\right).$$

Beispiel. Es sei die Last des in Fig. 265 abgebildeten Keiles: $Q = 650$ Pfund, die Schärfe des Keiles: $\alpha = 25^0$, und der Reibungscoefficient: $\varphi = \varphi_1$; man sucht die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um die Last $Q$ in ihrer Leitung um $\frac{1}{2}$ Fuß fortzubewegen.

Die Kraft ist:

$$P = \frac{2\,.\,650}{1 - (0{,}36)^2}\,(sin.\,12\tfrac{1}{2}^0 + 0{,}36\,cos.\,12\tfrac{1}{2}^0)$$

$$= \frac{1300}{1 - 0{,}1296}\,(0{,}2164 + 0{,}36\,.\,0{,}9763)$$

$$= \frac{1300}{0{,}8704}\,(0{,}2164 + 0{,}3515) = \frac{738{,}27}{0{,}8704} = 848{,}2 \text{ Pfund}.$$

Dem Lastwege $EE_1 = s_1 = \frac{1}{2}$ Fuß entspricht der Kraftweg:

$$BL = s = BB_1\,cos\,\frac{\alpha}{2} = \frac{E\,E_1}{sin.\,\alpha}\,cos.\,\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1}{2\,sin.\frac{\alpha}{2}} = \frac{0{,}25}{sin.\,12\tfrac{1}{2}^0}$$

$$= \frac{0{,}25}{0{,}2164} = 1{,}155 \text{ Fuß},$$

demnach ist die gesuchte mechanische Arbeit:

$$Ps = 848{,}2\ .\ 1{,}155 = 979{,}6 \text{ Fußpfund}.$$

Ohne Rücksicht auf Reibung wäre $Ps = Qs_1 = \frac{1}{2}\,.\,650 = 325$ Fußpfund, es wird also in Folge der Reibung der Arbeitsaufwand beim Heben von $Q_1$ nahe verdreifacht.

Auf gleiche Weise läßt sich die Kraft $P$ eines Keiles $A\,B\,C$, Fig. 267, bestimmen, durch welchen eine Last $Q$ emporgehoben wird, während der Keil sich auf der horizontalen Ebene $H\,O$ fortschiebt. Nehmen wir an, daß der Normaldruck zwischen dem Keile $A\,B\,C$ und dem Blocke $D$, welcher durch die Last $Q$ vertical abwärts gedrückt wird, $= N$ sei, daß ferner der Normaldruck des Keiles auf die Unterlage $H\,O$, $= R$ und der Normaldruck des Blockes auf die Seitenführung $E\,E$, $= S$ betrage. Dann muß $P$ den Kräften $R$, $\varphi_1 R$, $- N$ und $- \varphi N$, und ebenso $Q$ den Kräften $S$, $\varphi_2 S$, $N$ und $\varphi N$ das Gleichgewicht halten. §. 180

Fig. 267.

Ist nun noch $\alpha$ der Neigungswinkel $A\,B\,C$ der Keilfläche $A\,B$ gegen den Horizont, so läßt sich $N$ in die Verticalkraft $N cos. \alpha$ und Horizontalkraft $N sin. \alpha$, und $\varphi N$ in die Verticalkraft $\varphi N sin. \alpha$ und Horizontalkraft $\varphi N cos. \alpha$ zerlegen, und daher setzen:

1) $P = \varphi_1 R + N sin. \alpha + \varphi N cos. \alpha$,

2) $R = N cos. \alpha - \varphi N sin. \alpha$,

3) $Q = N cos. \alpha - \varphi N sin. \alpha - \varphi_2 S$

sowie

4) $S = N sin. \alpha + \varphi N cos. \alpha$.

Aus den beiden ersten Gleichungen resultirt:

$$P = [(1 - \varphi \varphi_1) sin. \alpha + (\varphi + \varphi_1) cos. \alpha] N,$$

und aus den beiden letzteren:

$$Q = [(1 - \varphi \varphi_2) cos. \alpha - (\varphi + \varphi_2) sin. \alpha] N;$$

und es ergiebt sich durch Division dieser Formeln:

$$\frac{P}{Q} = \frac{(1 - \varphi \varphi_1) sin. \alpha + (\varphi + \varphi_1) cos. \alpha}{(1 - \varphi \varphi_2) cos. \alpha - (\varphi + \varphi_2) sin. \alpha}.$$

Wäre $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, so hätte man, da $\varphi = tang. \varrho$ und

$\frac{2\varphi}{1 - \varphi^2} = tang. 2\varrho$ ist,

$$\frac{P}{Q} = \frac{sin. \alpha + cos. \alpha\, tang. 2\varrho}{cos. \alpha - sin. \alpha\, tang. 2\varrho} = \frac{tang. \alpha + tang. 2\varrho}{1 - tang\, \alpha\, tang\, 2\varrho}$$
$$= tang. (\alpha + 2\varrho).$$

Sieht man von den Reibungen an den Unterstützungspunkten ab, so kann man $\varphi_1$ und $\varphi_2 =$ Null setzen, und es folgt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{sin.\,\alpha + \varphi\,cos.\,\alpha}{cos.\,\alpha - \varphi\,sin.\,\alpha} = \frac{tang.\,\alpha + \varphi}{1 - \varphi\,tang.\,\alpha} = tang.(\alpha + \varrho).$$ (Vergl. §. 176.)

Wenn die Last $Q$ rechtwinklig gegen die Keilfläche wirkt, so sind die Gleichungen (3) und (4) durch folgende zu ersetzen:

$$Q = N - \varphi_2\,S \text{ und}$$
$$S = \varphi\,N.$$

Es folgt dann $Q = (1 - \varphi\,\varphi_2)\,N$, daher umgekehrt:

$$N = \frac{Q}{1 - \varphi\,\varphi_2} \text{ und}$$
$$\frac{P}{Q} = \frac{(1 - \varphi\varphi_1)\,sin.\,\alpha + (\varphi + \varphi_1)\,cos.\,\alpha}{1 - \varphi\,\varphi_2}.$$

Wäre $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, so würde dann

$$\frac{P}{Q} = sin.\,\alpha + cos.\,\alpha\,.\,tang.\,2\,\varrho$$

ausfallen.

Die Formel $P = Q\,tang.\,(\alpha + 2\,\varrho)$ findet ihre Anwendung bei Beurtheilung der Befestigung zweier Körper $M$ und $N$ durch einen Keil $AB$, Fig. 268, I. und II. Aus der Kraft $P$ gegen den Rücken des Keiles folgt die Spannung, mit welcher die beiden Körper gegen einander gezogen werden:

Fig. 268.

$$Q = P\,cotg.(\alpha + 2\,\varrho).$$

Dagegen ist die Kraft, welche auf den Fuß $B$ des Keiles drücken muß, um den Keil zu lösen, d. i. in der Richtung $BA$ zurückzutreiben, weil hier $\alpha$ negativ ist:

$$P_1 = Q\,tang.\,(2\,\varrho - \alpha),$$

oder wenn man den letzten Werth für $Q$ einsetzt:

$$P_1 = P\,\frac{tang.\,(2\,\varrho - \alpha)}{tang.\,(2\,\varrho + \alpha)}.$$

Damit der Keil nicht von selbst zurückgehe, muß natürlich $\alpha < 2\,\varrho$ sein.

§. 181 **Zapfenreibungscoefficienten.** Bei Zapfen ist nur die Reibung der Bewegung von Wichtigkeit, weshalb auch nur über diese Beobachtungsresultate vorliegen.

## Tafel III.

### Coefficienten der Zapfenreibung, nach Morin.

| Angabe der sich reibenden Körper. | Zustand der Reibungsflächen und Gattung der Schmieren. | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Trocken oder wenig fettig. | Fettig und mit Wasser benetzt. | Geschmiert und mit Wasser benetzt. | Oel, Talg oder Schweinefett. | | Sehr weiche u. gereinigte Wagenschmiere. | Schweineschmalz mit Graphit. | Fettig. |
| | | | | Auf gewöhnliche Art. | Gut unterhalten. | | | |
| Glockengut auf Glockengut | — | — | — | 0,097 | — | — | — | — |
| Glockengut auf Gußeisen | — | — | — | — | 0,049 | — | — | — |
| Schmiedeeisen auf Glockengut | 0,251 | 0,189 | — | 0,075 | 0,054 | 0,090 | 0,111 | — |
| Schmiedeeisen auf Gußeisen | — | — | — | 0,075 | 0,054 | — | — | — |
| Gußeisen auf Gußeisen | — | 0,137 | 0,079 | 0,075 | 0,054 | — | — | 0,137 |
| Gußeisen auf Glockengut | 0,194 | 0,161 | — | 0,075 | 0,054 | 0,065 | — | 0,166 |
| Schmiedeeisen auf Guajakholz | 0,188 | — | — | 0,125 | — | — | — | — |
| Gußeisen auf Guajakholz | 0,185 | — | — | 0,100 | 0,092 | — | 0,109 | 0,140 |
| Guajak auf Gußeisen | — | — | — | 0,116 | — | — | — | 0,153 |
| Guajak auf Guajak | — | — | — | — | 0,070 | — | — | — |

Aus dieser Tabelle ist folgendes für die Praxis sehr wichtige Verhältniß zu entnehmen: bei Zapfen aus Schmiede- oder Gußeisen, laufend in Lagern aus Gußeisen oder Glockengut (Messing), geschmiert mit Oel, Talg oder Schweineschmalz, ist der Reibungscoefficient:

bei ununterbrochener guter Unterhaltung, = 0,054,

bei gewöhnlicher Abwartung, = 0,070 bis 0,080.

Die von Coulomb gefundenen Werthe weichen hiervon zum Theil ab.

Anmerkung. Durch die Versuche über die mittelbare Zapfenreibung mit Hülfe der Reibungswaage sind vom Herrn Hirn mehrere, zum Theil von dem bis dahin Bekannten abweichende Resultate erlangt worden. Der Zapfen, welchen er

hierzu anwendete, bestand in einer hohlen gußeisernen Trommel von 0,23 Meter Durchmesser und 0,22 Meter Länge, und wurde von außen durch Eintauchen in Oel geschmiert, sowie von innen mittels durchfließenden Wassers abgekühlt. Das bronzene Zapfenlager (8 Kupfer, 1 Zinn) wurde mittels eines $1^{1}/_{2}$ Meter langen Hebels von 50 Kilogramm Gewicht aufgedrückt, während der Zapfen 50 bis 100 Umdrehungen pro Minute machte. Es ist leicht zu ermessen, daß bei den mit diesem Apparate angestellten Versuchen die Flüssigkeit und Anhängen der als Schmiere dienenden Oele eine große Rolle spielen mußten, da hier nicht allein die Umfangsgeschwindigkeit, sondern auch die Reibungsfläche in Hinsicht auf den Druck eine sehr große war.

Die Umfangsgeschwindigkeit der Trommel betrug, da die letztere einen Umfang von 72 Centimeter hatte, und in der Secunde $^{5}/_{6}$ bis $^{10}/_{6}$ mal umlief, 60 bis 120 Centimeter = 23 bis 46 Zoll, während sie bei den gewöhnlichen Maschinen nur 2 bis 6 Zoll mißt. Ferner der horizontale Axenschnitt der Trommel betrug 22 . 23 = 506 Quadratcentimeter, folglich kam auf ein Quadratcentimeter dieses Schnittes nur ein Druck von $\frac{50}{506} = 0,1$ Kilogramm, d. i. auf einen Quadratzoll 6,86 . 0,214 = 1,5 Pfund, während dieser Druck bei gewöhnlichen Arbeitsmaschinen mehrere hundert Pfund beträgt. Die Verhältnisse der Versuche des Herrn Hirn waren daher zum großen Theil abweichend von den Reibungsverhältnissen, wie sie bei großen und starken Maschinen vorkommen, und wie sie auch bei anderen Versuchen, z. B. bei denen von Morin, stattfanden, und es sind folglich die sich bei denselben herausgestellten Abweichungen vollständig erklärlich. Die Hauptergebnisse der Hirn'schen Versuche bestehen ungefähr in Folgendem.

Die mittelbare Reibung hängt nicht allein von dem Drucke und der Natur und Beschaffenheit der sich reibenden Körper und des Schmiermittels, sondern auch von der Geschwindigkeit und von der Temperatur der Reibungsflächen und der Umgebung, sowie auch von der Größe dieser Flächen ab. Es ist bei constanter Temperatur die Reibung der Geschwindigkeit direct proportional, und es wächst dagegen dieselbe nur wie die Quadratwurzel aus der Geschwindigkeit, wenn die Temperaturen unbeachtet gelassen werden. Aus anderen Versuchen folgert endlich auch noch Herr Hirn, daß die mittelbare Reibung der Quadratwurzel aus der Reibungsfläche, sowie auch der Quadratwurzel aus dem Drucke proportional ist.

Was insbesondere den Einfluß der Temperatur anlangt, so ließ sich aus den angeführten Versuchen die Formel:

$$F = \frac{F_0}{1,0492^t}$$

folgern, in welcher $t$ die Temperatur der Reibungsfläche, $F_0$ die Reibung bei 0° und $F$ die bei $t$ Grad Temperatur bezeichnen.

Ein Hauptergebniß dieser Versuche ist noch die Ermittelung des Arbeitsvermögens der Wärme. Hiervon wird erst weiter unten, und zwar bei der Theorie der Wärme gehandelt.

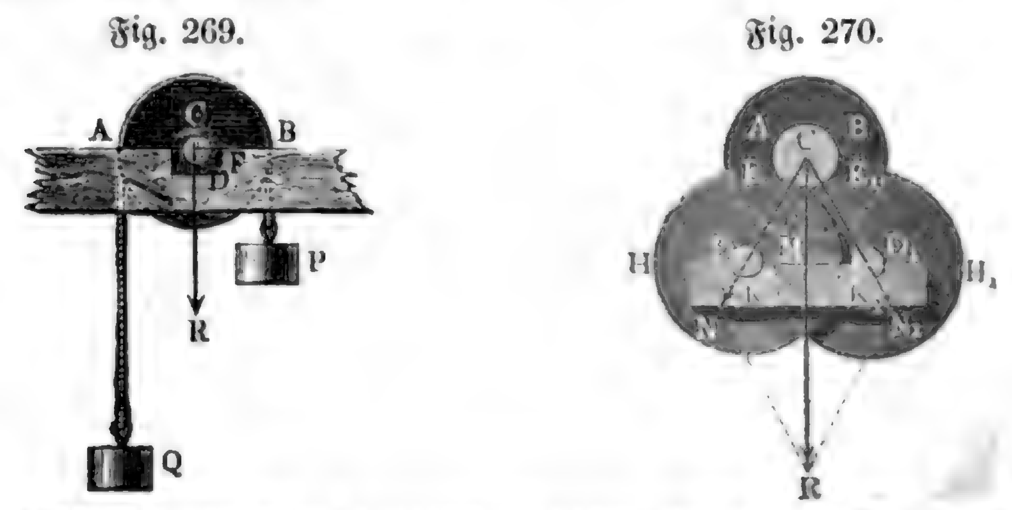
§. 182 **Arbeit der Zapfenreibung.** Kennt man den Druck $R$ zwischen einem Zapfen und seinem Lager, und ist noch der Halbmesser $r$ des Zapfens, Fig. 269, gegeben, so läßt sich die Arbeit, welche die Zapfenreibung bei jeder Umdrehung des Zapfens in Anspruch nimmt, leicht ermitteln. Die Reibung $F$ ist $= \varphi R$, und der ihr entsprechende Weg der Umfang $2 \pi r$ des

Zapfens; es folgt daher die bei einer Umdrehung durch die Reibung verloren gehende mechanische Leistung $A = \varphi R \,.\, 2\pi r = 2\pi \varphi R r$. Macht der Zapfen in einer Minute $u$ Umdrehungen, so ist die in jeder Secunde verbrauchte Arbeit

$$L = 2\pi\varphi R r \cdot \frac{u}{60} = \frac{\pi u \varphi R r}{30} = 0{,}105 \,.\, u \varphi R r.$$

Die Arbeit der Reibung wächst also mit dem Zapfendrucke, dem Zapfenhalbmesser und der Umdrehungszahl gleichmäßig. Es ist daher eine praktische Regel, bei rotirenden Maschinen den Zapfendruck nicht unnöthig durch große Gewichte zu erhöhen, die Zapfen nur so stark zu machen, als die Festigkeit auf die Dauer es verlangt, und endlich auch nicht sehr viel Umdrehungen in einer Minute zuzulassen, wenigstens dann nicht, wenn es nicht andere Verhältnisse erfordern.

Fig. 269. Fig. 270.




Durch Anwendung von Frictionsrädern, welche man statt der Zapfenlager anwendet, wird die Arbeit der Reibung vermindert. In Fig. 270 ist $AB$ eine Welle, die mit ihrem Zapfen $CEE_1$ auf den Umfängen $EH$, $E_1H_1$ dicht hinter einander liegender und um $D$ und $D_1$ drehbarer Räder (Frictionsräder) ruht. Aus dem gegebenen Drucke $R$ der Welle folgen die Pressungen.

$$N = N_1 = \frac{R}{2\cos.\frac{\alpha}{2}},$$

wofern $\alpha$ den Winkel $DCD_1$ bezeichnet, welchen die Central- oder Drucklinien $CD$ und $CD_1$ zwischen sich einschließen. Vermöge der wälzenden Reibung zwischen dem Zapfen $C$ und den Radumfängen laufen die Räder mit diesem Zapfen um, und es entstehen in den Lagern von $D$ und $D_1$ die Reibungen $\varphi N$ und $\varphi N_1$, welche zusammen

$$F = \varphi\,(N + N_1) = \frac{\varphi R}{\cos.\frac{\alpha}{2}}$$

betragen. Werden nun die Radhalbmesser $DE = D_1 E_1$ durch $a_1$ und die Zapfenhalbmesser $DK = D_1 K_1$ durch $r_1$ bezeichnet, so erhalten wir die Kraft am Umfange der Räder oder auch am Umfange des auf diesen liegenden Zapfens $C$, welche zur Ueberwindung von $F$ nöthig ist:

$$F_1 = \frac{r_1}{a_1} F = \frac{r_1}{a_1} \cdot \frac{\varphi R}{cos. \frac{\alpha}{2}},$$

während dieselbe $= \varphi R$ beträgt, wenn der Zapfen $C$ unmitttelbar in einer Pfanne ruht.

Fig. 271.




Wenn man die Gewichte der Frictionsräder unberücksichtigt läßt, so ist folglich die Arbeit der Reibung bei Anwendung von diesen Rädern,

$\psi = \frac{r_1}{a_1 \, cos. \frac{\alpha}{2}}$ mal so groß, als ohne dieselben.

Stellt man dem Zapfendruck $R$ ein einziges Frictionsrad $GH$, Fig. 271, entgegen und verhindert man die zufälligen, übrigens nicht zu beachtenden Seitenkräfte durch feste Backen $K$ und $L$, so fällt $\alpha = 0$, $cos. \frac{\alpha}{2} = 1$ und obiges Verhältniß $\psi = \frac{r_1}{a_1}$ aus.

Beispiel. Ein Kunstrad wiegt 30000 Pfund, der Halbmesser $a$ seines Umfanges ist 16 Fuß und sein Zapfenhalbmesser $r = 5$ Zoll, wie groß ist die Kraft am Umfange des Rades, um die Zapfenreibung zu überwinden, um dieses Rad also leer in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten, und wie groß ist der entsprechende Arbeitsaufwand, wenn es in einer Minute 5 Umdrehungen macht? Den Reibungscoefficienten $\varphi$ können wir hier $= 0{,}075$ annehmen, weshalb die Reibung $\varphi R = 0{,}075 \,.\, 30000 = 2250$ Pfund beträgt. Da der Radhalbmesser $\frac{16 \,.\, 12}{5}$, $= \frac{192}{5} = 38{,}4$ mal so groß ist, als der Zapfenhalbmesser oder Hebelarm der Reibung, so ist die auf den Radumfang reducirte Zapfenreibung:

$$= \frac{\varphi R}{38{,}4} = \frac{2250}{38{,}4} = 58{,}59 \text{ Pfund.}$$

Der Zapfenumfang ist $\frac{2 \,.\, 5 \,.\, \pi}{12} = 2{,}618$ Fuß; folglich der Weg der Reibung in einer Secunde:

$$= \frac{2{,}618 \,.\, 5}{60} = 0{,}2182 \text{ Fuß,}$$

und die Arbeit der Reibung während einer Secunde:

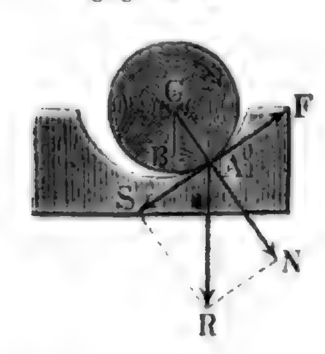
$$L = 0{,}2182 \,.\, \varphi R = 0{,}2182 \,.\, 2250 = 491 \text{ Fußpfund.}$$

Lägen die Zapfen dieses Rades auf Frictionsrädern, deren Halbmesser nur 5 mal so groß sind als die Halbmesser ihrer Zapfen, wäre also $\frac{r_1}{a_1} = 1/_5$, so würde die Kraft

am Radumfange nur $\frac{1}{5} \cdot 58{,}59 = 11{,}72$ Pfund und die von der Reibung consumirte Arbeit nur $\frac{491}{5} = 98{,}2$ Fußpfund betragen. Allerdings würde aber dann auch das Rad weit unsicherer aufliegen.

**Reibung in ausgelaufenen Zapfenlagern.** Die Reibung eines Zapfens $ACB$, Fig. 272, in einem ausgelaufenen Zapfenlager, welches nur in einem Punkte $A$ aufliegt, ist kleiner als die bei einem neuen, noch in allen Punkten des Lagers aufruhenden Zapfen. Findet keine Umdrehung statt, so drückt der Zapfen in dem Punkte $B$, wo die Richtung des Mitteldruckes $R$ hindurchgeht; tritt aber Umdrehung nach der Richtung $AB$ ein, so wird der Zapfen vermöge seiner Reibung im Zapfenlager so weit in die Höhe steigen, bis sich die Kraft $S$ zum Herabgleiten mit der Reibung $F$ ins Gleichgewicht setzt. Der Mitteldruck $R$ zerlegt sich in eine Normalkraft $N$ und in eine Tangentialkraft $S$, $N$ geht auf das Lager über und erzeugt die tangential wirkende Reibung $F = \varphi N$, $S$ aber setzt sich mit $F$ ins Gleichgewicht; es ist also auch $S = \varphi N$. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist $R^2 = N^2 + S^2$, daher hier: §. 183

Fig. 272.




$$R^2 = (1 + \varphi^2)\, N^2,$$

umgekehrt der Normaldruck:

$$N = \frac{R}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \text{ und die Reibung } F = \frac{\varphi R}{\sqrt{1 + \varphi^2}},$$

oder, wenn man den Reibungswinkel $\varrho$ einführt, also $\varphi = tang.\, \varrho$ setzt:

$$F = \frac{R\, tang.\, \varrho}{\sqrt{1 + tang.\, \varrho^2}} = R\, tang.\, \varrho\, cos.\, \varrho = R\, sin.\, \varrho.$$

Wenn der Zapfen anfängt sich zu bewegen, so rückt folglich der Druckpunkt $B$ um den Reibungswinkel $A\,C\,B = \varrho$ im Lager nach der entgegengesetzten Richtung fort.

Uebrigens ist natürlich das Moment $F . \overline{CA} = Fr$ der Zapfenreibung gleich dem Momente $R\, r\, sin.\, \varrho$ des Zapfendruckes $R$, beide auf die Drehungsaxe $C$ bezogen. Fände das Fortrücken nicht statt, so wäre

$$F = \varphi R = R\, tang.\, \varrho = \frac{R\, sin.\, \varrho}{cos.\, \varrho};$$

es ist folglich die Reibung nach dem Fortrücken $cos.\, \varrho$ mal so groß, als die vor dem Fortrücken. In der Regel ist $\varphi = tang.\, \varrho$ noch nicht $\frac{1}{10}$ und $cos.\, \varrho > 0{,}995$, also die Differenz noch nicht $\frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$; man hat daher in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung auf den Einfluß dieses Fortrückens nicht Rücksicht zu nehmen.

Läuft das Rad $AB$ mit einer Nabe oder einem Auge, Fig. 273, um eine feste Axe $AC$, so ist die Reibung dieselbe, als wenn sich die Axen in Pfannen bewegen, nur ist bei einem ausgelaufenen Auge der Hebelarm der Reibung nicht der Halbmesser des festen Zapfens, sondern der des Auges.

Fig. 273.

§. 184 **Reibung in einem dreiseitigen Lager.** Legt man den Zapfen in prismatische Lager, so erhält man größere Drücke und deshalb auch mehr Reibung als bei einem runden Lager. Ist das Lager $ADB$, Fig. 274, dreiseitig, so liegt der Zapfen in zwei Punkten $A$ und $B$ auf, und es ist an jedem derselben Reibung zu überwinden. Der Mitteldruck $R$ zerlegt sich in zwei Seitenkräfte $Q$ und $Q_1$, und jede dieser giebt einen Normaldruck $N$ und $N_1$ und eine der Reibung $F = \varphi N$ und $F_1 = \varphi N_1$ gleiche Tangentialkraft. Dem vorigen Paragraphen zufolge lassen sich aber diese Reibungen auch $= Q\, sin.\, \varrho$ und $Q_1\, sin.\, \varrho$ setzen; man hat daher für die Gesammtreibung:

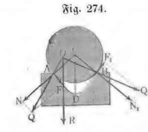


Fig. 274.

$$F + F_1 = (Q + Q_1)\, sin.\, \varrho.$$

Die Kräfte $Q$ und $Q_1$ ergeben sich durch Auflösung eines aus $Q$ und $Q_1$ gebildeten Kräfteparallelogrammes mit Hülfe des Mitteldruckes $R$, des Reibungswinkels $\varrho$ und des Winkels $ACB = 2\alpha$, welcher dem im Lager liegenden Bogen $AB$ entspricht. Es ist:

$$QOR = ACD - CAO = \alpha - \varrho \text{ und}$$
$$Q_1OR = BCD + CBO = \alpha + \varrho\text{; folglich:}$$
$$QOQ_1 = \alpha - \varrho + \alpha + \varrho = 2\alpha.$$

Die Anwendung der Formeln in §. 78 giebt nun:

$$Q_1 = \frac{sin.\,(\alpha - \varrho)}{sin.\, 2\alpha} \cdot R \text{ und } Q = \frac{sin.\,(\alpha + \varrho)}{sin.\, 2\alpha} \cdot R;$$

daher folgt die gesuchte Reibung:

$$F + F_1 = (Q + Q_1)\, sin.\, \varrho = (sin.\,[\alpha - \varrho] + sin.\,[\alpha + \varrho]) \frac{R\, sin.\, \varrho}{sin.\, 2\alpha}.$$

Aber $sin.\,(\alpha - \varrho) + sin.\,(\alpha + \varrho)$ ist, der analytischen Trigonometrie zufolge, $= 2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \varrho$ und $sin.\, 2\alpha = 2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha$, es ergiebt sich daher:

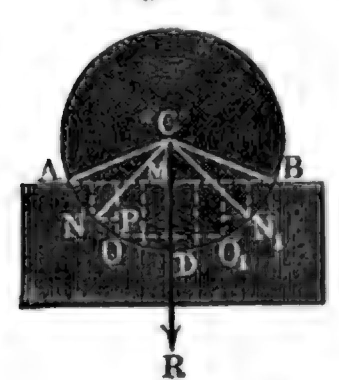
$$F + F_1 = \frac{2\, sin.\, \alpha\, R\, sin.\, \varrho\, cos.\, \varrho}{2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha} = \frac{R\, sin.\, 2\varrho}{2\, cos.\, \alpha},$$

wofür sich wegen der Kleinheit von $\varrho$ auch $= \frac{R\, sin.\, \varrho}{cos.\, \alpha}$ setzen läßt. Die Rei-

bung bei Anwendung des dreiseitigen Zapfenlagers ist hiernach $\frac{1}{cos. \alpha}$ mal so groß, als die beim cylindrischen Lager. Ist z. B. $A D B = 60^0$, also $A C B = 180^0 - 60^0 = 120^0$ und $A C D = \alpha = 60^0$, so hat man $\frac{1}{cos. 60^0}$ mal $= 2$ mal so viel Reibung, als bei einem runden Lager.

**Reibung in einem neuen Lager.** Mit Hülfe der letzten Formel §. 185 läßt sich nun auch die Reibung in einem neuen runden Zapfenlager finden, worin der Zapfen an allen Stellen noch aufliegt. Es sei $ADB$ in Fig. 275 ein solches Lager. Theilen wir den Bogen $ADB$, in welchem sich Zapfen und Lager berühren, in viele Theile, wie $A N$, $N O$ u. s. w., welche gleichen Projectionen in der Sehne $A B$ entsprechen, und nehmen wir an, daß jeder dieser Theile gleich viel vom ganzen Drucke $R$, nämlich $= \frac{R}{n}$, wobei $n$ die Anzahl der Theile bezeichnet, vom Zapfen auf das Lager übertrage. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Reibung für zwei gegenüberliegende Theile $NO$ und $N_1 O_1$:

Fig. 275.




$$= \frac{2R}{n} \cdot \frac{sin. 2\varrho}{2 cos. NCD}.$$

Aber $cos. N C D$ ist auch $= cos. O N P = \frac{NP}{NO}$, wofern $NP$ die Projection des Theiles $N O$ auf $AB$ repräsentirt, und

$$NP = \frac{\text{Sehne } A B}{n};$$

es folgt daher jene den Theilen $N O$ und $N_1 O_1$ entsprechende Reibung:

$$= \frac{R sin. 2 \varrho}{n} \cdot \frac{n . \overline{NO}}{\text{Sehne}} = \frac{R sin. 2 \varrho}{\text{Sehne}} \cdot \overline{NO}.$$

Um nun die Reibung für den ganzen Bogen $A D B$ zu finden, hat man statt $N O$ den Bogen $A D = \frac{1}{2} A D B$ einzuführen, weil die Summe aller Reibungen gleich ist $\frac{R sin. 2 \varrho}{\text{Sehne}}$ mal Summe aller Bogentheile; es folgt also die Reibung in einem neuen Zapfenlager:

$$F = R sin. 2 \varrho \cdot \frac{\text{Bogen } A D}{\text{Sehne } A B},$$

oder, wenn wir den Centriwinkel $A C B$, welcher dem im Lager liegenden Bogen entspricht, $= 2 \alpha^0$, also Sehne $A B = 2 A C . sin. \alpha$ setzen:

$$F = \frac{R \sin. 2\varrho}{2} \cdot \frac{\alpha}{\sin. \alpha}, \text{ oder } \sin. 2\varrho = 2 \sin. \varrho$$

angenommen, annähernd:

$$F = R \sin. \varrho \cdot \frac{\alpha}{\sin. \alpha}.$$

Hiernach ist die anfängliche Reibung um so größer, je tiefer der Zapfen in seinem Lager liegt. Umfaßt z. B. das Zapfenlager den halben Zapfenumfang, ist also $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ und sonach $\sin. \alpha = 1$, so hat man $F = \frac{\pi}{2} \cdot R \sin. \varrho$, also $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ mal so groß, als beim ausgelaufenen Zapfenlager. Bei einem Zapfen, welcher nicht tief im Lager ruht, ist $\alpha$ klein, daher $\sin. \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$ zu setzen, weshalb folgt $F = \left(1 + \frac{\alpha^2}{6}\right) R \sin. \varrho$, oder $= R \sin. \varrho$, wenn $\alpha$ sehr klein ist.

(§. 186) **Poncelet's Theorem.** Der Zapfendruck $R$ ergiebt sich in der Regel als Mittelkraft von zwei rechtwinkelig gegen einander gerichteten Kräften $P$ und $Q$, ist also $= \sqrt{P^2 + Q^2}$. Insofern man ihn nur zur Bestimmung der Reibung

$$F = \varphi R = \varphi \sqrt{P^2 + Q^2}$$

bedarf, kann man sich mit einem Näherungswerth desselben begnügen, theils weil schon der Coefficient $\varphi$ niemals so sicher bestimmt werden kann und von so sehr vielen Zufälligkeiten mit abhängt, theils auch, weil das ganze Product oder die Reibung $\varphi R$ meist nur ein kleiner Theil ist von den übrigen Kräften an der in Zapfenlagern ruhenden Maschine, wie Hebel, Rolle, Radwelle u. s. w. Der Lehrsatz, welcher einen Näherungsausdruck von $\sqrt{P^2 + Q^2}$ zu finden lehrt, ist unter dem Namen „das Poncelet'sche Theorem“ bekannt, und läßt sich auf folgende Weise entwickeln:

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = P \sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2} = P \sqrt{1 + x^2},$$

wobei $x = \frac{Q}{P}$, und vorausgesetzt wird, daß $Q$ die kleinere Kraft, also $x$ ein ächter Bruch ist. Setzen wir nun:

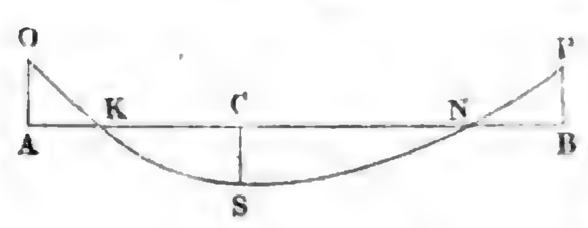
$$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x,$$

und bestimmen wir die Coefficienten $\mu$ und $\nu$ gewissen Forderungen entsprechend. Der relative Fehler ist:

$$y = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \mu - \nu x}{\sqrt{1 + x^2}} = 1 - \frac{\mu + \nu x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Curve $OSP$, Fig. 276, welche für die Abscisse $x = 0$, die Ordinate $AO = y = 1 - \mu$, und für die Abscisse $AB = 1$, die Ordinate $BP = y = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$ hat, welche ferner in zwei Punkten $K$ und $N$ durch die Abscissenaxe geht, und bei $S$ ihren größten Abstand $CS$ von dieser Axe erreicht. Setzen wir $y = 0$, also:

Fig. 276.




$$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x,$$

und lösen wir diese Gleichung in Beziehung auf $x$ auf, so erhalten wir in

$$x = \frac{\mu \nu \mp \sqrt{\mu^2 + \nu^2 - 1}}{1 - \nu^2}$$

die Abscissen $AK$ und $AN$ der Durchschnittspunkte $K$ und $N$, und also auch diejenigen Werthe, bei welchen der Fehler Null ausfällt.

Um aber die Abscisse $AC$ des größten negativen Fehlers $CS$ zu finden, setzen wir das Differenzialverhältniß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\mu + \nu x)(1 + x^2)^{-1/2} x - \nu (1 + x^2)^{1/2}}{1 + x^2} = \text{Null}$$

(s. Art. 13 der analytischen Hülfslehren).

Dieser Forderung wird entsprochen, indem man

$$(\mu + \nu x)(1 + x^2)^{-1/2} x = \nu (1 + x^2)^{1/2}, \text{ oder}$$

$$(\mu + \nu x) x = \nu (1 + x^2), \text{ d. i. } x = \frac{\nu}{\mu} \text{ setzt.}$$

Hiernach giebt also die Abscisse $AC = \frac{\nu}{\mu}$ die größte negative Ordinate:

$$CS = 1 - \frac{\mu + \nu \cdot \frac{\nu}{\mu}}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\mu^2}}} = -\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} - 1\right) = -(\sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1).$$

Um nun weder einen großen positiven noch einen großen negativen Fehler zu begehen, setzen wir die drei Ordinaten $AO = 1 - \mu$, $BP = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$ und $CS = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1$ einander gleich, und bestimmen hiernach die Coefficienten $\mu$ und $\nu$. Es ist:

$$\mu = \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}, \text{ d. i. } \nu = (\sqrt{2} - 1)\,\mu = 0{,}414\,\mu \text{ und}$$

$$2 - \mu = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \text{ d. i. } 2 = \mu\,(1 + \sqrt{1 + 0{,}414^2}), \text{ folglich}$$

$$\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{1,1714}} = 0,96 \text{ und } \nu = 0,414 \,.\, 0,96 = 0,40.$$

Wir können also annähernd $\sqrt{1 + x^2} = 0,96 + 0,40 \,.\, x$, und ebenso die Mittelkraft

$$R = 0,96\ P + 0,40\ Q$$

setzen, und wissen, daß wir hierbei höchstens den Fehler

$\pm\, y = 1 - \mu = 1 - 0,96 = 0,04 =$ vier Procent des wahren Werthes begehen.

Diese Bestimmung setzt voraus, daß wir wissen, welche von den Kräften die größere ist; ist uns dies nicht bekannt, so können wir

$$\sqrt{1 + x^2} = \mu\,(1 + x)$$

annehmen und bekommen so

$$y = 1 - \frac{\mu\,(1 + x)}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Hier giebt nicht nur die Grenze $x = 0$ den Fehler $= 1 - \mu$, sondern auch die Grenze $x = \infty$ denselben $= 1 - \frac{\mu x}{x} = 1 - \mu$; setzen wir aber $x = \frac{\nu}{\mu} = 1$, so bekommen wir den größten negativen Fehler:

$$= -\left(\frac{2\,\mu}{\sqrt{2}} - 1\right) = -\,(\mu\,\sqrt{2} - 1),$$

und es ergiebt sich durch Gleichsetzen dieser Fehler:

$1 - \mu = \mu\sqrt{2} - 1$, also $\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2}{2,414} = \frac{1}{1,212} = 0,825$,

wofür 0,83 gesetzt wird. In dem Falle also, wo man nicht weiß, welche von den Kräften die größere ist, läßt sich setzen:

$$R = 0,83\ (P + Q),$$

und man erhält dabei den größten Fehler:

$\pm\, y = 1 - 0,83 = 0,17$ Procent $= {}^1\!/_6$ des wahren Werthes.

Weiß man endlich, daß $x$ nicht über 0,2 ist, so läßt man richtiger $x$ ganz außer Acht, und schreibt $\sqrt{P^2 + Q^2} = P$, ist aber $x$ über 0,2, so ist ebenfalls richtiger

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = 0,888\ P + 0,490\ .\ Q;$$

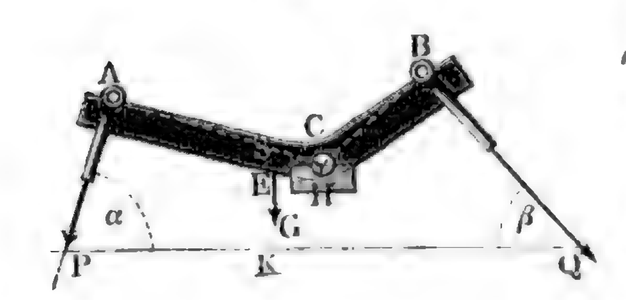
in beiden Fällen ist nämlich der größte Fehler ungefähr zwei Procent *).

§. 187 **Der Hebel.** Die im Obigen entwickelte Theorie der Reibung findet beim materiellen Hebel, bei der Radwelle und anderen Maschinen ihre Anwen-

*) Polytechnische Mittheilungen, Band I.

dung. Handeln wir zunächst vom Hebel, und nehmen wir im Winkelhebel $ACB$, Fig 277, gleich den allgemeinsten Fall vor. Bezeichnen wir wie früher (§. 136) den Hebelarm $CA$ der Kraft $P$ durch $a$, den Hebelarm $CB$ der Last $Q$ durch $b$, und den Zapfenhalbmesser $CH$ durch $r$, setzen wir das Gewicht des Hebels $= G$, den Hebelarm $CE$ desselben $= s$ und die Winkel $APK$ und $BQK$, um welche die Kraftrichtungen vom Horizonte abweichen, $= \alpha$ und $\beta$. Die Kraft $P$ giebt den Verticaldruck $P \sin. \alpha$, und die Last $Q$ denselben $= Q \sin. \beta$; es ist daher der gesammte Verticaldruck: $V = G + P \sin. \alpha + Q \sin. \beta$.

Fig 277.




Die Kraft $P$ giebt auch noch den Horizontaldruck $P \cos. \alpha$ und die Last einen Gegendruck $Q \cos. \beta$; es bleibt daher als Horizontaldruck $H = P \cos. \alpha - Q \cos. \beta$ übrig, und es läßt sich nun der Totaldruck im Zapfen:

$$R = \mu V + \nu H = \mu (G + P \sin. \alpha + Q \sin. \beta) + \nu (P \cos. \alpha - Q \cos. \beta)$$

setzen, wobei aber der zweite Theil $\nu (P \cos. \alpha - Q \cos. \beta)$ nie negativ zu nehmen, und deshalb in dem Falle, wenn $Q \cos. \beta > P \cos. \alpha$ ist, das Zeichen zu ändern oder vielmehr $P \cos. \alpha$ von $Q \cos. \beta$ zu subtrahiren ist. Um nun denjenigen Werth der Kraft zu finden, welcher dem labilen Gleichgewichte entspricht, so daß beim kleinsten Zusatz Bewegung eintritt, setzen wir statisches Kraftmoment gleich statisches Lastmoment, plus oder minus Moment des Gewichtes der Maschine (§. 136), sowie plus Moment der Reibung, also:

$$Pa = Qb \pm Gs + \varphi R r$$
$$= Qb \pm Gs + \varphi (\mu V + \nu H) r, \text{ woraus folgt}$$
$$P = \frac{Qb \pm Gs + \varphi [\mu (G + Q \sin. \beta) \mp \nu Q \cos. \beta] r}{a - \mu \varphi r \sin. \alpha \mp \nu \varphi r \cos. \alpha}.$$

Wirken $P$ und $Q$ vertical, so ist einfach $R = P + Q + G$, daher $Pa = Qb \pm Gs + \varphi (P + Q + G) r$. Ist der Hebel einarmig, so wirken $P$ und $Q$ einander entgegen, dann ist also $R = P - Q + G$ und deshalb auch die Reibung kleiner. Uebrigens muß $R$ stets positiv in Rechnung kommen, weil die Reibung $\varphi R$ nur Bewegung verhindert, aber nicht erzeugt. Man sieht auch hiernach, daß ein einarmiger Hebel mechanisch vollkommener ist, als ein doppelarmiger Hebel.

Beispiel. Sind die Hebelarme bei dem in Fig. 277 abgebildeten Winkelhebel: $a = 6$ Fuß, $b = 4$ Fuß, $s = \frac{1}{2}$ Fuß und $r = 1\frac{1}{2}$ Zoll, die Neigungswinkel $\alpha = 70^0$, $\beta = 50^0$, ist ferner die Last $Q = 5600$ Pfund und das Gewicht $G$ des Hebels, $= 900$ Pfund, so bestimmt sich die Kraft zur Herstellung des labilen

Gleichgewichts wie folgt. Ohne Rücksicht auf Reibung ist $Pa + Gs = Qb$, daher:

$$P = \frac{Qb - Gs}{a} = \frac{5600 \cdot 4 - 900 \cdot \frac{1}{2}}{6} = 3658 \text{ Pfund.}$$

Setzen wir $\mu = 0{,}96$ und $\nu = 0{,}40$, so bekommen wir:

$\mu\,(G + Q\,sin.\,\beta) = 0{,}96\,(900 + 5600\,sin.\,50^0) = 4982$ Pfund,

$\nu\,Q\,cos.\,\beta = 0{,}40\;.\;5600\,cos.\,50^0 = 1440$ Pfund;

$\mu\,sin.\,\alpha = 0{,}96\;.\;sin.\,70^0 = 0{,}902,$

$\nu\,cos.\,\alpha = 0{,}40\;.\;cos.\,70^0 = 0{,}137.$

Es ist leicht einzusehen, daß hier $P\,cos.\,\alpha$ kleiner als $Q\,cos.\,\beta$ ist, denn da annähernd $P = 3658$ ausfällt, so hat man $P\,cos.\,\alpha = 1251$ Pfund, wogegen $Q\,cos.\,\beta = 3600$ Pfund beträgt; deshalb nehmen wir hier für $\nu\,Q\,cos.\,\beta$ und $\nu\,\varphi\,r\,cos.\,\alpha$ das untere Zeichen und setzen:

$$P = \frac{5600\;.\;4 - 900\;.\;\frac{1}{2} + \varphi\,r\,(4982 + 1440)}{6 - \varphi\,r\,(0{,}902 - 0{,}173)}.$$

Nehmen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$ an, so erhalten wir:

$\varphi\,r = 0{,}075\;.\;\frac{3}{24} = 0{,}009375$ sowie $6422\,\varphi\,r = 60,$

und die gesuchte Kraft:

$$P = \frac{22400 - 450 + 60}{6 - 0{,}00683} = \frac{22010}{5{,}9932} = 3673 \text{ Pfund.}$$

Uebrigens ist hier der Verticaldruck, wenn man die ohne Rücksicht auf Reibung bestimmte Kraft $P = 3658$ Pfund einführt:

$V = 3658\,sin.\,70^0 + 5600\,sin.\,50^0 + 900 = 3437 + 4290 + 900$
$= 8627$ Pfund,

dagegen der Horizontaldruck:

$H = 5600\,cos.\,50 - 3658\,cos.\,70 = 3600 - 1251 = 2349$ Pfund.

Hier ist $H > 0{,}2\;V$, daher ist richtiger:

$R = 0{,}888\,.\,H + 0{,}490\;V = 0{,}888\,.\,8627 + 0{,}490\,.\,2349 = 8811$

zu setzen, und es folgt so das Moment der Reibung:

$= \varphi\,r\,R = 0{,}009375\;.\;8811 = 82{,}6$ Fußpfund,

und endlich die Kraft:

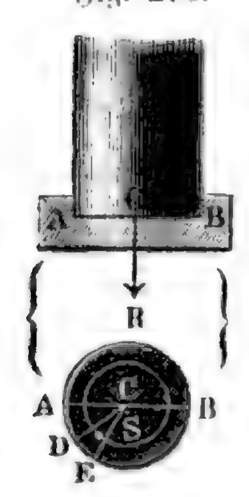
$$P = \frac{22400 - 450 + 82{,}6}{6} = 3672 \text{ Pfund,}$$

welcher Werth vom obigen allerdings nur wenig abweicht.

§. 188 **Reibung an stehenden Zapfen.** Findet bei einer Radwelle ein Druck in der Richtung der Axe statt, wie es z. B. bei stehenden Wellen in Folge des Gewichtes derselben jedesmal der Fall ist, so giebt es noch eine Reibung auf der Basis des einen Zapfens. Weil hier in allen Punkten Druck zwischen dem Zapfen und der Pfanne vorhanden ist, so steht diese Reibung der einfachen gleitenden näher, als der seither betrachteten Zapfenreibung und man hat deshalb für diese die in Tab. II. (S. 287) aufgeführten Reibungscoefficienten einzuführen. Um die Arbeit dieser Reibung zu finden, muß man den mittleren Weg kennen, den die Basis $AB$, Fig. 278, eines solchen stehenden Zapfens bei einer Umdrehung zurücklegt. Nehmen wir an, daß der Druck $R$ auf der ganzen Fläche gleichförmig vertheilt sei,

setzen wir also voraus, daß gleich großen Theilen der Basis gleiche Reibungen zukommen. Theilen wir nun die Basis durch Halbmesser $CD$, $CE$ u. s. w. in lauter gleiche Sectoren oder Dreiecke, wie $DCE$, so entsprechen diesen nicht nur gleiche Reibungen, sondern auch gleiche Momente, es ist daher nur das Reibungsmoment von einem dieser Dreiecke zu finden. Die Reibungen eines solchen Dreiecks lassen sich aber als Parallelkräfte ansehen, da sie alle tangential, d. i. winkelrecht zum Radius $CD$ wirken; und da nun der Schwerpunkt eines Körpers oder einer Fläche nichts weiter als der Angriffspunkt der Mittelkraft von in diesem Körper oder in dieser Fläche gleichmäßig vertheilten Parallelkräften ist, so läßt sich demnach auch hier der Schwerpunkt $S$ des Sectors oder Dreiecks $DCE$ als Angriffspunkt von der aus sämmtlichen Reibungen desselben entspringenden Mittelkraft ansehen. Ist nun der

Fig. 278.




Druck auf diesen Sector, $= \frac{R}{n}$ und der Halbmesser $CD = CE$ der Basis $= r$, so folgt (nach §. 113) das statische Moment der Reibung dieses Sectors:

$$= \overline{CS} \cdot \frac{\varphi R}{n} = {}^2/_3\, r \cdot \frac{\varphi R}{n},$$

und endlich das statische Moment der vollständigen Zapfenreibung:

$$M = n \,.\, {}^2/_3\, r \,\frac{\varphi R}{n} = {}^2/_3\, \varphi R r.$$

Zuweilen ist die sich reibende Fläche ein **Ring** $ABED$, Fig. 279. Sind die Halbmesser desselben $CA = r_1$ und $CD = r_2$, so hat man es mit der Bestimmung des Schwerpunktes $S$ von einem Ringstücke zu thun, und erhält



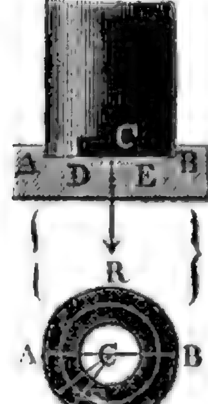
deshalb nach §. 114 den Hebelarm:

$$CS = {}^2/_3\, \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2},$$

daher das Moment der Reibung:

$$M = {}^2/_3\, \varphi R \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right).$$

Fig. 279.




Führt man den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2} = r$ und die Breite des Ringes $r_1 - r_2 = b$ ein, so erhält man dieses Moment der Reibung auch

$$M = \varphi R \left(r + \frac{b^2}{12\, r}\right).$$

Die Arbeit der Reibung für eine Umdrehung des Zapfens ist im ersten Falle
$A = 2\pi \, . \, ^2/_3 \, \varphi R r = ^4/_3 \pi \varphi R r$, und im zweiten:

$$A = ^4/_3 \pi \varphi R \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right) = 2 \pi \varphi R \left(r + \frac{b^2}{12 r}\right).$$

Hiernach ist auch die Reibung an den aus einem oder mehreren Ringen bestehenden Hals- oder Kammzapfen zu berechnen, wenn die stehende Welle an demselben aufgehangen ist.

Man sieht auch hier leicht ein, daß wegen Verminderung dieses Arbeitsverlustes die stehenden Zapfen oder Stifte möglichst schwach zu machen sind, und daß mehr Arbeitsverlust entsteht, wenn unter übrigens gleichen Verhältnissen, die Reibung in einem Ringe als in einem vollen Kreise statt hat.

Beispiel. Bei einer 1800 Pfund schweren Turbine, welche in der Minute 100 Umdrehungen macht, ist die Stärke des Stiftes an der Basis 1 Zoll, wie viel Arbeit consumirt die Reibung dieses Stiftes in einer Secunde? Den Reibungscoefficienten = 0,100 angenommen, erhält man die Reibung:

$$\varphi R = 0,100 \, . \, 1800 = 180 \text{ Pfund};$$

der Weg pro Umdrehung ist:

$$= ^4/_3 \pi r = ^4/_3 \, . \, 3,14 \, . \, ^1/_{24} = 0,1745 \text{ Fuß},$$

daher die Arbeit pro Umdrehung:

$$= 180 \, . \, 0,1745 = 31,41 \text{ Fußpfund}.$$

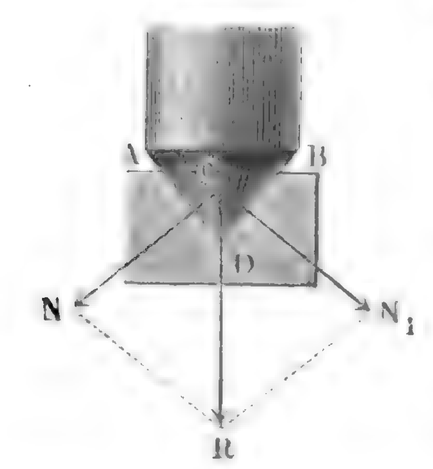
Nun macht aber diese Maschine in der Secunde $^{100}/_{60} = ^5/_3$ Umdrehungen; es folgt daher der gesuchte Arbeitsverlust:

$$= \frac{314,1}{6} = 52,3 \text{ Fußpfund}.$$

## §. 189 Reibung an Spitzzapfen.

Ist der Zapfen $ABD$, Fig. 280, conisch zugespitzt, so fällt die Reibung größer aus als bei einem unten ebenen Zapfen; weil sich der Axendruck $R$ in die die Reibung erzeugenden Normalkräfte, wie $N$, $N_1$ u. s. w. zerlegt, die zusammen größer als $R$ allein sind. Ist der halbe Convergenzwinkel $ADC = BDC = \alpha$, so hat man:

Fig. 280.




$$2N = \frac{R}{sin. \alpha},$$

und deshalb die Reibung dieses Spitzzapfens:

$$F = \varphi \frac{R}{sin. \alpha}.$$

Bezeichnet man nun den Halbmesser $CA = CB$ des Zapfens an der Stelle des Eintritts in die Pfanne durch $r_1$, so hat man nach dem Obigen, das statische Reibungsmoment:

$$M = \frac{\varphi R}{sin. \alpha} \cdot ^2/_3 r_1 = ^2/_3 \varphi \frac{R r_1}{sin. \alpha};$$

oder, da $\frac{r_1}{sin.\,\alpha} = \frac{CA}{sin.\,\alpha} =$ der Kegelseite $DA = a$ ist, dasselbe auch:

$$M = {}^2/_3\, \varphi\, R\, a.$$

Läßt man diesen Zapfen nur wenig in die Pfanne eintauchen, so wird die Arbeit seiner Reibung kleiner als bei einem Zapfen mit ebener Basis und deshalb die Anwendung des Spitzzapfens dennoch von Nutzen sein. Ist z. B.:

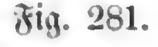
$$a = \frac{r_1}{sin.\,\alpha} = \frac{r}{2}, \text{ also } r_1 = {}^1/_2\, r\, sin.\,\alpha,$$

so giebt der Spitzzapfen mit dem Halbmesser $r_1$ nur halb so viel Arbeitsverlust durch die Reibung als der eben abgestumpfte Zapfen mit dem Halbmesser $r$.

Bildet der Stift einen **abgekürzten Kegel**, Fig. 281, so findet Reibung an dem Mantel und an der Abstumpfungsfläche statt und es stellt sich das statische Reibungsmoment

$$M = \left(r_1^3 + \frac{r^3 - r_1^3}{sin.\,\alpha}\right) \cdot {}^2/_3\, \frac{\varphi\, R}{r^2}$$

heraus, wenn $r$ den Halbmesser $CA$ an der Stelle des Eintrittes in die Pfanne, $r_1$ den Halbmesser $DE$ an der Basis und $\alpha^0$ den halben Convergenzwinkel bezeichnet. In Folge des großen Seitendruckes $N$ wird die Pfanne bald so stark abgerieben, daß endlich nur Druck auf der Basis $EF$ übrig bleibt und das Moment der Reibung $M = {}^2/_3\, \varphi\, R\, r_1$ ausfällt.


Fig. 281.

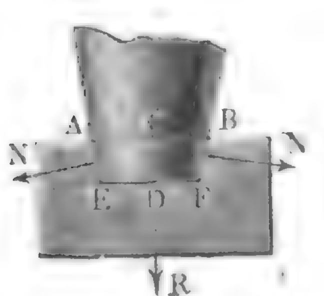



Fig. 282.

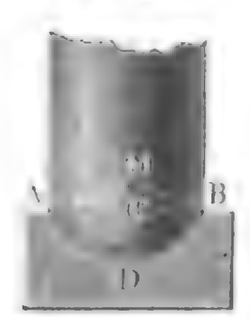
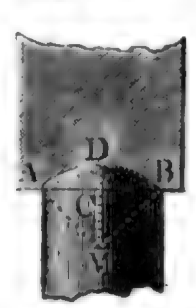



Fig. 283.




Sehr oft sind endlich noch die stehenden Zapfen oder Stifte, Fig. 282 und Fig. 283, **abgerundet**. Wenn auch durch diese Abrundung die Reibung selbst keineswegs vermindert wird, so läßt sich doch dadurch eine Verminderung des Reibungsmomentes erzielen, daß man die Tiefe des Eintauchens in die Pfanne herabzieht. Setzt man eine kugelförmige Abrundung voraus, so erhält man mit Hülfe des höheren Calcüls für eine **halbkugelförmige** Pfanne das Moment der Reibung:

$$M = \frac{\varphi\, \pi}{2} \cdot R\, r;$$

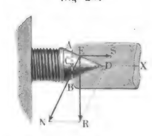
sowie für die ein **niedriges Segment** bildende Pfanne annähernd:

$$M = {}^2/_3 \left[1 + 0{,}3 \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right] \varphi\, R\, r_1,$$

wenn $r$ den Kugelhalbmesser $MA = MB$, und $r_1$ den Pfannenhalbmesser $CA = CB$ bezeichnet.

Anmerkung. Bei den Körnerspitzen $ADB$, Fig. 284, an den Drehbankspindeln zerlegt sich der Druck $R$ rechtwinkelig gegen die Axenrichtung $DX$ in einen Normaldruck $N$ und einen Seitendruck $S$ parallel zur Axe. Gelten dieselben Bezeichnungen wie oben bei dem Spitzzapfen stehender Wellen, so hat man:

Fig. 284




$$N = \frac{R}{cos.\ \alpha} \text{ und } S = R\ tang.\ \alpha.$$

Das Moment der Reibung, welche aus $N$ entspringt, ist:

$$M = \varphi N \cdot {}^2/_3 r_1 = {}^2/_3 \varphi \frac{R r_1}{cos.\ \alpha},$$

oder da $r_1 = CA = DA\ sin.\ ADC = a\ sin.\ \alpha$ ist, wenn $a$ die Länge $CD$ des eingelegten Zapfenstückes bezeichnet, $M = {}^2/_3 \varphi R a\ tang.\ \alpha$.

Die Seitenkraft $S$ wird ganz oder zum Theil durch eine Gegenkraft $S_1$ an der anderen Spitze aufgehoben.

Beispiel. Wenn das Gewicht der armirten Welle eines Pferdegöpels, $R = 6000$ Pfd., der Halbmesser seines conisch gespitzten Stiftes, $= r = 1$ Zoll und der Convergenzwinkel $2\alpha$ des letzteren, $= 90^0$ ist, so beträgt das statische Moment der Reibung an diesem Stifte:

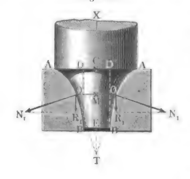
$$M = {}^2/_3 \cdot \varphi \cdot \frac{R r}{sin.\ \alpha} = {}^2/_3 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{6000}{sin. 45^0} \cdot \frac{1}{12} = \frac{100}{3\sqrt{{}^1/_2}} = 47{,}1 \text{ Fußpfund.}$$

Macht diese Welle während des Ausförderns einer Tonne aus der Grube $= u = 24$ Umdrehungen, so ist die Arbeit, welche die Reibung am Stifte in dieser Zeit aufzehrt:

$$A = 2\pi u \cdot {}^2/_3 \varphi \frac{R r}{sin.\ \alpha} = 2\pi \cdot 24 \cdot 47{,}1 = 7103 \text{ Fußpfund.}$$

§. 190 **Der sogenannte Antifrictionszapfen.** Unter der Voraussetzung, daß der axiale Druck eines stehenden Zapfens $ABBA$, Fig. 285, der Querschnittsfläche proportional ist, können wir den Verticaldruck pro Quadratzoll Querschnitt, $R_1 = \frac{R}{G}$ setzen, wofern $R$ den ganzen Vertical- oder Axendruck, und $G$ den Inhalt der verticalen Projection $ADDA$ der ganzen Reibungsfläche $ABBA$ bezeichnet. Ist nun $\alpha$ der Neigungswinkel $CTO$ des Flächenelementes $O$ gegen die Axe $CT$ des Zapfens, so folgt der Normaldruck, welchen der Zapfen pro Quadratzoll Querschnitt

Fig. 285.



gegen das Lager ausübt, $N_1 = \frac{R_1}{sin.\, \alpha}$, daher die entsprechende Reibung

$$F_1 = \varphi N_1 = \varphi \frac{R_1}{sin.\, \alpha} = \frac{\varphi R}{G\, sin.\, \alpha},$$

und wenn noch $y$ den Abstand oder Reibungshalbmesser $MO$ bezeichnet, das Moment dieser Reibung:

$$F_1 y = \varphi \frac{R}{G} \cdot \frac{y}{sin.\, \alpha},$$

oder, da $\frac{y}{sin.\, \alpha}$ = der Tangente $OT$ ist, auch

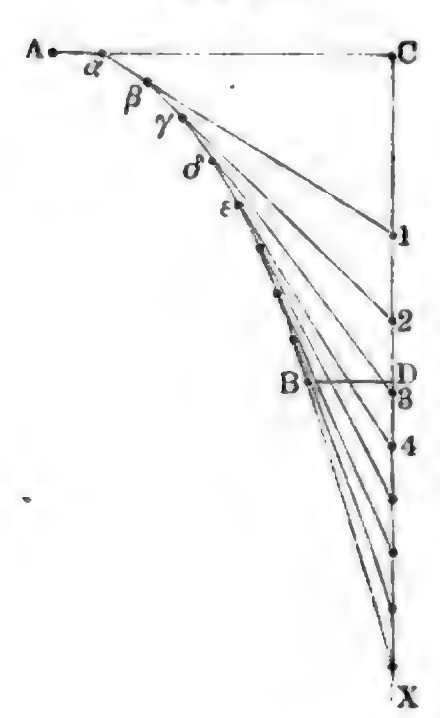
$$F_1 y = \varphi \frac{R}{G} \cdot \overline{OT}.$$

Soll, um ein gleichmäßiges Abführen des Zapfens und seiner Pfanne zu erlangen, das Moment $F_1 y$ an allen Stellen des Zapfens dasselbe sein, so muß folglich die Tangente $OT$ längs der ganzen Erzeugungscurve $AOB$ des Zapfens eine und dieselbe Größe $a$ haben, und es ist daher dann das Moment der Reibung des ganzen Zapfens:

$$M = F_1 y \,.\, G' = \varphi R a.$$

Die Curve $AOB$ mit constanter Tangente $OT$, vom Berührungspunkte $O$ bis zur Axe $CX$ gemessen, ist eine Tractorie oder Zuglinie, und entsteht, wenn ein auf einer horizontalen Ebene liegender schwerer Punkt $A$, Fig. 286,

Fig. 286.




durch einen Faden $AC$ in Bewegung gesetzt wird, dessen Ende $C$ auf einer geraden Linie $CX$ fortrückt. Dieser Faden bildet hier die constante Tangentenlinie $AC = \alpha 1 = \beta 2 = \gamma 3$ u. s. w. $= a$. Um diese Curve zu construiren, errichte man $CA = a$ rechtwinkelig auf die Axe $CX$, nehme in $CA$, $\alpha$ nahe bei $A$ an, trage $\alpha 1 = a$ auf, nehme $\beta$ in $\alpha 1$, nahe bei $\alpha$ an, trage $\beta 2 = a$ auf, nehme wieder in dieser Linie $\gamma$ nahe bei $\beta$ an, trage $\gamma 3 = a$ auf u. s. w.; endlich führe man einen die Seiten $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ . . . u. s. w. berührenden Zug. Derselbe giebt die Zuglinie um so vollkommener an, je kleiner die Stücke $A\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta$ . . . u. s. w. sind. Herr Schiele nennt diese Linie die Antifrictionscurve (s. The Practical-Mechanics Journal, Juniheft 1849, übersetzt im polyt. Centralblatt, Jahrgang 1849).

Läßt man, wie Fig. 285 darstellt, die Antifrictionscurve am Umfange der Welle rechtwinkelig auslaufen, so ist der größte Reibungshalbmesser $CA = r$ zugleich die constante Tangente $a$, und daher das Reibungsmoment $M = \varphi R r$, ganz unabhängig von der Länge des Zapfens. Bei der ebenen Reibungsfläche $AA$ von demselben Halbmesser ist das Reibungsmoment $M_1 = {}^2/_3\, \varphi R r$, also um ein Drittel kleiner, und vermindert sich im Laufe der Zeit noch mehr, da hier der äußere Umfang mehr abgeführt wird als der innere, und die Berührungsfläche noch kleiner ausfällt.

Man construirt auch Hähne und Hahngehäuse nach der Antifrictionscurve, da hier dieselben Verhältnisse vorkommen, wie bei den Stehzapfen.

Anmerkung. Wenn sich der Zapfendruck $R$ so vertheilt, daß die Größe der Abnutzung, in der Richtung dieses Druckes gemessen, an allen Stellen des Zapfenumfanges gleich groß ausfällt, so ist

$$\frac{N_1 y_1}{sin.\, \alpha_1} = \frac{N_2 y_2}{sin.\, \alpha_2} = \frac{N_3 y_3}{sin.\, \alpha_3} \cdots,$$

also für den conischen Spitzzapfen, wo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \cdots = \alpha;\ N_1 y_1 = N_2 y_2 = N_3 y_3 \cdots$$

Bezeichnen ferner $O_1, O_2, O_3 \cdots$ die Oberflächentheile, in welchen die Normaldrücke $N_1, N_2, N_3 \cdots$ wirken, so hat man:

$$R = N_1 O_1\, sin.\, \alpha_1 + N_2 O_2\, sin.\, \alpha_2 + N_3 O_3\, sin.\, \alpha_3 + \cdots$$

also für den conischen Spitzzapfen:

$$R = (N_1 O_1 + N_2 O_2 + N_3 O_3 + \cdots)\, sin.\, \alpha \text{ zu setzen.}$$

Die Flächentheile $O_1, O_2, O_3 \cdots$ lassen sich als Ringe von einer und derselben Höhe $\frac{h}{n}$, der Breite $\frac{h}{n\, sin.\, \alpha}$, und den Halbmessern $y_1, y_2, y_3$ u. s. w. ansehen; es ist daher:

$$O_1 = 2\pi y_1 \frac{h}{n\, sin.\, \alpha},\ O_2 = 2\pi y_2 \frac{h}{n\, sin.\, \alpha},\ O_3 = 2\pi y_3 \frac{h}{n\, sin.\, \alpha} \text{ u. s. w. und}$$

$$O_2 = \frac{y_2}{y_1} O_1,\ O_3 = \frac{y_3}{y_1} O_1 \text{ u. s. w., sowie}$$

$$N_1 O_1 = N_2 O_2 = N_3 O_3 \cdots, \text{ und } R = n\,.\, N_1 O_1\, sin.\, \alpha.$$

Es sind also unter der gemachten Voraussetzung die Normaldrücke in gleich hohen Ringen des Zapfenumfangs gleich groß.

Umgekehrt folgt $N_1 O_1 = \frac{R}{n\, sin.\, \alpha}$, und daher das Moment der Zapfenreibung:

$$M = \varphi (N_1 O_1 y_1 + N_2 O_2 y_2 + N_3 O_3 y_3 + \cdots) = \varphi N_1 O_1 (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$
$$= \frac{\varphi R}{sin.\, \alpha} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Hat man es mit einem abgestumpften Kegelzapfen zu thun, dessen beiden Halbmesser $r_1$ und $r_2$ sind, so ist $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{n(r_1 + r_2)}{2}$ zu setzen, so daß sich $M = \frac{\varphi R (r_1 + r_2)}{2\, sin.\, \alpha}$ ergiebt.

Für den vollständigen Spitzzapfen, wo $r_2 = o$ ist, folgt daher $R - \frac{\varphi R r_1}{2 sin. \alpha}$, während wir oben (§. 189), $M = {}^2/_3\, \varphi \frac{R r_1}{sin.\, \alpha}$ gefunden haben.

S. den Aufsatz von Herrn Reye zur Theorie der Zapfenreibung in Band 6 des Civil-Ingenieur, sowie den betreffenden Aufsatz vom Herrn Director Grashof in Band 5 der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.

**Reibung an Spitzen und Schneiden.** Um die Axenreibung drehender Körper möglichst zu vermeiden, unterstützt man diese durch zugespitzte Stifte, scharfe Schneiden u. s. w. Hätte man es hierbei mit vollkommen starren und unelastischen Körpern zu thun, so würde bei dieser Methode des Aufhängens oder Unterstützens gar kein Arbeitsverlust in Folge der Reibung entstehen können, weil hier von der Reibung kein meßbarer Weg zurückgelegt wird; allein da jeder Körper eine gewisse Elasticität besitzt, so wird beim Aufliegen eines solchen auf einer Spitze oder Schneide ein kleines Eindrücken derselben eintreten und sich dadurch eine reibende Fläche herausstellen, auf welcher von der Reibung Wege beschrieben werden, die allerdings zu einem, wenn auch nur sehr kleinen Arbeitsverluste Veranlassung geben. Bei lange anhaltenden Drehungen und Schwingungen der auf diese Weise unterstützten Körper stellen sich solche Reibungsflächen ohnedies noch ein in Folge des Abreibens der Spitze oder scharfen Kante, und es ist dann die Reibung nach dem Früheren zu beurtheilen. Man wendet aus diesem Grunde diese Unterstützungsmethoden auch nur bei Instrumenten, wie bei der Boussole, Wage u. s. w. an, wo es auf die Herabziehung der Reibung wesentlich ankommt und nur von Zeit zu Zeit Bewegungen zugelassen werden. §. 191

Versuche über Reibung eines auf einer harten Stahlspitze ruhenden und um diese drehbaren Körpers hat Coulomb angestellt. Nach diesen Versuchen wächst diese Reibung etwas stärker als der Druck und verändert sich mit der Stärke der Zuspitzung des unterstützenden Stiftes. Sie ist bei einer Granatfläche am kleinsten, größer bei einer Achatfläche, größer bei einer Fläche von Bergkrystall, noch größer bei einer Glasfläche, am größten aber bei Stahlflächen. Bei sehr kleinem Drucke, wie bei der Magnetnadel, kann der Stift bis auf 10° bis 12° Convergenz zugespitzt werden. Ist der Druck aber groß, so muß man weit größere Convergenzwinkel (30° bis 45°) anwenden. Die Reibung ist kleiner, wenn der Körper mit einer ebenen Fläche auf einer Spitze ruht, als wenn er mit einer conischen oder sphärischen Höhlung aufsitzt. Bei einer scharfen Schneide, wie sie bei Wagebalken vorkommt, finden jedenfalls ähnliche Beziehungen statt. Schwer zu belastende Wagebalken bekommen schneidige Axen von 90° Convergenz, leichte Wagen können eine Schärfung von 30° vertragen.

Nimmt man an, daß die Nadel $AB$, Fig. 287, am Stifte $FCG$ die Spitze $DCE$ von der Höhe $CM = h$ und den Halbmesser $DM = r$ eingedrückt habe, und setzt man voraus, daß das Volumen $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ dem Drucke $R$ proportional sei, so läßt sich das Maß der Reibung auf folgende Weise finden. Setzen wir $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \mu R$, wo $\mu$ eine Erfahrungszahl

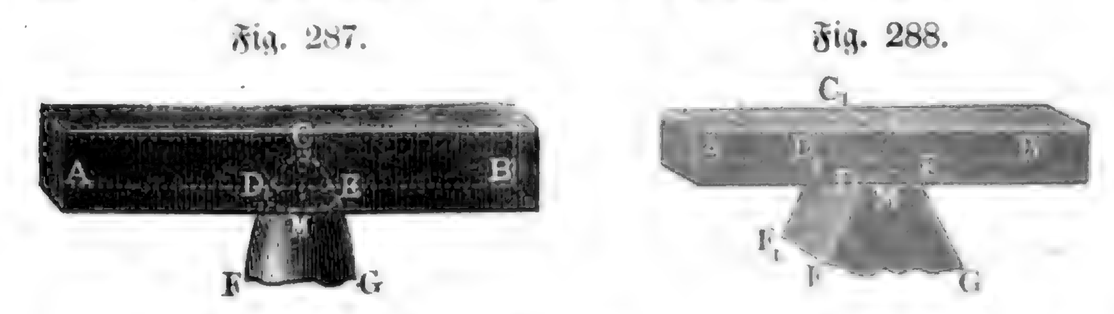
ist, und führen wir den Convergenzwinkel $DCE = 2\alpha$ ein, setzen also $h = r\,cotg.\,\alpha$, so erhalten wir den Halbmesser der Basis:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,\mu\,R\,tang.\,\alpha}{\pi}} \text{ und}$$

$$\varphi\,R\,r = \varphi\sqrt[3]{\frac{3\,\mu\,R^4\,tang.\,\alpha}{\pi}} = \varphi\sqrt[3]{\frac{3\,\mu}{\pi}} \cdot \sqrt[3]{R^4\,tang.\,\alpha}.$$

Hiernach ist also anzunehmen, daß die Reibung auf einem Stifte mit der Cubikwurzel aus der vierten Potenz des Druckes und der Cubikwurzel aus der Tangente des halben Convergenzwinkels gleichmäßig wächst.

Fig. 287. Fig. 288.

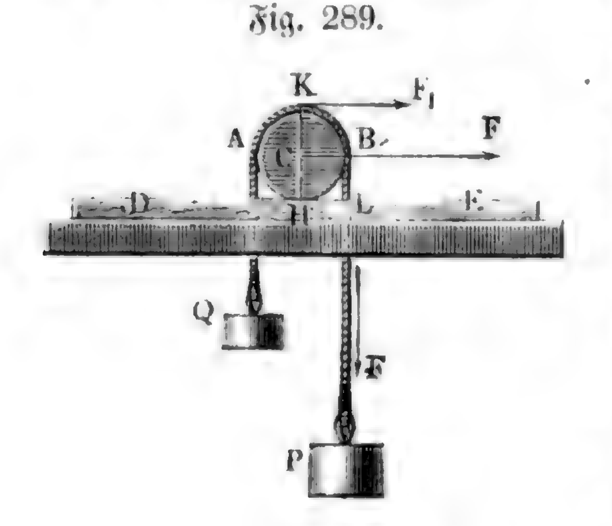



Ebenso läßt sich das Maß der Reibung eines Balkens $AB$, Fig. 288, finden, welcher über einer scharfen Kante $CC_1$ oscillirt. Ist $\alpha$ der halbe Convergenzwinkel $DCM$, $l$ die Länge $CC_1$ der Schneide und $R$ der Druck, so ergiebt sich das Maß des Reibungsmomentes:

$$\varphi\,R\,r = \sqrt{\frac{(R\,tang.\,\alpha)^3}{l}}.$$

§. 192 **Wälzende Reibung.** Die Theorie der wälzenden Reibung ist noch keineswegs fest begründet, man weiß, daß diese Reibung zunimmt mit dem Drucke und daß sie bei einem kleineren Durchmesser der Walze größer ist als bei einem größeren Durchmesser; in welcher algebraischen Abhängigkeit diese Reibung aber zum Drucke und Durchmesser des sich wälzenden Körpers steht, kann noch nicht als ausgemacht angesehen werden. Coulomb machte nur einige Versuche mit 2 bis 12 Zoll dicken Walzen aus Guajac (Pocken-) oder Franzosenholz und aus Ulmenholz, die er auf Unterlagen von Eichenholz wälzen ließ, indem er die Enden eines dünnen, um die Walze $AB$ gelegten Fadens durch ungleiche Gewichte $P$ und $Q$, Fig. 289, anspannte. Nach den Ergebnissen dieser Versuche scheint die wälzende Reibung dem Drucke direct und dem

Fig. 289.



Durchmesser der Walze umgekehrt proportional zu wachsen, so daß die Kraft zur Ueberwindung der wälzenden Reibung durch $F = f \cdot \frac{R}{r}$ auszudrücken ist, wenn $R$ den Druck, $r$ den Halbmesser der Walze und $f$ den durch Versuche zu ermittelnden Reibungscoefficienten bezeichnet. Giebt man $r$ in preuß. Zollen, so ist nach diesen Versuchen

für die Walzen aus Pockenholz $f = 0{,}0184$,
für die aus Ulmenholz $f = 0{,}0311$.

Für gußeiserne Räder von 20 Zoll Durchmesser, welche auf gußeisernen Schienen laufen, fand der Verfasser:

$f = 0{,}0178$, und Herr Sectionsrath Rittinger
$f = 0{,}0187$.

Nach Pambour ist für Eisenbahnräder von ungefähr 38 Zoll Höhe:

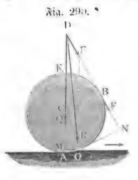
$f = 0{,}019$ bis $0{,}021$.

Die Formel $F = f \frac{R}{r}$ setzt voraus, daß die Kraft $F$ zur Ueberwindung der Reibung an einem dem Walzenhalbmesser gleichen Hebelarm $\overline{HC} = \overline{HL} = r$ wirke, und daher mit der Walze einerlei Weg zurücklege; wirkt dieselbe aber an einem Hebelarm $\overline{HK} = 2r$, so ist auch der Weg derselben doppelt so groß als der der Walze auf der Bahn, und daher die Reibung:

$$F_1 = \tfrac{1}{2} F = f \frac{R}{2r}.$$

Die Gleichgewichtsverhältnisse der wälzenden Reibung sind auf folgende Weise zu beurtheilen. In Folge des Druckes $Q$ der Walze $ACB$ auf die Basis $AO$, Fig. 290, drückt sich die letztere etwas zusammen, und es ruht deshalb die Walze nicht im tiefsten Punkte $A$, sondern in einem etwas vorwärts gelegenen Punkte $O$ auf. Verlegt man nun die Angriffspunkte $A$ und $B$ der Kräfte $Q$ und $F$, wovon $F$ die zur Ueberwindung der Reibung nöthige Umdrehungskraft bezeichnet, nach dem Durchschnitte $D$, und construirt man aus $Q$ und $F$ das Kräfteparallelogramm, so erhält man durch dessen Diagonale $\overline{DR}$ die Kraft $R$, mit welcher die Walze in $O$ auf ihre Unterstützung drückt, und es ist daher zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthig, daß die Kraftmomente eines Winkelhebels $AON$ einander gleich sind. Setzt man nun den Abstand $ON$ des Stützpunktes $O$ von der Richtung der Kraft, $= a$, und die Entfernung $OM$ desselben Punktes von der verticalen Schwerlinie des

Fig. 290.



Körpers $= f$, so hat man folglich:

$$Fa = Qf.$$

und daher die gesuchte Reibung:

$$F = \frac{f}{a} Q.$$

Der Hebelarm $f$ ist eine Erfahrungsgröße und so klein, daß statt $a$ auch der Abstand des Fußpunktes $A$ von der Richtung der Kraft $F$, sowie statt $Q$ der Gesammtdruck $R$ eingesetzt werden kann.

Hiernach ist $F = \frac{f}{a} R$, und folglich in dem Falle, wenn die Kraft horizontal wirkt und durch den Mittelpunkt $C$ geht, also $a = r$ ist:

$$F = \frac{f}{r} R,$$

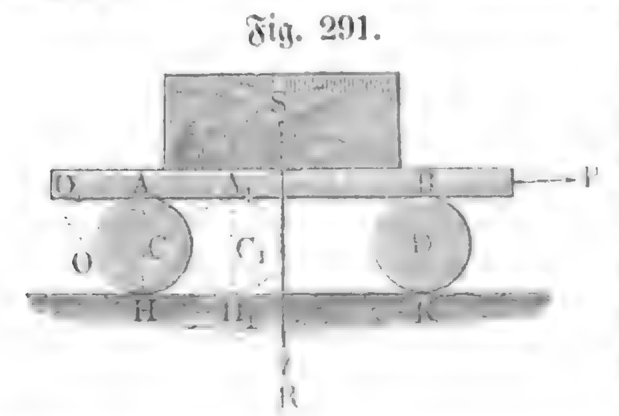
und dagegen dann, wenn diese Kraft im Scheitel $K$ der Walze tangential wirkt, $a = 2r$, und daher:

$$F = \frac{f}{2r} R.$$

Der sogenannte Reibungscoefficient $f$ der wälzenden Reibung ist folglich keine unbenannte Zahl, sondern eine Linie, und muß daher mit $a$ in gleichem Maße ausgedrückt werden.

Wird ein über Walzen $C$ und $D$, Fig. 291, liegender Körper $ASB$ fortgezogen, so fällt die erforderliche Kraft $P$ sehr klein aus, weil nur zwei wälzende Reibungen, nämlich die zwischen $AB$ und den Walzen und die zwischen den Walzen und der Bahn $HK$, zu überwinden sind. Uebrigens ist der progressive Weg der Walzen nur halb so groß als der Weg der Last $R$, und es sind deshalb beim ferneren Fortgehen immer wieder neue Walzen vorn unterzuschieben, weil die Berührungspunkte $A$ und $B$ zwischen den Walzen und dem Körper $AB$ vermöge des Wälzens ebenso viel rückwärts gehen, als die Axe der Walze vorwärts. Hat sich die Walze $AH$ um den Bogen $AO$ gedreht, so ist sie auch um einen diesem Bogen gleichen Weg $AA_1$ vorwärts gegangen und $O$ mit $O_1$ in Berührung gekommen, der neue Berührungspunkt $O_1$ also um $AO_1 = AO$ hinter dem vorigen $(A)$ zurückgegangen.

Fig. 291.



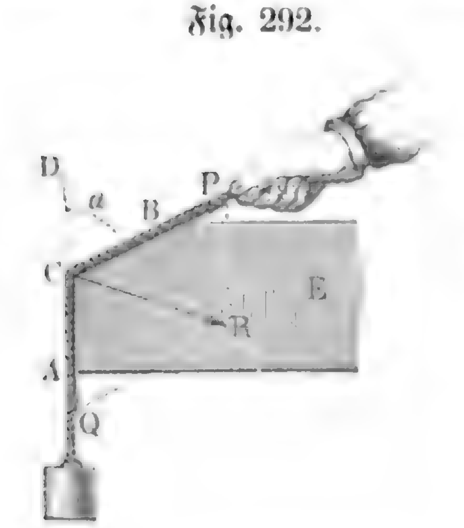

Bezeichnet man die Coefficienten der Reibung auf $HK$ und $AB$ durch $f$ und $f_1$, so hat man die Kraft zum Fortziehen der Last $R$:

$$P = (f + f_1) \frac{R}{2r}.$$

Anmerkung. Die von Morin in großer Ausdehnung angestellten Versuche über den Widerstand der Wagen auf Straßen stimmen mit dem Gesetze, wonach dieser Widerstand mit dem Drucke gleichmäßig und mit der Dicke der Walze umgekehrt wächst, überein. Ein anderer französischer Ingenieur, Dupuit, hingegen leitet aus seinen Versuchen ab, daß die wälzende Reibung zwar dem Drucke direct, aber übrigens nur der Quadratwurzel aus dem Walzenhalbmesser umgekehrt proportional wachse. Die neueren Versuche von Poirée und Sauvage mittelst Eisenbahnwagen führen ebenfalls darauf, daß die rollende Reibung umgekehrt wie die Quadratwurzel des Radhalbmessers wächst. S. Comptes rendues de la société des ingenieurs civils à Paris, 5. et 6. année. Besondere theoretische Ansichten über wälzende Reibung findet man in v. Gerstner's Mechanik, Bd. I. §. 537, und in Brix' Abhandlung über die Reibung, Art. 6, entwickelt. Ausführlicher wird hierüber im dritten Theile bei der Förderung auf Straßen und Schienenwegen gehandelt.

**Seilreibung.** Wir haben nun die Reibung eines biegsamen Körpers kennen zu lernen. Wird ein übrigens vollkommen biegsames, durch eine Kraft $Q$ angespanntes Seil um die Kante $C$ eines festen Körpers $ABE$, Fig. 292, gelegt und dadurch um einen Winkel $DCB = \alpha^0$ von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, so entsteht in dieser Kante ein Druck $R$, aus dem wieder eine Reibung $F$ hervorgeht, welche verursacht, daß die Kraft $P$ zur Herstellung eines labilen Gleichgewichtes größer oder kleiner als $Q$ ist. Der Druck ist (§. 77): §. 193

Fig. 292.




$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\,cos.\,\alpha},\text{ folglich die Reibung:}$$

$$F = \varphi \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\,cos.\,\alpha}.$$

Setzen wir nun noch $P = Q + F$ und $P^2$ annähernd $= Q^2 + 2QF$, so erhalten wir:

$$F = \varphi \sqrt{Q^2 + 2QF + Q^2 - 2Q^2\,cos.\,\alpha - 2FQ\,cos.\,\alpha}$$

$$= \varphi \sqrt{2(1 - cos.\,\alpha)(Q^2 + QF)} = 2\varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{Q^2 + QF},$$

wofür wieder $= 2\varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}(Q + \frac{1}{2}F)$ anzunehmen ist, wenn man von der Quadratwurzel nur die ersten zwei Glieder berücksichtigt. Jetzt ergiebt sich:

$$F = \varphi F\,sin.\,\frac{\alpha}{2} + 2\varphi Q\,sin.\,\frac{\alpha}{2},$$

folglich die gesuchte Reibung:

$$F = \frac{2\,\varphi\, Q\, sin.\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}},$$ wofür meist genügend genau

$$F = 2\,\varphi\, Q\, sin.\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}\right),$$ und sogar sehr oft

$$F = 2\,\varphi\, Q\, sin.\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt werden kann, wenn der Ablenkungswinkel $\alpha$ klein ist. Um also das Seil über die Kante $C$ wegzuziehen, ist eine Kraft

$$P = Q + F = \left(1 + \frac{2\,\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}}\right) Q$$

nöthig, und um umgekehrt, durch das Seil das Niedergehen der Last $Q$ zu verhindern, ist eine Kraft

$$P_1 = Q : \left(1 + \frac{2\,\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}}\right)$$

erforderlich; annähernd läßt sich

$$P = \left[1 + 2\,\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}\right)\right] Q,$$ oder noch einfacher:

$$P = \left(1 + 2\,\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q$$ und

$$P_1 = \frac{Q}{1 + 2\,\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}\right)},$$ oder:

$$P_1 = \frac{Q}{1 + 2\,\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}} = \left(1 - 2\,\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q$$ setzen.

Geht das Seil über mehrere Kanten, so lassen sich durch wiederholte Anwendung dieser Formeln die Kräfte $P$ und $P_1$ am anderen Seilende ebenfalls berechnen. Nehmen wir den einfachen Fall an, daß das Seil $ABC$, Fig. 293, um einen Körper mit $n$ Kanten gelegt sei und an jeder Kante um denselben kleinen Winkel $\alpha$ abgelenkt werde. Die Spannung im ersten Seilstücke ist:

$$Q_1 = \left(1 + 2\,\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q,$$

wenn die des Endes $= Q$ beträgt; die des zweiten

$$Q_2 = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q_1 = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2 Q,$$

die des dritten:

$$Q_3 = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q_2 = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^3 Q,$$

daher allgemein, die Kraft am letzten Ende:

$$P = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n Q,$$

insofern es auf eine Bewegung in der Richtung der Kraft $P$ ankommt. Vertauscht man $P$ durch $Q$, so erhält man dagegen die nöthige Kraft:

$$P_1 = \frac{Q}{\left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n},$$

wofern nur eine Bewegung in der Richtung von $Q$ zu verhindern ist.

Fig. 293.

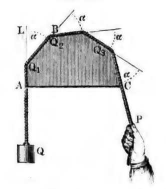
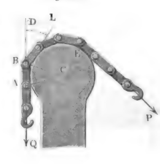



Fig. 294.




Die Reibung ist in einem Falle:

$$F = P - Q = \left[\left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] Q,$$

und im zweiten:

$$F = Q - P_1 = \left[\left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] P_1$$

$$= \left[1 - \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^{-n}\right] Q.$$

Dieselben Formeln finden auch ihre Anwendung bei einem um einen Cylinder gewickelten, gegliederten Körper, z. B. bei einer Kette $ABE$, Fig. 294, wo dann $n$ die Zahl der aufliegenden Glieder angiebt. Ist die Länge $AB$ eines Kettengliedes $= l$ und die Entfernung $CA$ der Axe $A$ eines Gliedes

von dem Mittelpunkte $C$ des bedeckten Kreisbogens, $= r$, so hat man für den Ablenkungswinkel $DBL = ACB = \alpha$, $sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}$.

Beispiel. Wie groß ist die Reibung am Umfange eines 4 Fuß hohen Rades, wenn dasselbe von zwanzig 5 Zoll langen und 1 Zoll dicken Gliedern einer Kette bedeckt wird, deren eines Ende festgehalten und deren anderes Ende mit 50 Pfund Kraft angespannt wird? Hier ist:

$$P_1 = 50 \text{ Pfund}, \; n = 20, \; sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{48+1} = \frac{5}{49};$$

setzen wir nun noch für $\varphi$ den mittleren Werth 0,35 ein, so erhalten wir die Reibung mit der die Kette dem Rade in seiner Umdrehung entgegenwirkt:

$$F = \left[\left(1 + 2 \,.\, 0{,}35 \,.\, \frac{5}{49}\right)^{20} - 1\right] . \, 50 = \left[\left(1 + \frac{35}{490}\right)^{20} - 1\right] . \, 50$$

$$= \left[\left(\frac{15}{14}\right)^{20} - 1\right] . \, 50 = 2{,}974 \,.\, 50 = 149 \text{ Pfund}.$$

§. 194 Liegt ein gespanntes Seil $AB$, Fig. 295, um einen **festliegenden, cylindrisch abgerundeten Körper** $ACB$, so läßt sich die Reibung durch die im vorigen Paragraphen gefundene Regel ebenfalls finden. Es ist hier der Ablenkungswinkel $EDB = \alpha^0 =$ dem Centriwinkel $ACB$ des Seilbogens $AB$; theilt man denselben in $n$ gleiche Theile und sieht man den Bogen $AB$ als aus $n$ geraden Linien bestehend an, so erhält man auch $n$ Ecken, jede mit der Ablenkung $\frac{\alpha^0}{n}$, und deshalb die Gleichung zwischen Kraft und Last wie im vorigen Paragraphen:

Fig. 295.

$$P = \left(1 + 2\,\varphi \; sin. \frac{\alpha}{2\,n}\right)^n Q.$$

Wegen der Kleinheit des Bogens $\frac{\alpha}{2\,n}$ läßt sich aber $sin. \frac{\alpha}{2\,n} = \frac{\alpha}{2\,n}$ setzen, weshalb sich

$$P = \left(1 + \frac{\varphi\,\alpha}{n}\right)^n Q \text{ herausstellt.}$$

Bedient man sich nun noch der binomischen Reihe, so erhält man:

$$P = \left(1 + n\frac{\varphi\,\alpha}{n} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\frac{(\varphi\,\alpha)^2}{n^2} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(\varphi\,\alpha)^3}{n^3} + \cdots\right)Q,$$

oder, da $n$ sehr groß ist, also $n - 1 = n - 2 = n - 3 \ldots = n$ gesetzt werden kann:

$$P = \left(1 + \varphi\alpha + \frac{1}{1.2}(\varphi\alpha)^2 + \frac{1}{1.2.3}\cdot(\varphi\alpha)^3 + \cdots\right) Q.$$

Nun ist aber $1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots = e^x$, wo $e$ die Grundzahl 2,71828 . . . des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet (s. analyt. Hülfslehren, Art. 19), es läßt sich daher auch setzen:

$$P = e^{\varphi\alpha}\,.\,Q, \text{ sowie } Q = Pe^{-\varphi\alpha}, \text{ und umgekehrt:}$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi} Log.\,nat.\frac{P}{Q} = \frac{2,3026}{\varphi}(Log.\,P - Log.\,Q).$$

Giebt man den Seilbogen nicht in Theilen von $\pi$, sondern in Graden, so hat man $\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0}\cdot\pi$ zu substituiren, drückt man ihn endlich durch die Zahl $u$ der Umschläge aus, so hat man $\alpha = 2\pi u$ zu setzen.

Die Formel $P = e^{\varphi\alpha}\,.\,Q$ giebt an, daß die Seilreibung $F = P - Q$ auf einem festliegenden Cylinder gar nicht vom Durchmesser desselben, sondern nur von der Anzahl der Seilumschläge abhängt, zeigt aber auch, daß sie leicht außerordentlich vergrößert und fast bis ins Unendliche gesteigert werden kann. Setzen wir $\varphi = 1/_3$, so bekommen wir:

| | | |
|---|---|---|
| für $^1/_4$ | Umwickelung, | $P = 1,69\ Q$ |
| „ $^1/_2$ | „ | $P = 2,85\ Q$ |
| „ 1 | „ | $P = 8,12\ Q$ |
| „ 2 | „ | $P = 65,94\ Q$ |
| „ 4 | „ | $P = 4348,56\ Q$ u. s. w. |

(Anmerkung.) Aus der Gleichung $P = \left(1 + 2\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q$ in §. 193 folgt:

$$P - Q = 2\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}Q,$$

oder, wenn man statt $\alpha$ das Bogenelement $\partial\alpha$, und statt $P - Q$ den entsprechenden Zuwachs $\partial P$ der veränderlichen Seilspannung $P$ einführt und $Q = P$ setzt:

$$\partial P = 2\varphi\frac{\partial\alpha}{2}P, \text{ oder } \frac{\partial P}{P} = \varphi\,\partial\alpha,$$

und man erhält durch Integration sogleich:

$$Ln.\,P = \varphi\alpha + Con.$$

Anfangs ist $\alpha = 0$ und $P = Q$, daher:

$$Ln.\,Q = 0 + Con. \text{ und } Ln.\,P - Ln.\,Q = Ln.\left(\frac{P}{Q}\right) = \varphi\alpha.$$

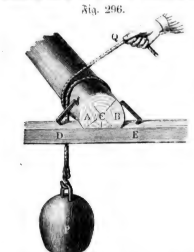
woraus sich durch Umkehrung die obige Gleichung:

$$\frac{P}{Q} = e^{\varphi\alpha}, \text{ oder } P = e^{\varphi\alpha}Q$$

ebenfalls ergiebt.

Beispiel. Um eine große untheilbare Last $P$ von 1200 Pfund von einer gewissen Höhe, z. B. in einem Schachte, herabzulassen, wickelt man das Seil, woran diese Last hängt, um einen festgeklammerten runden Stamm $AB$, Fig. 296, $1\frac{3}{8}$ mal herum und hält das übrig bleibende Seilende in der Hand. Mit welcher Kraft ist nun dieses Seilende anzuspannen, damit die Last langsam und gleichförmig niedersinke? Setzen wir auch hier $\varphi = 0,3$, so erhalten wir diese Kraft:

Fig. 296.




$$Q = P e^{-\varphi\alpha} = 1200 \, . \, e^{-0,3 \, . \, \frac{11}{8} 2\pi}$$

$$= 1200 \, . \, e^{\frac{33}{40}\pi},$$

also:

$$Log. \, nat. \, Q = Log. \, nat. \, 1200 - \frac{33}{40}\pi$$

$$= 7,0901 - 2,5918$$

$$= 4,4983, \text{ oder}$$

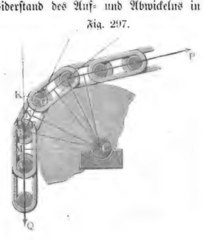
$$Log. \, Q = 1,9536,$$

daher $Q = 89,9$ Pfund.

§. 195 **Steifigkeit der Ketten.** Legen sich Seile oder gegliederte Körper u. s. w. um eine Rolle oder um den Umfang eines um eine Axe drehbaren Cylinders, so hört die im vorigen Paragraphen betrachtete Seil- oder Kettenreibung auf, weil nun der Radumfang mit dem Seile einerlei Geschwindigkeit annimmt, dafür ist nun aber eine Kraft zum Umbiegen beim Auflegen auf die Rolle, und nach Befinden auch eine solche zum Aufbiegen beim Abwickeln von der Rolle, aufzuwenden nöthig.

Ist es eine Kette, die sich um eine Trommel wickelt, so besteht der Widerstand des Auf- und Abwickelns in einer Reibung der Kettenbolzen, indem letztere in ihren Lagern um gewisse Winkel gedreht werden. Ist $AB$, Fig. 297, das eine und $BG$ das nächstfolgende Kettenglied, ist ferner $C$ die Drehungsaxe der Rolle, worauf sich die durch die Last $Q$ ausgespannte Kette aufwickelt, sind endlich $CM$ und $CN$ Perpendikel, gegen die Längenaxen der Glieder $AB$ und $BG$ gefällt, so ist $MCN = \alpha^0$ der Winkel, um welchen sich die Rolle dreht, während

Fig. 297.



sich ein neues Glied auflegt, und auch zugleich der Winkel $KBG = 180^0 - ABG$, um welchen sich bei diesem Auflegen das Glied $BG$ mit seinem Bolzen $BD$ in dem Gliede $AB$ umdreht. Bei dem Halbmesser $BD = BE = r_1$ des Bolzens durchläuft der Druck- oder Reibungspunkt $D$, während sich ein Kettenglied auflegt, einen Bogen $DE = r_1 \alpha$, und es ist folglich die hierbei verrichtete Arbeit der Reibung $\varphi_1 Q$ im Punkte $D$, $= \varphi_1 Q \cdot r_1 \alpha$. Für die Kraft $P_1$ zur Ueberwindung dieser Reibung, in der Richtung der Längenaxe $BG$ wirkend, angenommen, erhält man den gleichzeitigen Weg $s = CN$ mal Bogen des Winkels $MCN = \overline{CN} \cdot \alpha$ und daher die Arbeit $= P_1 \cdot \overline{CN} \cdot \alpha$; es ergiebt sich daher durch Gleichsetzen beider Arbeiten $P_1 \cdot \overline{CN} \cdot \alpha = \varphi_1 \cdot Q r_1 \alpha$ und die gesuchte Kraft, wenn man noch den um die halbe Kettenstärke vergrößerten Halbmesser $CN$ der Trommel durch $a$ bezeichnet:

$$P_1 = \varphi_1 Q \frac{r_1}{a}.$$

Ohne Rücksicht auf alle Reibungen wäre die Kraft zum Umdrehen der Rolle:

$$P = Q,$$

mit Rücksicht der Reibung beim Aufwickeln der Kette ist sie aber:

$$P = Q + P_1 = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q.$$

Wickelt sich die Kette von der Trommel ab, so findet ein gleicher Widerstand statt; wenn also, wie bei den sogenannten Leitrollen, ein Auflegen auf der einen Seite und ein Abwickeln auf der anderen statthat, so ist die Kraft

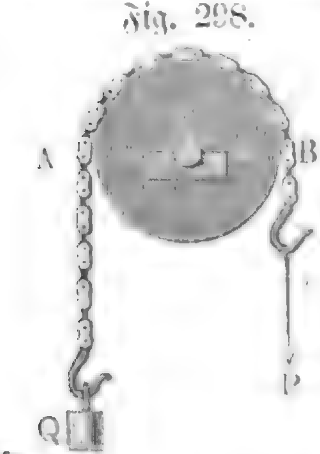
$$P = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right)^2 Q, \text{ oder annähernd } = \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q.$$

Ist endlich noch der Zapfendruck $= R$, und der Zapfenhalbmesser $= r$, so folgt die Zugkraft bei Berücksichtigung aller Hindernisse:

$$P = \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q + \varphi \frac{r}{a} R.$$

Beispiel. Wie groß ist die Kraft $P$ am Ende einer um eine Rolle $ACB$, Fig. 298, geschlagenen Kette, wenn die vertical niederziehende Last $Q = 110$ Pfund, das Gewicht der Rolle sammt Kette, 50 Pfund beträgt, der bis zur Mitte der Kette gemessene Halbmesser $a$ der Rolle, $= 7$ Zoll, der Halbmesser des Zapfens $C$, $= 5/8$ Zoll und der Halbmesser der Kettenbolzen, $= 3/8$ Zoll mißt? Setzen wir die Reibungscoefficienten $\varphi = 0,075$ und $\varphi_1 = 0,15$, so erhalten wir nach der letzten Formel die Kraft:

Fig. 298.




$$P = \left(1 + 2 . 0,15 \cdot \frac{3}{8 . 7}\right) \cdot 110 + 0,075 . \frac{5}{8 . 7} (110 + 50 + P),$$

oder, wenn wir rechts $P = 110$ annähernd annehmen:

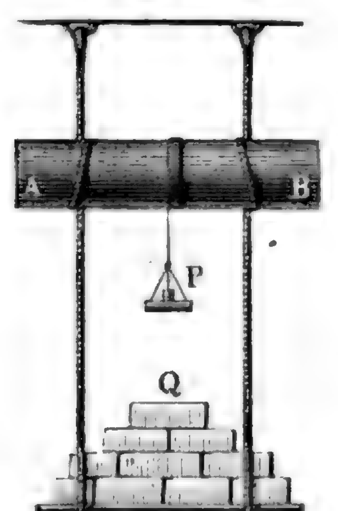
$$P = 1,016 \,.\, 110 + 0,0067 \,.\, 270 = 111,76 + 1,81 = 113,6 \text{ Pfund}.$$

§. 196 **Steifigkeit der Seile.** Beim Umbiegen eines Seiles um eine Rolle, oder beim Aufwickeln desselben auf eine Welle, tritt die Steifigkeit (franz. roideur; engl. rigidity) desselben als ein der Bewegung desselben entgegengesetztes Hinderniß hervor. Dieser Widerstand hängt nicht allein von dem Stoffe ab, aus dem das Seil gefertigt ist, sondern auch von der Zusammensetzungsweise und von der Stärke des Seiles, und läßt sich deshalb nur auf experimentellem Wege ermitteln.

Versuche zu diesem Zwecke sind vorzüglich von Coulomb, und in der neueren Zeit von dem Verfasser selbst angestellt worden. Während sich Coulomb nur mit schwachen Hanfseilen von $^1/_4$ bis höchstens $1^1/_2$ Zoll Stärke beschäftigte und dieselben auch nur auf Rollen von 1 bis höchstens 6 Zoll Durchmesser aufwickeln ließ, hat der Verfasser Hanfseile von 2 Zoll Stärke und Drahtseile von $^1/_2$ bis 1 Zoll Stärke über Rollen von 2 bis $6^1/_2$ Fuß Durchmesser laufen lassen.

Coulomb hat seine Versuche auf zweierlei Weise ausgeführt. Ein Mal, nach Amontons, mit einem in Fig. 299 abgebildeten Apparate, wo $AB$ eine von zwei Seilen umschlungene Walze ist, die Spannung durch ein Gewicht $Q$ hervorgebracht und das Herabrollen der Walze durch ein zweites Gewicht $P$, welches mittels eines dünnen Fadens an dieser Walze zieht, bewirkt wird. Ein zweites Mal hat er die Seile um auf einer horizontalen Bahn sich wälzende Cylinder gelegt, und aus der Differenz der an beiden Seilen hängenden und ein langsames Fortrollen bewirkenden Gewichte, nach Abzug der rollenden Reibung, auf den Steifigkeitswiderstand geschlossen.

Fig. 299.




Aus den Versuchen Coulomb's geht hervor, daß der Steifigkeitswiderstand mit der Stärke der Spannung des sich aufwickelnden Seiles ziemlich gleichmäßig wächst, daß er aber auch noch aus einem constanten Gliede $K$ besteht, wie sich allerdings nicht anders erwarten läßt, weil schon eine gewisse Kraft nöthig ist, um ein unangespanntes Seil umzubiegen. Auch stellt sich heraus, daß dieser Widerstand im umgekehrten Verhältnisse der Rollendurchmesser zunimmt, daß er also bei dem doppelten Durchmesser der Rolle nur halb so groß ist, beim dreifachen ein Drittel u. s. w. Endlich läßt sich die Beziehung zwischen der Seildicke und der Seilsteifigkeit nach diesen Versuchen nur annähernd angeben, wie es auch kaum anders zu erwarten ist, da die Steifigkeit auch noch von der materiellen Beschaffenheit und von der Stärke der Drehung der Fäden und Litzen mit abhängt. Bei neuen Seilen fand sich die Steifigkeit ungefähr proportional der Potenz $d^{1,7}$, bei alten aber mehr $d^{1,4}$, wenn $d$ den Durchmesser des Seiles bezeich-

net. Es ist also nur sehr ungefähr, wenn Einige diesen Widerstand der einfachen, Andere dem Quadrate der Seilstärke proportional wachsend annehmen.

**Prony's Formel für den Steifigkeitswiderstand der Hanfseile.** §. 197 Dem Vorstehenden zufolge läßt sich der Steifigkeitswiderstand der Hanfseile durch die Formel:

$$S = \frac{d^n}{a}(K + \nu Q),$$

wo $d$ die Seilstärke, $a$ der Rollenhalbmesser, bis Axe des Seiles gemessen, $Q$ die Spannung des sich aufwickelnden Seiles, $n$, $K$ und $\nu$ aber Erfahrungszahlen bezeichnen. Prony hat aus den Versuchen Coulomb's gefunden, daß für neue Seile

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(2,45 + 0,053\ Q),$$

und für alte:

$$S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(2,45 + 0,053\ Q)$$

gesetzt werden kann, wenn $a$ und $d$ in Linien, $Q$, $S$ in Pfunden ausgedrückt sind. Diese Ausdrücke beziehen sich aber auf Pariser Maß, in preußischen Zollen und Neupfunden ausgedrückt, ändern sie sich in folgende um:

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(13,31 + 0,295\ Q) \text{ und } S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(6,39 + 0,141\ Q).$$

Da selbst diese complicirteren Formeln nicht immer die erwünschte Uebereinstimmung mit den Versuchsresultaten geben, so kann man, so lange nicht neue Versuche zu Grunde gelegt werden können, mit Eytelwein:

$$S = \nu \cdot \frac{d^2}{a} Q = \frac{d^2 Q}{3500 a}$$

setzen, wobei vorausgesetzt ist, daß $a$ in preußischen Fußen und $d$ in preußischen Linien, dagegen $Q$ und $S$ in willkürlichem, jedoch gleichem Gewichtsmaße auszudrücken sind. Für Metermaß ist:

$$S = 18,6 \cdot \frac{d^2 Q}{a}.$$

Diese Formel giebt natürlich nur bei größeren Spannungen, wie sie allerdings meist in der praktischen Anwendung vorkommen, genügende Annäherungsresultate.

Die Steifigkeit getheerter Seile ist ungefähr um ein Sechstel größer als die ungetheerter Seile gefunden worden, und nasse Seile hat man ungefähr ein Zwölftel steifer gefunden als trockene.

Beispiel. Bei einer Seilspannung von 350 Neupfund und einem Rollenhalbmesser von $2\frac{1}{2}$ Zoll ist für ein 9 Linien dickes neues Seil der Steifigkeitswiderstand nach Prony:

$$S = \frac{2}{5} (\frac{3}{4})^{1,7} (13,31 + 0,295 \,.\, 350) = 0,613 \,.\, 46,6 = 28,6 \text{ Pfund},$$

nach Eytelwein:

$$S = \frac{9^2 \,.\, 350}{3500 \,.\, \frac{5}{24}} = 38,9 \text{ Pfund}.$$

Wäre die Spannung $Q$ nur 150 Pfund, so hätte man nach Prony:

$$S = 0,613 \,.\, 23,0 = 14,10 \text{ Pfund},$$

nach Eytelwein:

$$= \frac{81 \,.\, 24 \,.\, 3}{350} = 16,7 \text{ Pfund},$$

also hier eine bessere Uebereinstimmung. Man sieht aus diesen Beispielen, wie wenig Sicherheit diese Formeln gewähren.

Anmerkung. Tabelle zur Erleichterung der Berechnung des Steifigkeitswiderstandes der Seile theilt der „Ingenieur" Seite 365 mit. Nach Morin (siehe dessen Leçons de Mécanique pratique) ist, wenn $n$ die Anzahl der Seilfäden bezeichnet, und der Rollenhalbmesser $a$ in Centimetern ausgedrückt wird, für ungetheerte Seile:

$$d = \sqrt{0,1338\, n} \text{ Centimeter und}$$

$$S = \frac{n}{2a} (0,0297 + 0,0245\, n + 0,0363\, Q) \text{ Kilogr.}$$

$$= \frac{d^2}{a} (0,1110 + 0,6843\, d^2 + 0,1357\, Q) \text{ Kilogr.},$$

und für getheerte:

$$d = \sqrt{0,186\, n} \text{ Centimeter, und}$$

$$S = \frac{n}{2a} (0,14575 + 0,0346\, n + 0,0418\, Q) \text{ Kilogr.}$$

$$= \frac{d^2}{a} (0,3918 + 0,5001\, d^2 + 0,1124\, Q) \text{ Kilogr.}$$

Drückt man aber $d$ und $a$ in Zollen und $S$ und $Q$ in Neupfunden aus, so stellt sich für ungetheerte Seile:

$$S = \frac{d^2}{a} (0,580 + 24,47\, d^2 + 0,3548\, Q)$$

und für getheerte Seile:

$$S = \frac{d^2}{a} (2,049 + 17,89\, d^2 + 0,2939\, Q)$$

heraus. Z. B. ist bei einem ungetheerten Seile, für $d = \frac{3}{4}$ Zoll, $a = \frac{5}{2}$ Zoll und $Q = 350$ Pfund:

$$S = \frac{9 \,.\, 2}{16 \,.\, 5} \left(0,580 + 24,47 \cdot \frac{9}{16} + 0,3548 \,.\, 350\right)$$

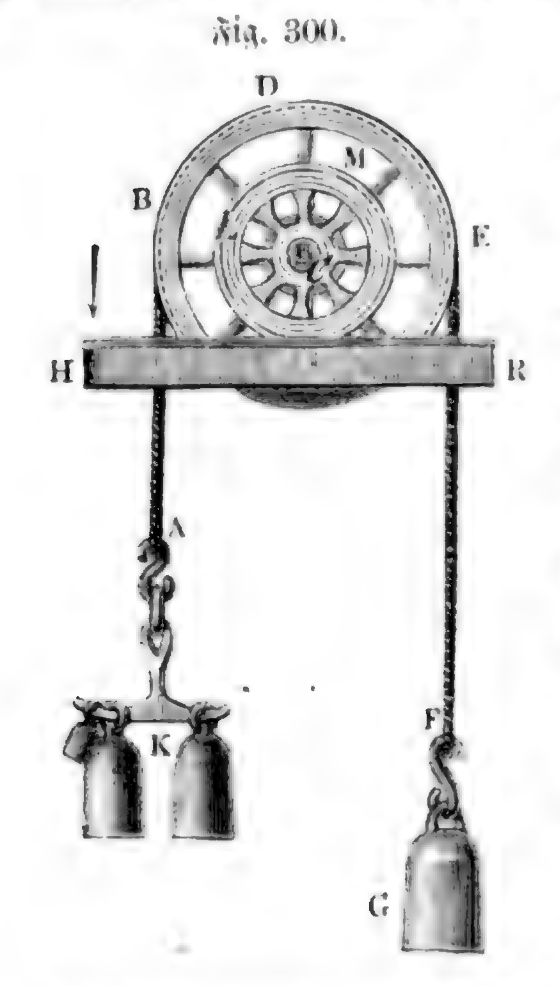
$$= \frac{9}{40} (0,580 + 13,77 + 124,180) = 31,2 \text{ Pfund}.$$

Die Prony'sche Formel gab im letzten Beispiele $S = 28,6$ Pfund.

§. 198 **Versuche über die Steifigkeit starker Seile.** Der Verfasser hat sich bei seinen Versuchen über die Steifigkeit der Seile eines in Fig. 300

abgebildeten Apparates bedient. Die Scheibe oder Rolle $BDE$, auf welche sich das zu untersuchende Seil $ABDEF$ auflegte, war mit einem Paar eiserner Räder, wie $CLM$, auf einer Welle $C$ befestigt, und dieses Räderpaar stand auf einer horizontalen Schienenbahn $HR$. Nachdem man das eine Seilende $F$ durch ein angehängtes Gewicht $G$ gespannt hatte, hing man an das Kreuz $K$, welches am anderen Seilende $A$ befestigt war, so viel Gewichte, bis das Räderpaar sammt der Scheibe und ihren Gewichten langsam fortzurollen anfing. Um sich von den Unvollkommenheiten des Apparates möglichst unabhängig zu machen, wurde nachher auf der Seite bei $F$ so viel Gewicht zugelegt, bis auch das Fortrollen des armirten Räderpaares nach der entgegengesetzten Richtung eintrat. Das arithmetische Mittel von den Zulagen gab nun, nachdem man hiervon noch die wälzende Reibung abgezogen hatte, die Kraft zur Ueberwindung der Seilsteifigkeit.

Fig. 300.




Den Coefficienten der in Abzug zu bringenden rollenden Reibung ermittelte man auf dieselbe Weise, indem man statt des Seiles einen schwachen Bindfaden, dessen Steifigkeitswiderstand vernachlässigt werden konnte, auflegte. Der mittlere Werth dieses Coefficienten ist oben, §. 192, mitgetheilt worden.

Der Steifigkeitswiderstand besteht nach des Verfassers Ansicht weniger aus der Steifigkeit, als aus der Reibung der einzelnen Fäden oder Drähte, die natürlich beim Auflegen auf die Rolle ihre gegenseitige Lage ändern müssen. Der erste Theil dieses Widerstandes fällt beim Umlegen eines Drahtseiles um eine Leitrolle ganz aus, weil dieses Seil vermöge seiner Elasticität beim Abwickeln zum Wiedergeradestrecken genau so viel Arbeit ausgiebt, als es beim Aufwickeln zum Krümmen in Anspruch genommen hat. Hier besteht also der Steifigkeitswiderstand lediglich in der Reibung der einzelnen Drähte unter einander, und daß dem so sei, zeigen auch die Versuche des Verfassers, durch welche sich ergeben hat, daß dieser Widerstand bei eingeölten oder frisch getheerten Drahtseilen um 40 Procent kleiner ist als bei trockenen. Bei Hanfseilen ist das Verhältniß ein anderes, denn da diese, zumal nach längerem Gebrauche, fast gar keine Elasticität besitzen, so erfordern die einzelnen Fäden und Litzen derselben nicht allein Kraft zum Krümmen, sondern auch Kraft zum Wiedergeradestrecken.

§. 199 **Neue Formel für den Steifigkeitswiderstand.** Da die Steifigkeit eines Seiles nicht allein von der Seilstärke, sondern auch von der Stärke der Drehung und von der Zusammensetzungsweise desselben abhängt, so hält es der Verfasser für angemessen, dieselbe durch die einfachere Formel:

$$S = \frac{K + \nu Q}{a}$$

auszudrücken und die Constanten $K$ und $\nu$ für jede Seilart besonders zu bestimmen. Auch hat sich aus den Versuchen des Verfassers ergeben, daß sich, zumal für die Drahtseile, angemessener statt $\frac{K}{a}$, bloß $K$, und demnach

$$S = K + \frac{\nu Q}{a} \text{ setzen läßt.}$$

1. Für ein getheertes Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fuß Höhe, ergab sich der Steifigkeitswiderstand:

$$S = 1{,}5 + 0{,}00565 \frac{Q}{a} \text{ Kilogramm,}$$

wobei der Rollenhalbmesser $a$ in Metern auszudrücken ist, oder

$$S = 3{,}0 + 0{,}216 \frac{Q}{a} \text{ Pfund,}$$

wo $a$ in Zollen gegeben sein muß.

2. Für ein neues ungetheertes Hanfseil von $^3/_4$ Zoll Stärke und eine Rolle von 21 Zoll Durchmesser ergab sich:

$$S = 0{,}086 + 0{,}00164 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 0{,}17 + 0{,}0625 \frac{Q}{a} \text{ Pfund.}$$

3. Für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1^1/_2$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fuß 0,64 Pfund wog, wurde bei Rollen von 4 bis 6 Fuß Höhe,

$$S = 0{,}49 + 0{,}00238 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 0{,}98 + 0{,}0910 \frac{Q}{a} \text{ Pfund}$$

gefunden.

4. Für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus 4 . 4 = 16 Drähten von je $1^1/_5$ Linien Dicke, und pr. Fuß 0,63 Pfund wiegend, stellte sich bei einer Rolle von 21 Zoll Durchmesser,

$$S = 0{,}57 + 0{,}000694 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 1{,}14 + 0{,}00264 \frac{Q}{a} \text{ Pfund}$$

heraus.

Anmerkung. Eine ausführliche Beschreibung der Versuche des Verfassers findet man in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann, Brückmann und Röting, Band I. Freiberg 1848.

Die Hanfseile unter 1. wurden in Freiberg zum Fördern durch Wassergöpel an-

gewendet, sind aber in den neueren Zeiten durch die Drahtseile unter 3. und 4. ersetzt werden. Beiderlei Seile haben bei sechsfacher Sicherheit eine Tragkraft von circa 30 Centnern. Es ist aus dem Vorstehenden zu ersehen, daß bei gleicher Tragkraft der Steifigkeitswiderstand bei Drahtseilen viel kleiner ist als bei Hanfseilen. Nimmt man z. B. die Seilspannung $Q = 2000$ Pfund und den Rollenhalbmesser $a = 40$ Zoll an, so erhält man den Steifigkeitswiderstand für ein Hanfseil:

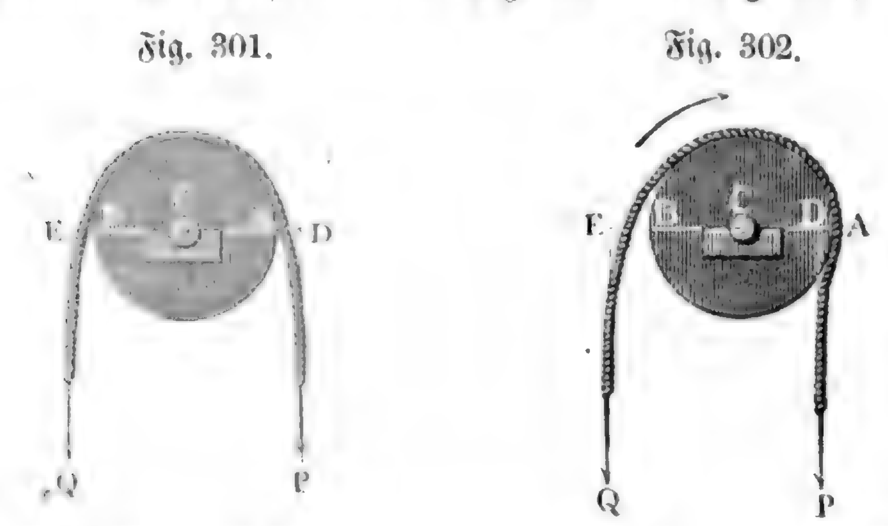
$$S = 3,0 + 0,216 \, . \, {}^{2000}/_{40} = 13,8 \text{ Pfund},$$

und dagegen für ein Drahtseil:

$$S = 0,98 + 0,0910 \, . \, {}^{2000}/_{40} = 5,5 \text{ Pfund}.$$

**Theorie der Leitrolle.** Wenden wir nun die im Vorstehenden mitgetheilten Formeln für den Steifigkeitswiderstand der Seile auf die Theorie der festen Rollen an. Es sei $ACB$, Fig. 301 oder Fig. 302, die Rolle, $a$ §. 200

Fig. 301. Fig. 302.




der Halbmesser $CA = CB$, $r$ der Zapfenhalbmesser und $G$ das Gewicht derselben, ferner $d$ die Seilstärke, $Q$ die an einem Seilende angehängte Last, $S$ der Steifigkeitswiderstand, $F$ die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung, und folglich $Q + F + S$ die ganze Kraft $P$.

Die Steifigkeit des Seiles äußert sich dadurch, daß das Stil beim Aufwickeln nicht plötzlich die Krümmung des Rollenumfanges annimmt und sich ebenso beim Abwickeln nicht plötzlich gerade streckt, sondern in einem Bogen mit wachsender Krümmung sich auf die Rolle auflegt, und sich in einem Bogen mit abnehmender Krümmung von derselben wieder abwickelt. Zwischen den elastischen Drahtseilen und den unelastischen Hanfseilen findet der Unterschied statt, daß sich jene beim Abwickeln etwas eher, und diese etwas später von dem Rollenumfange ablösen, folglich der Hebelarm $CD$ der Kraft im ersten Falle (Fig. 301) etwas größer, und im zweiten Falle (Fig. 302) etwas kleiner als der Halbmesser $CA = a$ der Rolle ist, wogegen der Lastarm $CE$ in beiden Fällen den Rollenhalbmesser $a$ übertrifft. Wenn man von der Zapfenreibung $F$ absieht, also $P = Q + S$ setzt, so hat man

$$(Q + S) \, . \, \overline{CD} = Q \, . \, \overline{CE},$$

daher den Steifigkeitswiderstand:

$$S = \left(\frac{CE - CD}{CD}\right) Q = \left(\frac{CE}{CD} - 1\right) Q,$$

und das Hebelarmverhältniß:

$$\frac{CE}{CD} = 1 + \frac{S}{Q};$$

was sich nun durch Einsetzen eines der oben angegebenen Werthe für $S$ leicht berechnen läßt.

Wir können übrigens auch ohne weitere Berücksichtigung dieses Hebelarmverhältnisses die Kraft $P = Q + S + F$ bestimmen, wenn wir in diesem Ausdrucke für schwache Hanfseile nach Prony

$$S = \frac{d^n}{a} (K + \nu Q),$$

dagegen für Draht- und starke Hanfseile nach dem Verfasser

$$S = K + \frac{\nu Q}{a},$$

und die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung

$F = \varphi \frac{r}{a} (Q + G + P)$ oder annähernd $F = \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G)$ setzen.

Es folgt so im ersten Falle:

$$P = Q + \frac{d^n}{a} (K + \nu Q) + \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G),$$

und im zweiten:

$$P = Q + K + \frac{\nu Q}{a} + \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G).$$

Bei einer Radwelle ist natürlich noch eine Reduction der Kraft vom Wellenumfange auf den Radumfang nöthig (s. §. 165).

Beispiel. Wenn sich ein Drahtseil von ungefähr 8 Linien Dicke um eine Leitrolle von 5 Fuß Höhe, 3 Zoll Zapfenstärke und 1500 Pfund Gewicht legt, und die Spannung des Seiles 1200 Pfund beträgt, so hat man bei dem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$, die nöthige Kraft:

$$P = 1200 + 0{,}98 + 0{,}091 \cdot {}^{1200}/_{30} + 0{,}075 \cdot {}^{3}/_{60} (2400 + 1500)$$
$$= 1200 + 0{,}98 + 3{,}64 + 14{,}62 = 1219 \text{ Pfund};$$

es geht also durch das Umlegen um diese Leitrolle ${}^{19}/_{12} = 1{,}6$ Procent an Kraft verloren.

Wenn statt des Drahtseiles ein Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke in Anwendung gekommen wäre, so hätte man:

$$P = 1200 + 3{,}0 + 0{,}216 \cdot {}^{1200}/_{30} + 14{,}62 = 1226{,}3 \text{ Pfund}$$

und daher den Kraftverlust:

$$P - Q = \frac{26{,}3}{12} = 2{,}2 \text{ Procent.}$$

## Vierter Abschnitt.

# Die Anwendung der Statik auf die Elasticität und Festigkeit der Körper.

---

## Erstes Capitel.

### Die Zug-, Druck- und Schub-Elasticität und Festigkeit.

**Elasticität.** Die Moleküle oder Theile eines festen oder starren Körpers §. 201 hängen mit einer gewissen Kraft, der sogenannten Cohäsion (franz. cohésion; engl. cohesion), unter einander zusammen, welche zu überwinden ist, wenn Körper in ihrer Gestalt und Größe verändert oder gar zertheilt werden. Die erste Wirkung, welche Kräfte in einem Körper hervorbringen, ist eine Veränderung in der Lage seiner Theile gegen einander und eine daraus erwachsende Form- und Volumenveränderung des Körpers. Ueberschreiten die auf einen Körper wirkenden Kräfte eine gewisse Grenze, so tritt endlich eine Trennung der Theile und nach Befinden eine Zertheilung des ganzen Körpers ein. Die Fähigkeit der Körper, die durch Einwirkung von Kräften erlittene Formveränderung nach Wegnahme dieser Kräfte vollständig wieder aufzuheben, heißt Elasticität (franz. élasticité; engl. elasticity) im weiteren Sinne des Wortes. Die Elasticität eines jeden Körpers hat eine gewisse Grenze; überschreitet die Gestalts- oder Volumenveränderung ein gewisses Maß, so bleibt im Körper noch eine solche räumliche Veränderung zurück, wenn auch die Kräfte, welche jene Veränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören. Die Elasticitätsgrenze ist bei verschiedenen Körpern sehr verschieden. Körper, welche eine große Formveränderung zulassen, ehe diese Grenze eintritt, nennt man vollkommen elastische, Körper aber, bei welchen kaum bemerkbare Formveränderungen der Elasticitätsgrenze vorausgehen, heißen unelastische, wiewohl es in Wirklichkeit Körper dieser Art gar nicht giebt.

Es ist eine wichtige Regel der Architektur und des Maschinenwesens, die zum Bau zu verwendenden Körper nicht so stark zu belasten, daß die hervorgebrachten Formveränderungen die Elasticitätsgrenze erreichen oder gar überschreiten.

§. 202 **Elasticität und Festigkeit.** Verschiedene Körper bieten verschiedene Erscheinungen dar, wenn sie über die Elasticitätsgrenze hinaus in ihrer Form verändert werden. Ist ein Körper spröde (franz. cassant; engl. brittle), so zerspringt er in Stücke, wenn man seine Form über die Elasticitätsgrenze hinaus verändert; ist er aber geschmeidig (franz. und engl. ductile), wie z. B. viele Metalle, so läßt er noch bedeutende Veränderungen der Form außerhalb der Elasticitätsgrenze zu, ohne eine Trennung seiner Theile zu erleiden. Manche Körper sind hart (franz. dur; engl. hard), andere weich (franz. mou; engl. soft); während jene der Trennung einzelner Theile einen großen Widerstand entgegensetzen, ist bei diesen eine Trennung der einzelnen Theile sehr leicht ausführbar.

Unter Elasticität im engeren Sinne des Wortes verstehen wir den Widerstand, mit welchem ein Körper der Formveränderung entgegenwirkt, dagegen unter Festigkeit (franz. résistance; engl. strength) den Widerstand, welchen ein Körper der Zertheilung desselben entgegensetzt. Mit Beidem werden wir uns im Folgenden beschäftigen.

Nach der Art und Weise, wie äußere Kräfte auf Körper wirken und dieselben in räumlichen Beziehungen verändern, läßt sich die Elasticität und Festigkeit der Körper eintheilen:

I. in einfache und
II. in zusammengesetzte;

erstere aber wieder

1) in die absolute oder Zug-, und
2) in die rückwirkende oder Druck-Elasticität und Festigkeit, sowie
3) in die relative oder Biegungs-,
4) in die Schub- oder Scheer-, und
5) in die Torsions- oder Drehungs-Elasticität und Festigkeit.

Wirken zwei äußere Kräfte $P$, $-P$ durch Zug (franz. traction; engl. extension) in der Axenrichtung eines Körpers $AB$, Fig. 303, so widersteht derselbe durch seine Zug- oder absolute Elasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance de traction; engl. elasticity and strength of extension) dem Ausdehnen und Zerreißen; wirken dagegen zwei Kräfte $P$, $-P$ drückend

Fig. 303.



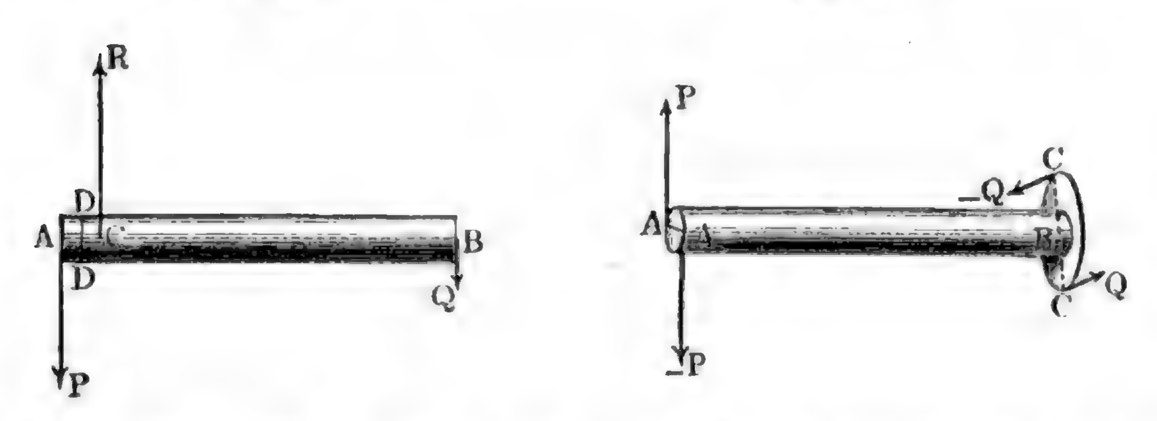
in der Axenrichtung eines Körpers $AB$, Fig. 304, so daß dieser zusammengedrückt und endlich zermalmt oder zerdrückt wird, so hat man die **Druck- oder rückwirkende Elasticität und Festigkeit** (franz. élasticité et résistance de compression; engl. elasticity and strength of compression) zu überwinden.

Fig. 304.

Wenn ferner drei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte $P$, $Q$, $R$ verschiedene Punkte $A$, $B$, $C$ in der Axe eines Körpers $AB$, Fig. 305, ergreifen und rechtwinkelig gegen diese Axe wirken, so wird dieser Körper gebogen und nach Befinden zerbrochen, und es ist die **Biegungs- oder relative Elasticität und Festigkeit** (franz. élasticité et résistance de flexion; engl. elasticity and strength of flexure) des Körpers, welche bei diesem Umbiegen und Abbrechen überwunden wird.

Liegen im letzteren Falle die Angriffspunkte $A$ und $C$ der Kräfte $P$ und $R$ sehr nahe an einander, wie Fig. 305 darstellt, so tritt in dem Querschnitt

Fig. 305. Fig. 306.



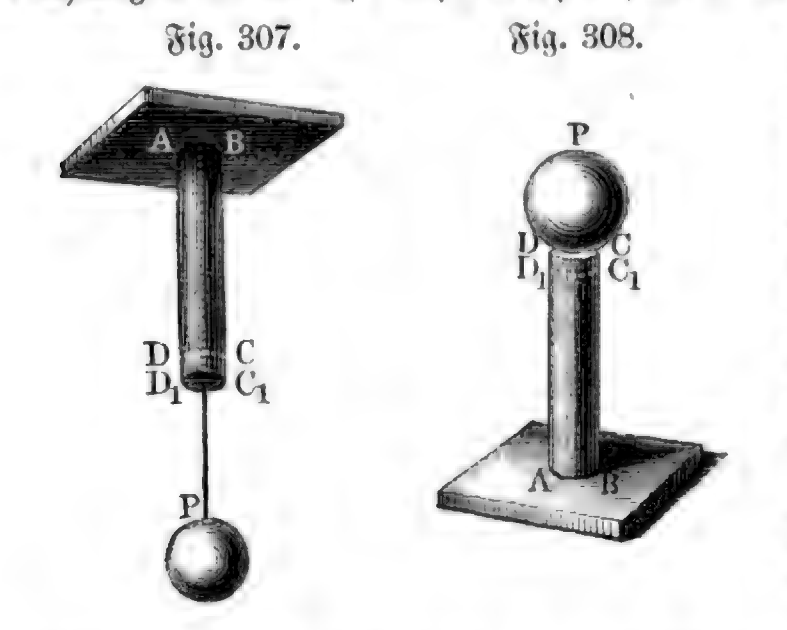

$DD$ zwischen beiden Punkten $A$ und $C$ eine **Verschiebung**, und bei hinreichender Größe von $P$ eine Zertrennung des Körpers in zwei Theile ein, und man hat es dann mit der **Elasticität und Festigkeit des Abscheerens** (franz. élasticité et résistance par glissement cisaillement ou tranchant; engl. elasticity and strength of shearing) zu thun.

Wirken endlich zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräftepaare $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ so auf einen Körper $CD$, Fig. 306, daß deren Ebenen rechtwinkelig auf der Axe dieses Körpers stehen, so erleidet der Körper eine Drehung, welche zuletzt in ein **Abwürgen** übergehen kann, und es ist hierbei die sogenannte **Drehungselasticität und Festigkeit** (franz. élasticité et résistance de torsion; engl. elasticity and strength of torsion) zu überwinden.

Wirken mehrere der hier aufgezählten Kräfte auf einen Körper zugleich, so tritt die **zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit** oder eine Vereinigung von zwei oder mehreren einfachen Elasticitäten und Festigkeiten in Wirksamkeit.

§. 203 **Ausdehnung und Zusammendrückung.** Den einfachsten Fall der Elasticität und Festigkeit bietet die Ausdehnung und Zusammendrückung prismatischer Körper dar, wenn dieselben von Kräften ergriffen werden, deren Richtungen in die Axe dieser Körper fallen. Es ist natürlich hierbei nicht nöthig, daß beide Kräfte eines solchen Körpers bewegend sind, die Wirkung bleibt dieselbe, wenn der Körper an einem Ende festgehalten oder unterstützt und am anderen Ende von einer Zug- oder Druckkraft ergriffen wird. Man ruft also auch diesen Fall hervor, wenn man entweder ein verticalhängendes Prisma $ABCD$, Fig. 307, durch ein angehängtes Gewicht $P$ oder ein von unten unterstütztes Prisma $ABCD$, Fig. 308, durch ein aufliegendes Gewicht $P$ belastet. Im ersteren Falle wird der Körper um eine gewisse Größe $CC_1 = DD_1 = \lambda$ ausgedehnt, und im zweiten Falle um eine solche Größe zusammengedrückt; ist also anfangs die Länge $AD = BC$ des Körpers $= l$, so wird dieselbe im ersteren Falle auf

Fig. 307. Fig. 308.




$$AD_1 = BC_1 = AD + DD_1 = l + \lambda$$

gesteigert, und im zweiten Falle auf

$$AD_1 = BC_1 = AD - DD_1 = l - \lambda$$

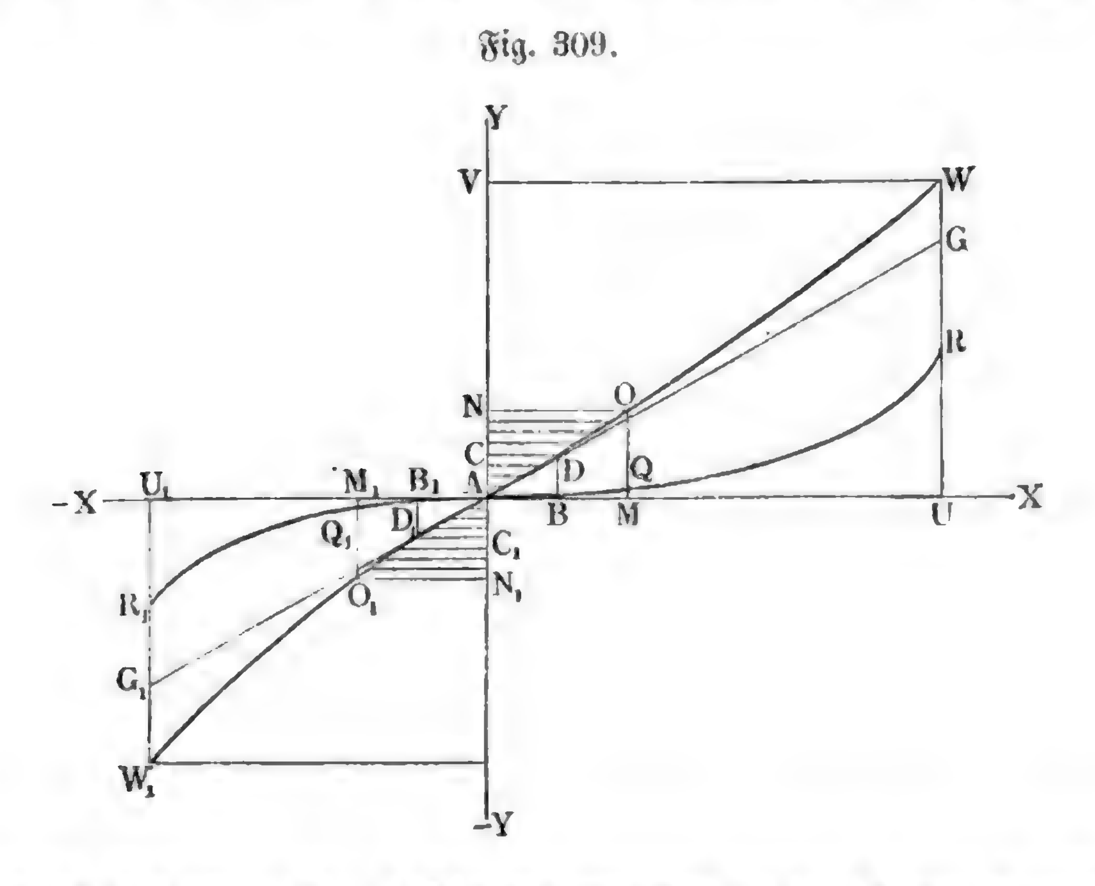
herabgezogen.

Die Ausdehnung oder Zusammendrückung $\lambda$ wächst mit der Größe $P$ der Zug- oder Druckkraft, ist also eine Function derselben. Diese Function oder der algebraische Zusammenhang zwischen $P$ und $\lambda$ läßt sich nicht a priori bestimmen; es hängt derselbe von der physischen Beschaffenheit der Körper ab, und ist bei verschiedenen Materien verschieden. Wenn man $P$ und $\lambda$ als die Coordinaten einer Curve ansieht, und diese Curve aus einer durch Versuche ermittelten Reihe von zusammengehörigen Werthen der Größen $P$ und $\lambda$ construirt, so erhält man dadurch nicht nur ein anschauliches Bild von dem Gesetze, nach welchem Körper durch äußere Kräfte ausgedehnt und zusammengedrückt werden, sondern auch ein Mittel zur Ausmittelung der Eigenthümlichkeiten dieses Gesetzes.

Trägt man vom Anfangspunkte $A$ aus auf der positiven Seite der Axe $X\overline{X}$, Fig. 309, die Spannungen oder Ausdehnungskräfte eines Körpers als Abscissen $AB$, $AM$ u. s. w. und in den Endpunkten derselben die

entsprechenden Ausdehnungen als zur Axe $Y\overline{Y}$ parallel laufende Ordinaten $BD$, $MO$ u. s. w. auf, so erhält man eine Curve $ADOW$, welche das

Fig. 309.




Gesetz der Ausdehnung dieses Körpers repräsentirt; schneidet man umgekehrt, von $A$ aus, auf der negativen Seite der Axe $X\overline{X}$ die Pressungen oder Zusammendrückungskräfte als Abscissen $AB_1$, $AM_1$ u. s. w. ab, und trägt an denselben die entsprechenden Zusammendrückungen als Ordinaten $B_1D_1$, $M_1O_1$ u. s. w. auf, so ergiebt sich eine Curve $AD_1O_1W_1$, durch welche das Gesetz der Zusammendrückung des Körpers graphisch dargestellt wird. Vielfachen Versuchen zufolge gehen beide Curven stetig in einander über, haben folglich in $A$ eine gemeinschaftliche Tangente $GAG_1$, und sind also eigentlich nur Zweige einer und derselben krummen Linie $WODAD_1O_1W_1$. Wenn auch diese Curve in ihrer ganzen Erstreckung bedeutend von einer geraden Linie abweicht, so wird sie doch in der Nähe des Anfangspunktes $A$ mit der Tangente $GAG_1$ nahe zusammenfallen, und da nun für diese die Ordinaten den Abscissen proportional sind, so ist folglich auch anzunehmen, daß die durch kleine Zug- oder Druckkräfte $AB$, $AB_1$ u. s. w. bewirkten Ausdehnungen und Zusammendrückungen $BD$, $B_1D_1$ u. s. w. diesen Kräften proportional sind (Hooke's Gesetz).

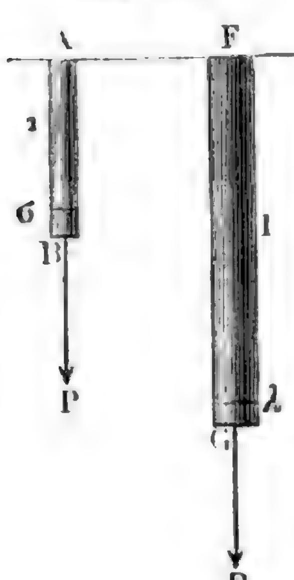
Die durch eine Zugkraft $AM$ bewirkte totale Ausdehnung $MO$ besteht aus zwei Theilen, nämlich aus der permanenten Ausdehnung $MQ$, welche im Körper zurückbleibt, wenn die Spannkraft zu wirken aufgehört hat, und aus der elastischen Ausdehnung $QO$, welche mit der Spannkraft zugleich wieder verschwindet. Ganz dasselbe Verhältniß findet

auch bei dem Zusammendrücken statt; auch die **totale Zusammendrückung** $M_1 O_1$ ist die Summe $M_1 Q_1 + Q_1 O_1$ aus der **permanenten Zusammendrückung** $M_1 Q_1$ und der **elastischen** $Q_1 O_1$. Bei kleineren Kräften sind die permanenten Veränderungen in Hinsicht auf die totale so klein, daß sie als gar nicht vorhanden angenommen und folglich die totalen Ausdehnungen und Zusammendrückungen nur als elastische angesehen werden können. Nur dann, wenn die Kraft einen gewissen Werth $AB$ ($AB_1$), die sogenannte **Elasticitätsgrenze**, überschreitet, wenn sie z. B. in $AM$ ($AM_1$) übergeht, macht die permanente Längenveränderung $MQ$ ($M_1 Q_1$) einen beachtungswerthen Theil der ganzen Ausdehnung $MO$ oder Zusammendrückung $M_1 O_1$ aus. Hat die Zug- oder Druckkraft einen gewissen Werth $AU$ oder $AU_1$ erreicht, so sind die Ausdehnungen $UR$, $UW$ oder Zusammendrückungen $U_1 R_1$, $U_1 W_1$ bei ihren Grenzen angelangt, wobei die innere oder Cohäsionskraft des Körpers der äußeren Zug- oder Druckkraft nicht mehr das Gleichgewicht zu halten vermag, und daher der Körper in dem einen Falle **zerrissen** und im anderen Falle **zerdrückt** wird.

Wenn man nach Wegnahme der Kraft eines höchstens bis zur Elasticitätsgrenze gespannten Körpers diesen Körper durch eine kleinere Kraft von neuem spannt, so erleidet er dadurch **keine weitere Streckung** oder permanente Längenveränderung; es findet also dann nur noch eine elastische Ausdehnung oder Zusammendrückung statt.

§. 204 **Grundgesetz der Elasticität. Elasticitätsmodul.** Die durch eine Zugkraft $P$ bewirkte Verlängerung oder Ausdehnung $\lambda$ eines prismatischen Körpers ist erstens der Länge $l$ des Körpers proportional, da sich annehmen läßt, daß sich gleich lange Stücke um gleich viel ausdehnen, und sie steht zweitens im umgekehrten Verhältnisse zum Querschnitte $F$ des Körpers, da sich voraussetzen läßt, daß sich die ganze Spannkraft auf den Querschnitt des Körpers gleichmäßig vertheilt.

Fig. 310.




Wird daher ein Körper $AB$, Fig. 310, von der Länge = Eins und vom Querschnitte = Eins, durch eine Kraft $P$ um $\sigma$ ausgedehnt, so ist daher für einen anderen Körper $FG$ aus gleichem Stoffe, dessen Länge = $l$ und Querschnitt = $F$ ist, die durch dieselbe Kraft bewirkte Ausdehnung:

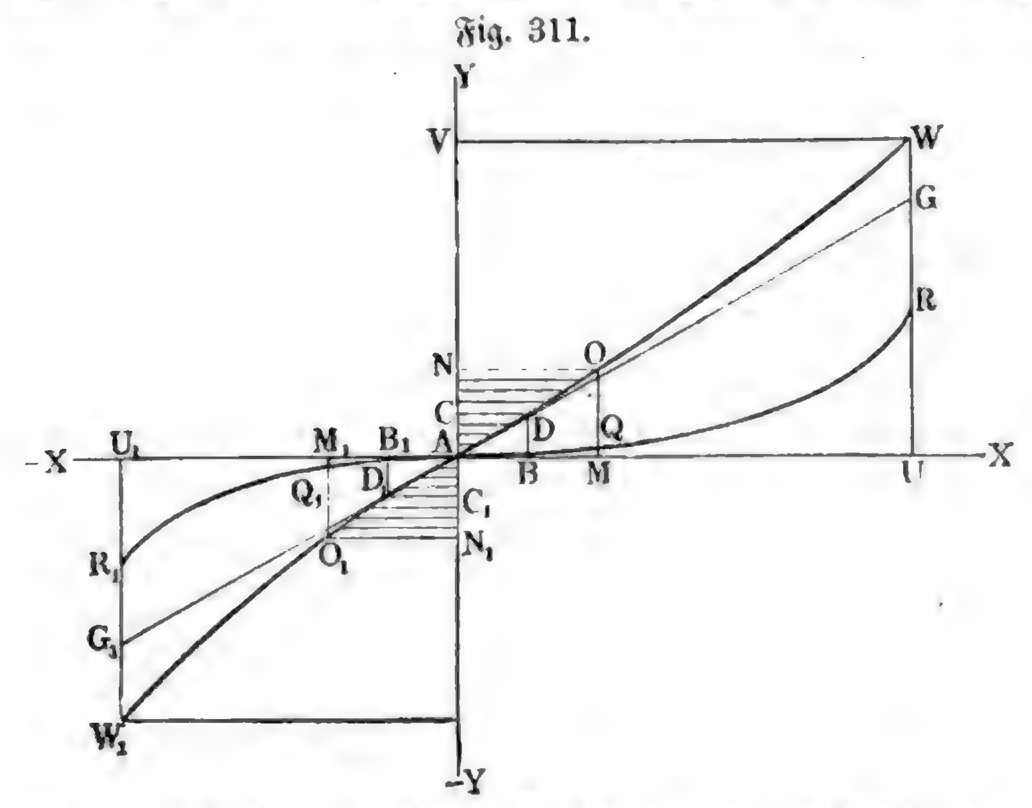
$$\lambda = \frac{\sigma l}{F}.$$

Die Ausdehnung $\sigma$ ist natürlich bloß von der Zugkraft $P$ abhängig und für Prismen von verschiedenen Materien verschieden; jedoch läßt sich dem Obigen (§. 203) zufolge annehmen, daß bei kleinen, die

Elasticitätsgrenze nicht überschreitenden Zugkräften die Ausdehnungen den entsprechenden Zugkräften proportional wachsen, daß also der Quotient $\frac{\sigma}{P}$ eine constante Zahl ist.

Repräsentirt nun $AB$, Fig. 311, die Spannung $P$ eines Prismas von der Länge = Eins und dem Querschnitte = Eins innerhalb der Elastici-

Fig. 311.




tätsgrenze und $BD$ die entsprechende Ausdehnung $\sigma$, und bezeichnet man den Tangentenwinkel $GAU = DAB$ der Ausdehnungscurve für den Anfangspunkt $A$ durch $\alpha$, so hat man auch:

$$tang.\,\alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{\sigma}{P}, \text{ und daher:}$$

$$\sigma = P\, tang.\,\alpha, \text{ woraus nun}$$

$$1)\quad \lambda = \frac{Pl\, tang.\,\alpha}{F} \text{ folgt.}$$

Die Größe $tang.\,\alpha$ ist von den physischen Eigenschaften des Körpers abhängig, und jedenfalls nur durch Versuche zu ermitteln. Nimmt man

$$l = 1,\ F = 1 \text{ und } P = 1,$$

so erhält man $tang.\,\alpha = \lambda$; es ist also hiernach die Erfahrungsgröße $tang.\,\alpha$ die Ausdehnung, welche ein Prisma von der Länge Eins und vom Querschnitte Eins durch die Spannkraft Eins erleidet (siehe Combes: Traité de l'exploitation des mines, tome I.). Nimmt man in der Formel (1) $F =$ Eins und $\lambda = l$ an, so erhält man den Ausdruck:

$$1 = P\, tang.\,\alpha, \text{ oder } \frac{1}{tang.\,\alpha} = cotang.\,\alpha = P.$$

Es ist also hiernach $\frac{1}{tang.\,\alpha}$ diejenige Spannkraft $P$, welche ein Prisma vom Querschnitte Eins (1 Quadratzoll) um seine eigene Länge ausdehnen würde, insofern dies ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre.

Diese hypothetische Erfahrungsgröße $\frac{1}{tang.\,\alpha} = cotang.\,\alpha$ wird der Elasticitätsmodul (franz. coefficient d'élasticité; engl. modul of elasticity) des Körpers oder der Materie desselben genannt und in der Folge durch den Buchstaben $E$ bezeichnet. Es ist also hiernach:

$$2)\quad \lambda = \frac{Pl}{FE}$$

oder die relative Ausdehnung, d. h. ihr Verhältniß zur ganzen Länge des Körpers:

$$3)\quad \frac{\lambda}{l} = \frac{P}{FE},$$

also umgekehrt, die der Ausdehnung $\lambda$ entsprechende Kraft:

$$4)\quad P = \frac{\lambda}{l} FE.$$

Dieselben Formeln gelten natürlich auch für die Zusammendrückung $\lambda$ durch eine Druckkraft $P$, und es ist in diesem Falle sogar auch der Elasticitätsmodul $E = cotang.\,\alpha$ derselbe wie bei der Ausdehnung, so lange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, obgleich er hier diejenige Druckkraft bezeichnet, welche ein Prisma vom Querschnitte Eins um seine ganze Länge, also bis auf eine unendlich dünne Platte zusammendrückt, unter der Voraussetzung, daß dies möglich wäre, ohne die Grenze der Elasticität zu überschreiten.

Anmerkung 1. Man kann auch den Elasticitätsmodul $E$ gleichsetzen dem Gewichte eines Prismas, welches mit dem Körper, auf den $E$ wirkt, aus einerlei Materie besteht, und denselben Querschnitt Eins hat. Ist $a$ die Länge dieses Körpers und $\gamma$ die Dichtigkeit oder das Gewicht von 1 Cubikzoll der Materie desselben, so hat man:

$$E = a\gamma, \text{ und daher umgekehrt } a = \frac{E}{\gamma}.$$

Diese Länge gebraucht Tredgold (nach Young) als Maß der Elasticität (s. T. Tredgold, über die Stärke des Gußeisens und anderer Metalle). Ist z. B. für Stahl $E = 30'000000$ Pfund und $\gamma = 0,3$ Pfund, so hat man:

$$a = \frac{30'000000}{0,3} = 100'000000 \text{ Zoll},$$

d. i. eine Stahlstange von 100 Millionen Zoll Länge würde einen Stahlstab von demselben Querschnitt um seine eigene Länge ausdehnen, wenn das oben angegebene Ausdehnungsgesetz ohne Einschränkung richtig wäre.

Anmerkung 2. Bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers findet zugleich eine Querschnittsverminderung statt, die nach Wertheim (s. Compt. rend. T. 26) $^2/_3$ der Längenausdehnung oder Zusammendrückung beträgt. Ist $l$

die anfängliche Länge, $F$ der anfängliche Querschnitt und $V$ das anfängliche Volumen $Fl$ des Körpers, $l_1$ und $F_1$ aber Länge und Querschnitt bei Einwirkung der Zugkraft $P$, so hat man das entsprechende Volumen:

$$V_1 = F_1 l_1 = Fl + F(l_1 - l) - (F - F_1)\, l, \text{ also:}$$

$$V_1 - V = F(l_1 - l) - (F - F_1)\, l,$$

und die relative Volumenveränderung:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{l_1 - l}{l} - \frac{F - F_1}{F}.$$

Nun ist aber $\frac{F - F_1}{F} = \frac{2}{3}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right)$, daher folgt:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{1}{3}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right),$$

d. i. die Volumenvergrößerung ein Drittel der Längenausdehnung.

Nach Poisson's Theorie ist sogar $\frac{V_1 - V}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right)$.

Beispiele. 1) Wenn der Elasticitätsmodul des Messingdrahtes 1'3500000 Pfund beträgt, welche Kraft ist nöthig, um einen Draht von 10 Fuß Länge und 2 Linien Dicke 1 Linie länger zu ziehen? Es ist:

$$l = 10 \,.\, 12 = 120 \text{ Zoll}, \; \lambda = \tfrac{1}{12} \text{ Zoll, folglich } \frac{\lambda}{l} = \tfrac{1}{1440};$$

ferner $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854\, (\tfrac{2}{12})^2 = 0{,}0218$ Quadratzoll,

demnach die gesuchte Kraft:

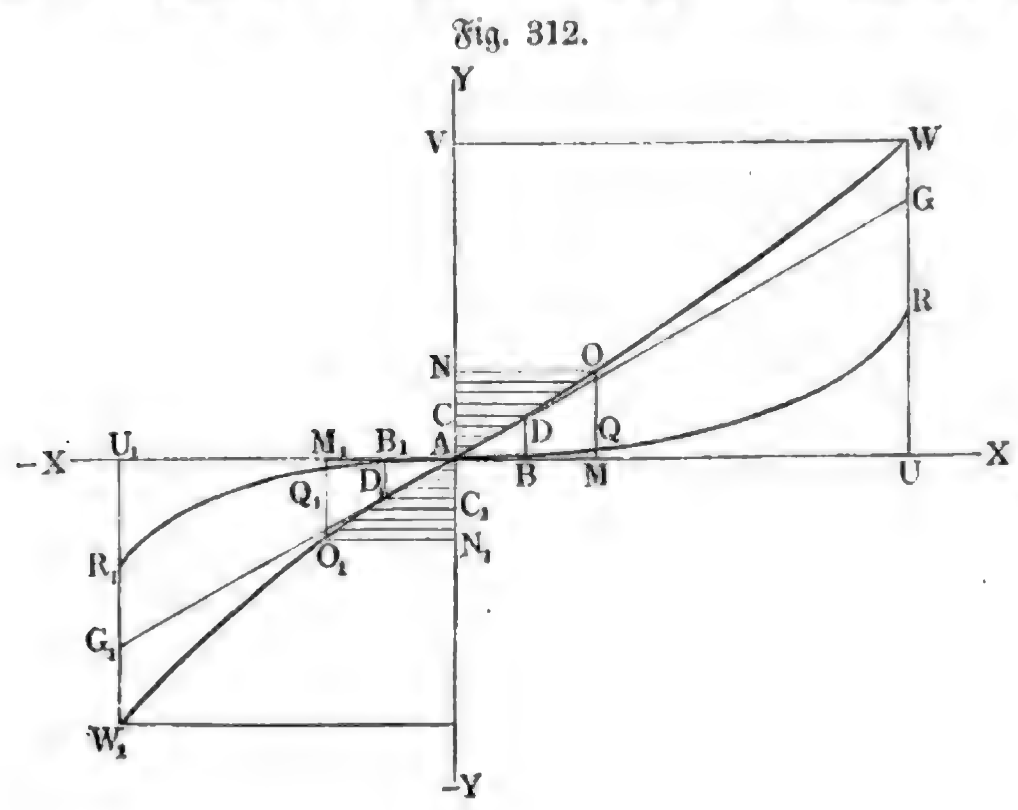
$$P = \tfrac{1}{1440} \,.\, 0{,}0218 \,.\, 1'3500000 = 204 \text{ Pfund}.$$

2) Ist der Elasticitätsmodul von Eisendraht 30'000000 Pfund, und spannt man eine eiserne Meßkette von 60 Fuß Länge und 0,2 Zoll Dicke mit 150 Pfund Kraft an, so nimmt dieselbe um die Länge

$$\lambda = \frac{150}{0{,}7854 \,.\, (0{,}2)^2} \cdot \frac{60 \,.\, 12}{30000000} = \frac{3600}{31416} = 0{,}115 \text{ Zoll} = 1{,}38 \text{ Linien zu.}$$

**Tragvermögen der Körper. — Tragmodul und Festigkeitsmodul.** §. 205 Die Zugkraft $AB$, Fig. 312, welche einen prismatischen Körper

Fig. 312.



vom Querschnitte Eins bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt, heißt der Tragmodul des Körpers in Hinsicht auf Ausdehnung, und soll in der Folge durch $T$ bezeichnet werden, wogegen die Druckkraft $AB_1$, welche denselben bis zur Grenze der Elasticität zusammendrückt, der Tragmodul des Körpers in Hinsicht auf Zusammendrückung zu nennen und im Folgenden durch $T_1$ zu bezeichnen ist. Aus den Tragmodul $T$ und $T_1$ lassen sich mit Hülfe des Elasticitätsmoduls $E$ auch leicht die Ausdehnung $\sigma$ und Zusammendrückung $\sigma_1$ bei der Elasticitätsgrenze berechnen; denn es ist

$$\frac{\sigma}{1} = \frac{T}{E} \text{ und } \frac{\sigma_1}{1} = \frac{T_1}{E}.$$

Ist $F$ der Querschnitt eines prismatischen Körpers, welchem diese Tragmodel $T$ und $T_1$ zukommen, so hat man das Tragvermögen desselben:

$$1) \begin{cases} \text{für Zug} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = FT \\ \text{und das für Druck} \quad . \quad P_1 = FT_1. \end{cases}$$

Bei Bauausführungen sollen die Körper nie über die Elasticitätsgrenze hinaus belastet werden, also die Belastungen selbst die gefundenen Tragvermögen nicht überschreiten. Deshalb sind denn auch den hierzu verwendeten prismatischen Körpern Querschnitte zu geben, welche durch die Formeln

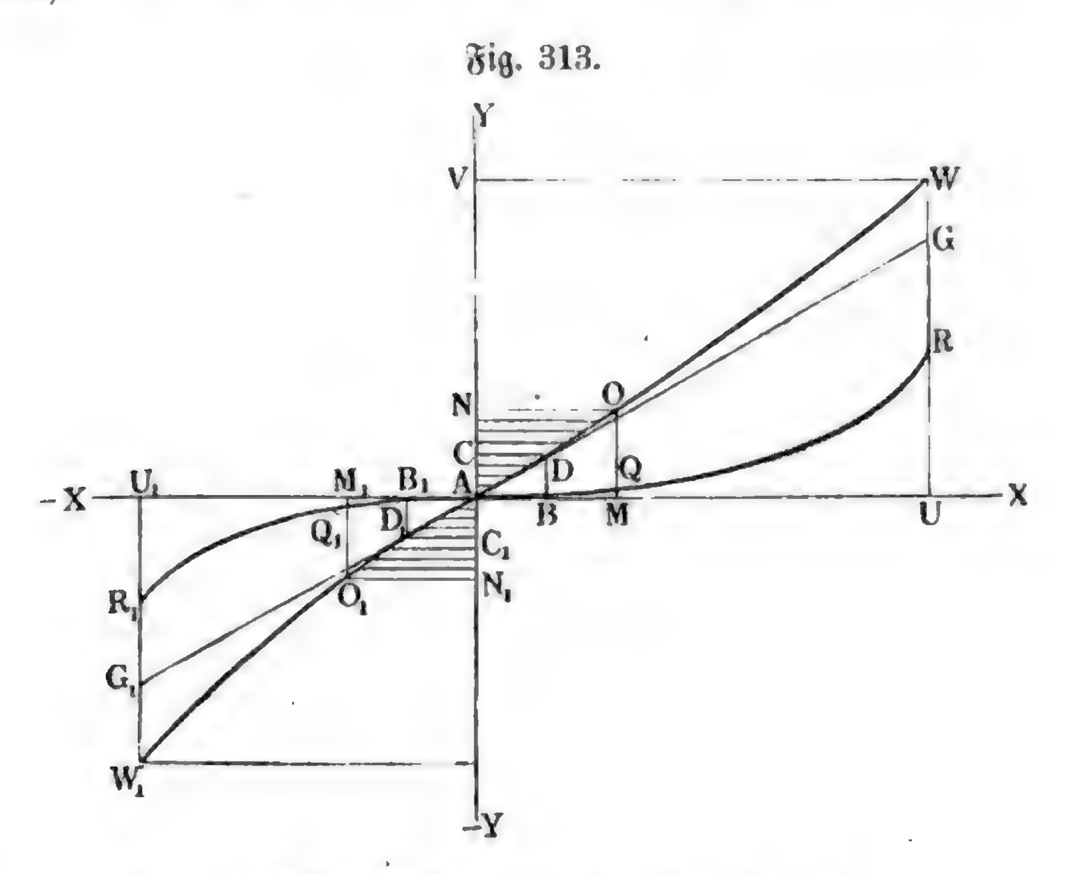
$$2) \begin{cases} F = \frac{P}{T} \text{ und} \\ F_1 = \frac{P_1}{T_1} \text{ bestimmt werden.} \end{cases}$$

Wegen der zufälligen Ueberlastungen und Erschütterungen, welchen die Bau- und Maschinenwerke noch ausgesetzt sein können, sowie wegen der Veränderungen, welchen die zu denselben verwendeten Körper im Laufe der Zeit durch die Einwirkungen der Luft, des Wassers u. s. w. ausgesetzt sind, giebt man diesen Constructionen insofern noch eine größere Sicherheit, daß man in den vorstehenden Formeln statt der Tragmodul nur die Hälfte oder ein Drittel derselben einführt, also die Querschnitte zwei- bis dreimal so groß nimmt als diese Formeln unmittelbar angeben. Um eine $m$fache Sicherheit zu erhalten, sind folglich in den Formeln $F = \frac{P}{T}$ oder $F_1 = \frac{P_1}{T_1}$, statt $T$ oder $T_1$, die Sicherheitsmodel $\frac{T}{m}$ oder $\frac{T_1}{m}$ einzusetzen.

Die Zugkraft $\overline{AU}$ (Fig. 313), bei welcher der prismatische Körper vom Querschnitt Eins zerreißt, heißt der Festigkeitsmodul des Körpers in Hinsicht auf das Zerreißen und wird gewöhnlich mit dem Buchstaben $K$ bezeichnet, und ebenso nennt man die Druckkraft $\overline{AU_1}$, bei welcher das Zerdrücken oder Zermalmen des Körpers eintritt, den Festigkeitsmodul des Körpers in Hinsicht auf das Zerdrücken und bezeichnet ihn durch den

Buchstaben $K_1$. Hat der prismatische Körper den Querschnitt $F$, so ist natürlich:

Fig. 313.




3) $\begin{cases} P = FK \text{ die Kraft zum Zerreißen, und} \\ P_1 = FK_1 \text{ die Kraft zum Zerdrücken dieses Körpers.} \end{cases}$

Noch oft bestimmt man auch die Querschnitte der Körper mit Hülfe der Bruch- oder Festigkeitsmodul, indem man in die Formeln

$$4) \begin{cases} F = \dfrac{P}{K} \text{ und} \\ F = \dfrac{P_1}{K_1} \end{cases}$$

statt $K$ und $K_1$ sogenannte Sicherheitsmodul, d. i. kleine Theile $\frac{K}{n}$ oder $\frac{K_1}{n}$, z. B. Viertel, Sechstel, Zehntel u. s. w. dieser Erfahrungszahlen einsetzt. Wäre der Tragmodul bei allen Stoffen ein und derselbe Theil des Festigkeitsmodul, wären also die Verhältnisse $\frac{AB}{AU} = \frac{T}{K}$ und $\frac{AB_1}{AU_1} = \frac{T_1}{K_1}$ bestimmte Zahlen, so würde die Bestimmung des Querschnittes mittels der Sicherheitsmodel auf Dasselbe führen wie die mittels der Tragmodel; da aber diese Verhältnisse bei verschiedenartigen Körpern verschieden sind, so ist nur diese Bestimmung mittels der Tragmodel $T$ und $T_1$ oder vielmehr mittels der Sicherheitstragmodel $\frac{T}{m}$ und $\frac{T_1}{m}$ die allgemein richtige und

angemessenere und nur dann mittels der Sicherheitsbruchmodel $\frac{K}{n}$ und $\frac{K_1}{n}$ zu rechnen, wenn die Tragmodel nicht bekannt sind.

Ist der Querschnitt des Körpers ein Kreis vom Durchmesser $d$, so hat man $\frac{\pi d^2}{4} = F$, daher $P = \frac{\pi d^2}{4} T = 0{,}7854\, d^2\, T$ und

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{F} = 1{,}128 \sqrt{\frac{P}{T}} \text{ zu setzen,}$$

und es läßt sich hiernach aus der Belastung oder Spannung $P$ eines Körpers und dem Tragmodul $T$ seiner Materie die Stärke finden, bei welcher der Körper nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus angespannt wird.

Beispiele. 1) Welche Last kann eine Hängesäule aus Fichtenholz aufnehmen, wenn dieselbe 5 Zoll breit und 4 Zoll dick ist? Den Tragmodul zu 3000 Pfund und den Querschnitt $F = 5 \,.\, 4 = 20$ Quadratzoll angenommen, erhält man $P = FT = 20 \,.\, 3000 = 60000$ Pfund als Tragkraft dieser Säule. Wird aber der Festigkeitsmodul $K = 10000$ Pfund zu Grunde gelegt und eine vierfache Sicherheit angenommen, so erhält man $P = FK = 20 \,.\, {}^{10000}/_4 = 50000$ Pfd.; um auf lange Zeit Sicherheit zu haben, nimmt man aber für $K$ den zehnten Theil an, und erhält so $P = 20 \,.\, 1000 = 20000$ Pfund.

2) Eine schmiedeeiserne und rund abzudrehende Zugstange soll eine Last von 4500 Pfund aushalten; welchen Durchmesser muß dieselbe erhalten? Hier ist $T = 18000$ Pfund, daher $d = 1{,}128 \sqrt{\frac{4500}{18000}} = 1{,}128 \,.\, \sqrt{{}^9/_{40}} = 0{,}535$ Zoll. Der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens ist für eine Mittelgattung $= 56000$ Pfund; nimmt man aber fünffache Sicherheit, so bekommt man $K = 11200$ Pfund und $d = 1{,}128 \sqrt{\frac{4500}{11200}} = 0{,}715$ Zoll als die gesuchte Stangendicke.

§. 206 **Arbeitsmodul.** Wenn man einen prismatischen Körper durch eine nach und nach von 0 bis $P = AM = NO$ (Fig. 314) wachsende Kraft anspannt und dadurch von Null bis $\lambda = MO = AN$ verlängert, so wird dabei eine gewisse mechanische Arbeit verrichtet, welche, wie (aus §. 72) bekannt, das Product aus dem Wege oder der ganzen Ausdehnung $AN$ und aus dem Mittel der von 0 bis $P = NO$ stetig wachsenden Spannkräften ist, und sich daher auch durch die Fläche $ANO$ ausdrücken läßt, welche der Ausdehnung $AN = \lambda$ als Abscisse, und der Spannkraft $NO = AM = P$ als Ordinate, zukommt. Ueberschreitet diese Ausdehnung nicht die Elasticitätsgrenze, so ist die Fläche $ANO$ als ein rechtwinkeliges Dreieck anzusehen, dessen Katheten $\lambda$ und $P$ sind, und es ist daher die entsprechende mechanische Arbeit:

$$L = {}^1/_2\, \lambda P.$$

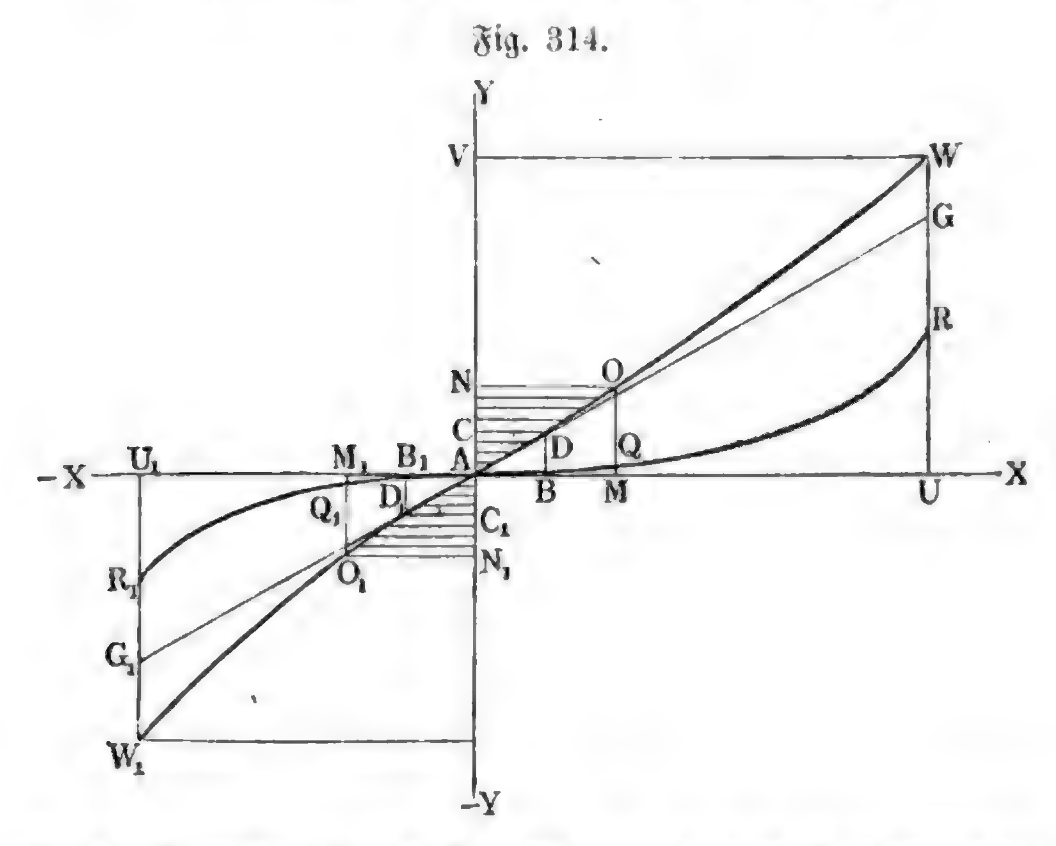
Setzt man hierin:

$$\lambda = \sigma l \text{ und } P = FT,$$

so erhält man die Arbeit zum Ausdehnen $\sigma$ bis zur Elasticitätsgrenze:

$$L = \frac{1}{2}\,\sigma l\,.\,F T = \frac{1}{2}\,\sigma T\,.\,F l = A\,V,$$

Fig. 314.




wenn $V$ das Volumen $Fl$ des Körpers und $A$ eine Erfahrungszahl, den sogenannten Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze für die Ausdehnung bezeichnet, welcher auch durch den Ausdruck

$$A = \frac{1}{2}\,A\,C\,.\,C\,D = \frac{1}{2}\,\sigma T = \frac{1}{2}\,\frac{T^2}{E} = \frac{1}{2}\,\sigma^2 E$$

bestimmt werden kann.

Ebenso ist natürlich auch für die Compression bis zur Elasticitätsgrenze die erforderliche mechanische Arbeit

$$L_1 = V A_1$$

zu setzen, wobei $A_1$ den Arbeitsmodul

$$\frac{1}{2}\,A\,C_1\,.\,C_1\,D_1 = \frac{1}{2}\,\sigma_1\,T_1 = \frac{1}{2}\,\frac{T_1^2}{E} = \frac{1}{2}\,\sigma_1^2\,E$$

der Elasticitätsgrenze für die Zusammendrückung bezeichnet.

Für die mechanische Arbeit zum Zerreißen und zum Zerdrücken des prismatischen Körpers lassen sich gleichgeformte Ausdrücke anwenden; es ist dieselbe für den ersten Fall:

$$L = V B,$$

und für den zweiten:

$$L_1 = V B_1,$$

wenn $B$ = Fläche $A\,U\,W$, den Arbeitsmodul des Zerreißens, und $B_1$ = Fläche $A\,U_1\,W_1$, den Arbeitsmodul des Zerdrückens bedeutet.

Man ersieht aus dem Vorstehenden, daß sowohl die mechanische Arbeit, welche einen prismatischen Körper bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt und comprimirt, als auch diejenige, welche das Zerreißen und Zerdrücken desselben herbeiführt, gar nicht von den einzelnen Dimensionen, sondern nur vom Volumen $V$ des Körpers abhängt, daß also z. B. zwei Prismen aus demselben Material denselben Arbeitsaufwand zum Zerreißen erfordern, wenn das eine doppelt so lang als das andere ist und dagegen sein Querschnitt nur die Hälfte vom Querschnitt des anderen ausmacht.

Beispiel. Wenn der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens $E = 27'000000$ Pfund und die Ausdehnung desselben bei der Elasticitätsgrenze, $\sigma = \frac{1}{1500}$ ist, so beträgt der Tragmodul desselben, da $\sigma = \frac{T}{E}$ ist:

$$T = \sigma E = \frac{27'000000}{1500} = 18000 \text{ Pfund},$$

und folglich der Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze für Ausdehnung:

$$A = \tfrac{1}{2}\sigma T = \frac{T^2}{2E} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 E = \frac{18000}{2.1500} = \frac{18000}{3000} = 6 \text{ Zollpfund}.$$

Um also einen prismatischen Körper aus Schmiedeeisen, dessen Volumen $= V$ ist, bis zur Elasticitätsgränze auszudehnen, ist die mechanische Arbeit

$$L = AV = 6{,}0\, V \text{ Zollpfund}$$

nöthig.

Wäre z. B. der Inhalt dieses Körpers $V = 20$ Cubikzoll, so würde diese Arbeit $L = 6{,}0 . 20 = 120$ Zollpfund $= \frac{120}{12} = 10{,}0$ Fußpfund betragen.

(§. 207) **Ausdehnung durch das eigene Gewicht.** Hat ein prismatischer Körper $AB$, Fig. 315, eine bedeutende Länge $l$, so erleidet er durch sein Gewicht eine namhafte Ausdehnung, welche wie folgt zu bestimmen ist. Bezeichnet $F$ den Querschnitt dieses Körpers, $\gamma$ seine Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikzolles seiner Materie, und $x$ die veränderliche Länge eines Stückes desselben, so besteht die Spannung eines Elementes $MN$ dieses Körpers aus dem Gewichte des darunter befindlichen Körperstückes $BM = \gamma F x$, und es ist folglich [nach §. 204, (2)] die entsprechende Ausdehnung der Länge $MN = \partial x$ dieses Elementes:

Fig. 315.




$$\partial \lambda = \frac{\gamma F x}{FE}\partial x = \frac{\gamma}{E} x \partial x.$$

Durch Integration ergiebt sich nun die Ausdehnung des ganzen Stückes $BM$:

$$\lambda = \frac{\gamma}{E}\int x \partial x = \frac{\gamma x^2}{2E},$$

und folglich die des ganzen Körpers $AB$:

$$\lambda = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{\gamma F l^2}{2FE} = \frac{\frac{1}{2} G}{FE} l,$$

wobei $G = \gamma F l$, das Gewicht des ganzen Körpers bezeichnet.

Wäre dieses Gewicht nicht auf den Körper gleichmäßig vertheilt, sondern am Ende $B$ desselben wirksam, so würde die Ausdehnung

$$\lambda_1 = \frac{Gl}{FE} = 2\lambda$$

betragen.

Es ist also die Ausdehnung des Körpers in Folge seines Gewichtes, $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_1$, nur halb so groß als die, welche ein gleich großes Gewicht am Ende des Körpers hervorbringt.

Dasselbe Gesetz gilt natürlich auch für die Compression $\lambda$ eines Körpers durch sein eigenes Gewicht.

Wirkt in dem einen oder dem anderen Falle an einem Ende des Körpers noch eine besondere Zug- oder Druckkraft $P$, so hat man die entsprechende Ausdehnung oder Compression:

$$\lambda = \frac{Pl}{FE} \pm \frac{1}{2}\frac{Gl}{FE} = \frac{(P \pm \frac{1}{2} G) l}{FE},$$

wobei das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn die Kraft $P$ mit dem Gewichte $G$ in gleicher Richtung, und das untere, wenn sie dem Gewichte entgegengesetzt wirkt. Im letzteren Falle fällt natürlich die Ausdehnung kleiner aus, als wenn $P$ die alleinige Zug- oder Druckkraft wäre. Es ist hier sogar die Gesammtausdehnung oder Zusammendrückung = Null, wenn

$$\tfrac{1}{2} G = P, \text{ oder } G = \gamma F l = 2P, \text{ also}$$

$$l = \frac{2P}{\gamma F}$$

beträgt.

Die Kraft $P$ am Ende eines Körpers dehnt denselben an allen Stellen gleichviel, nämlich im Verhältnisse $\frac{\lambda}{l} = \frac{P}{FE}$ aus, wogegen das Gewicht $G$ im veränderlichen Verhältnisse $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\gamma x}{E}$ ausspannt oder comprimirt. Es ist folglich das totale Ausdehnungsverhältniß an einer Stelle, welche um die Länge $x$ vom Angriffspunkte der Kraft $P$ absteht:

$$\frac{\lambda_1}{l} = \frac{\lambda}{l} \pm \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\frac{P}{F} \pm \gamma x\right)\frac{1}{E}.$$

Wirkt die Kraft $P$ mit $G$ in gleicher Richtung, so ist natürlich das Ausdehnungs- oder Compressionsverhältniß am größten für $x = l$, und zwar:

$$\frac{\lambda_1}{l} = \left(\frac{P}{F} + \gamma l\right)\frac{1}{E} = \frac{P + G}{FE},$$

dagegen am kleinsten, und zwar:

$$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{P}{FE}$$

für $x = 0$, d. i. an der Stelle $B$, wo $P$ angreift.

Wirken $P$ und $G$ in entgegengesetzten Richtungen, so hat man zu unterscheiden, ob $l < \frac{P}{F\gamma}$ oder $> \frac{P}{F\gamma}$, also $G < P$ oder $G > P$ ist. Im ersteren Falle ist das Ausdehnungs- oder Compressionsverhältniß $\frac{\lambda_1}{l} = \left(\frac{P}{F} - \gamma x\right)\frac{1}{E}$ ein Maximum für $x = 0$, und zwar $= \frac{P}{EF}$, und ein Minimum für $x = l$, und zwar $= \left(\frac{P}{F} - \gamma l\right)\frac{1}{E}$. Im letzteren Falle ist es für $x = 0$ ein positives Maximum $\frac{P}{EF}$, und für $x = l$ ein negatives Maximum $\left(\gamma l - \frac{P}{E}\right)\frac{1}{E}$ und es fällt dagegen für $x = \frac{P}{F\gamma}$, Null aus.

Damit der Körper nur bis zur Elasticitätsgrenze gedehnt oder gepreßt werde, darf das Maximum von dem Ausdehnungs- oder Compressionsverhältnisse $\left(\frac{P}{F} \pm \gamma x\right)\frac{1}{E}$ höchstens $= \sigma = \frac{T}{E}$ oder einfacher, das Maximum von $\left(\frac{P}{F} \pm \gamma x\right) = T$ sein. Nun ist aber in dem Falle, wenn $P$ mit $G$ einerlei Richtung hat, dieses Maximum

$$= \frac{P}{F} + \gamma l = \frac{P + \gamma F l}{F} = \frac{P + G}{F},$$

daher ist auch dann $\frac{P + \gamma F l}{F} = T$, oder $P = F\,(T - \gamma l)$ und folglich der entsprechende Querschnitt

$$F = \frac{P}{T - \gamma l};$$

wirken hingegen $P$ und $G$ entgegengesetzt, so hat man dieses Maximum

$$\text{entweder} = \frac{P}{F} \text{ oder} = \left(\gamma l - \frac{P}{F}\right),$$

und daher den entsprechenden Querschnitt gleich dem größeren der Werthe

$$F = \frac{P}{T} \text{ und } F = \frac{P}{\gamma l - T}.$$

Setzt man in diesen Formeln $K$ statt $T$, so erhält man die Bedingungen des Zerreißens und Zerbrechens, also im ersten Falle:

$$P = F\,(K - \gamma l) \text{ und im zweiten:}$$

$$\text{entweder } P = FK \text{ oder } P = F\,(\gamma l - K).$$

Für $P = 0$ hat man natürlich entweder:

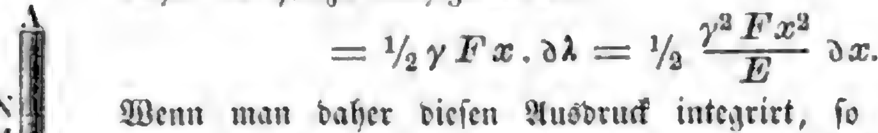
$$\gamma l - T = 0, \text{ also } l = \frac{T}{\gamma} \text{ oder:}$$

$$\gamma l - K = 0, \text{ also } l = \frac{K}{\gamma},$$

je nachdem es bloß auf eine Spannung bis zur Elasticitätsgrenze oder auf eine Trennung durch Zerreißen oder Zerdrücken des Körpers ankommt.

Anmerkung. Das mechanische Arbeitsvermögen, welches ein prismatischer Körper in sich aufnimmt, wenn er durch sein eigenes Gewicht ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, ist auf folgende Weise zu ermitteln. Das Element $MN$, Fig. 316, dessen Länge $\partial x$ ist, wird durch das Gewicht $\gamma F x$ des Körperstückes

Fig. 316.



$BM$ nach und nach von 0 auf $\partial \lambda = \frac{\gamma x \partial x}{E}$ ausgedehnt, und es ist daher die hierzu nöthige Arbeit:

$$= \frac{1}{2} \gamma F x \,.\, \partial \lambda = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 F x^2}{E} \partial x.$$

Wenn man daher diesen Ausdruck integrirt, so erhält man das Arbeitsquantum für alle Stangenelemente von $B$ bis $M$:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F}{E} \int x^2 \partial x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F x^3}{3 E},$$

und also das für die ganze Stange:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F l^3}{3 E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F^2 l^2 l}{3 F E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G^2 l}{3 F E} = \frac{1}{3} G \lambda,$$

wobei (nach §. 207) $\lambda = \frac{1}{2} \frac{G l}{F E}$, die ganze Ausdehnung der Stange bezeichnet.

Beispiel. Wenn ein Bleidraht, dessen Festigkeitsmodul $K = 3000$ Pfund, und Dichtigkeit, auf den Cubikzoll bezogen, $\gamma = 0{,}406$ Pfund ist, vertical aufgehangen ist, so zerreißt derselbe bei der Länge

$$l = \frac{K}{\gamma} = \frac{3000}{0{,}406} = 7390 \text{ Zoll} = 615 \text{ Fuß}$$

durch sein eigenes Gewicht. Beträgt der Tragmodul desselben $T = 1500$ Pfund, so erreicht seine Ausdehnung die Elasticitätsgrenze bei einer Länge

$$l_1 = \frac{T}{\gamma} = \frac{1500}{0{,}406} = 3694 \text{ Zoll} = 308 \text{ Fuß},$$

und ist der Elasticitätsmodul dieses Drahtes, $E = 960000$ Pfund, so hat man die entsprechende Ausdehnung desselben:

$$\lambda = \frac{T}{E} l_1 = \frac{1500}{96000} \cdot 308 = \frac{5.77}{80} = 0{,}0481 \text{ Fuß} = 0{,}576 \text{ Zoll}.$$

**Körper von gleichem Widerstande.** Wird der Zug oder Druck $P$ eines verticalen prismatischen Körpers noch durch das Gewicht $G$ desselben ansehnlich vergrößert, so hat man natürlich §. 208

$$P + G = F T, \text{ oder } P = F T - G = F (T - l \gamma)$$

zu setzen, und hiernach den Querschnitt $F$ dieses Körpers durch den Ausdruck

$$F = \frac{P}{T - l\gamma}$$

zu bestimmen (vergl. §. 207).

Ist dieser Körper, wie z. B. $AB$, Fig. 317, aus prismatischen Theilen zusammenzusetzen, so kann man, um Material zu ersparen, jedem dieser Theile einen nach dieser Formel zu berechnenden Querschnitt geben. Haben diese Körperstücken die Längen $l_1$, $l_2$, $l_3$ u. s. w. und steigert sich die Last $P$ durch die Gewichte $F_1 l_1 \gamma$, $F_2 l_2 \gamma$, $F_3 l_3 \gamma$ u. s. w. der Stücke nach und nach auf $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. w., so ist hiernach der erforderliche Querschnitt des ersten:

Fig. 317.

$$F_1 = \frac{P}{T - l_1 \gamma},$$

ferner der des zweiten:

$$F_2 = \frac{P_1}{T - l_2 \gamma} = \frac{F_1 T}{T - l_2 \gamma},$$

der des dritten:

$$F_3 = \frac{P_2}{T - l_3 \gamma} = \frac{F_2 T}{T - l_3 \gamma} \text{ u. s. w.}$$

Sind alle Stücke gleich lang, ist also $l_1 = l_2 = l_3$ 2c. $= l$, so hat man einfacher:

$$F_1 = \frac{P}{T - l\gamma} = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right),$$

$$F_2 = \frac{F_1 T}{T - l\gamma} = \frac{PT}{(T - l\gamma)^2} = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^2,$$

$$F_3 = \frac{F_2 T}{T - l\gamma} = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^3 \text{ 2c.},$$

also allgemein, den Querschnitt des $n$ten Stückes:

$$F_n = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n.$$

Sollten alle Stücke einerlei Querschnitt erhalten, so würde derselbe die Größe

$$F = \frac{P}{T - nl\gamma} = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - nl\gamma}\right) \text{ erhalten müssen.}$$

Während in diesem Falle das Volumen des ganzen Körpers

$$V = nFl = \frac{nPl}{T - nl\gamma}$$

ist, bestimmt sich dasselbe in dem Falle, wo jedes Stück seinen angemessenen Querschnitt hat, durch die geometrische Reihe:

$$V^n = (F_1 + F_2 + \cdots + F_n) l$$
$$= \frac{Pl}{T - l\gamma}\left[1 + \frac{T}{T - l\gamma} + \left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^{n-1}\right].$$

Nun ist aber (s. „Ingenieur" Seite 82) die Summe der geometrischen Reihe in der Parenthese:

$$= \left[\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n - 1\right] : \left(\frac{T}{T - l\gamma} - 1\right);$$

daher folgt:

$$V_n = \frac{P}{\gamma}\left[\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n - 1\right] = \frac{(F_n - F_1)\, T}{\gamma},$$

und das Gewicht des ganzen Körpers:

$$G = (F_n - F_1)\, T$$

Ist die Länge $l$ eines Stückes sehr klein, und dagegen die Anzahl $n$ der Stücke sehr groß, so kann man, wenn man noch die ganze Länge $nl$ durch $a$ bezeichnet, genau wie in §. 194 schließend,

$$(T - l\gamma)^n = \left(T - \frac{a\gamma}{n}\right)^n = T^n\left(1 - \frac{a\gamma}{nT}\right)^n = T^n e^{-\frac{a\gamma}{T}}$$

setzen, wobei $e = 2{,}71828\ldots$, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet, und es ist hiernach:

$$F_n = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n = \frac{P}{Te^{-\frac{a\gamma}{T}}} = \frac{P}{T} e^{\frac{a\gamma}{T}} = F_0\, e^{\frac{a\gamma}{T}},$$

wobei $F_0 = \frac{P}{T}$, die Größe des anfänglichen Querschnittes $B$ bezeichnet.

Annähernd ist auch:

$$F_n = \frac{P}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right],$$

und dagegen:

$$F = \frac{P}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right].$$

Das Volumen des aus vielen kleinen Stücken zusammengesetzten Körpers ergiebt sich auf dem angezeigten Wege:

$$V_n = \frac{P}{\gamma}\left[\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n - 1\right] = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{a\gamma}{T}} - 1\right),$$

annähernd:

$$= \frac{Pa}{T}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a\gamma}{T}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right],$$

wogegen das Volumen des Körpers mit gleichem Querschnitt annähernd

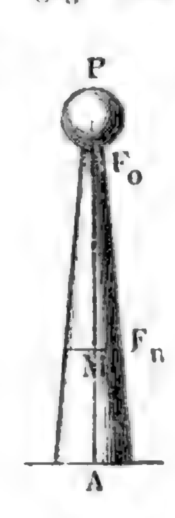
$$V = \frac{Pa}{T - a\gamma} = \frac{Pa}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right] \text{ ist.}$$

Die Formeln

$$F_n = \frac{P}{T} e^{\frac{a\gamma}{T}} \text{ und } V_n = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{a\gamma}{T}} - 1\right)$$

gelten natürlich auch für jeden Körper wie $AB$, Fig. 318, und $AB$, Fig. 319, mit sich stetig änderndem Querschnitte. Um mit Hülfe derselben den Querschnitt $F_n$ für eine Stelle $M$ und das von demselben abgeschnittene Körpervolumen zu finden, hat man nur in diesen Formeln für $a$ den Abstand $BM$ der gegebenen Stelle vom Angriffspunkte $B$ der Zug- oder Druckkraft einzusetzen. Die hierdurch bestimmten Körper haben an jeder Stelle den der bestimmten Tragkraft entsprechenden Querschnitt, und heißen deshalb **Körper von gleichem Widerstande** (franz. solides d'égale résistance; engl. bodies of uniform strength). Diese Körper haben unter übrigens gleichen Verhältnissen das kleinste Volumen, erfordern daher auch die kleinste Menge Material, und sind deshalb im Allgemeinen die wohlfeilsten und vortheilhaftesten in der Anwendung. Vergleichen wir z. B. einen solchen Körper mit einem prismatischen, so finden wir durch die obigen Näherungsformeln, daß derselbe ein Volumenersparniß von

Fig. 318. Fig. 319.




$$V - V_n = \frac{Pa}{T}\left[\frac{1}{2}\frac{a\gamma}{T} + \frac{5}{6}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right] = \frac{Pa^2\gamma}{2T^2}\left(1 + \frac{5}{3}\frac{a\gamma}{T}\right)$$

gewährt.

Anmerkung. Da die relative Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers von gleichem Widerstande überall dieselbe, nämlich $\sigma = \frac{T}{E}$ ist, so steigert sich folglich die Gesammtausdehnung desselben auf $\lambda = \sigma a = \frac{T}{E} a$, während sie bei dem prismatischen Körper nur die Größe

$$\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2} G)a}{FE} = \frac{P + \frac{1}{2} G}{P + G} \cdot \frac{T}{E} a$$

hat.

Beispiel. Welchen Querschnitt muß ein 1000 Fuß langes schmiedeeisernes Schachtgestänge erhalten, wenn dasselbe außer seinem eigenen Gewichte noch eine Last $P = 75000$ Pfund zu tragen hat? Nimmt man statt des Tragmoduls

$T = 18000$ Pfund einen Sicherheitsmodul $\frac{T}{2} = 9000$ Pfund an und setzt man das Gewicht eines Cubikzolles Schmiedeeisen:

$$\gamma = \frac{7,70 \,.\, 61,75}{12 \,.\, 12 \,.\, 12} = 0,2752 \text{ Pfund},$$

so folgt der gesuchte Querschnitt:

$$F = \frac{P}{T - a\gamma} = \frac{75000}{9000 - 12000 \,.\, 0,2752} = \frac{75000}{5698} = 13,16 \text{ Quadratzoll}$$

und das Gewicht des Gestänges:

$$G = F \,.\, a\gamma = 13,16 \,.\, 12000 \,.\, 0,2752 = 43460 \text{ Pfund}.$$

Könnte man diesem Gestänge die Form eines Körpers von gleichem Widerstande geben, so würde man zum kleinsten Querschnitte:

$$F_0 = \frac{P}{T} = \frac{75000}{9000} = 8,33 \text{ Quadratzoll},$$

zum größten:

$$F_n = 8,33 \,.\, e^{0,2752 \,.\, 1,333} = 8,33 \,.\, e^{0,3669} = 12,03 \text{ Quadratzoll},$$

und das Gewicht des Gestänges:

$$G_n = V_n \gamma = (F_n - F)\, T = (12,03 - 8,33) \,.\, 9000 = 33300 \text{ Pfund}$$

erhalten.

Ist der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens, $E = 27'000000$ Pfund, so hat man folglich die Verlängerung des Gestänges im letzteren Falle:

$$\lambda = \frac{T}{E}\, a = \frac{18000 \,.\, 1000}{27'000000} = \frac{18}{27} = \tfrac{2}{3} \text{ Fuß} = 8 \text{ Zoll},$$

und dagegen im ersteren:

$$\frac{P + \frac{1}{2} G}{P + G}\, \lambda = \frac{75000 + 21730}{75000 + 43460} \,.\, 8 = \frac{96730 \,.\, 8}{128460} = 6,53 \text{ Zoll}.$$

§. 209 **Ausdehnungs- und Compressionsversuche.** Um das Elasticitätsgesetz eines Stoffes vollständig kennen zu lernen, ist nöthig, daß man möglichst lange prismatische Körper aus demselben durch allmälig zu vergrößernde Gewichte nicht allein nach und nach und bis zum Zerreißen ausdehne, sondern auch nach und nach bis zum Zerdrücken zusammenpresse, und daß man hierbei die durch jedes Gewicht bewirkte Ausdehnung oder Zusammendrückung beobachte. Giebt man dem zu untersuchenden Körper eine verticale Lage, so können diese Gewichte unmittelbar an diese Körper angehangen oder auf dieselben aufgelegt werden und sie geben dann unmittelbar die Größe der Zug- oder Druckkraft des Körpers an. Um aber nicht mit zu großen Gewichten experimentiren zu müssen, zieht man es vor, die Gewichte mittels ungleicharmiger Hebel auf den Körper wirken zu lassen, wobei dieselben immer an den längeren Arm ($a$) angehangen werden, während das eine Ende des Körpers vom kürzeren Arme ($b$) ergriffen wird. Durch Multiplication des Gewichtes $G$ mit dem Armverhältnisse $\frac{a}{b}$ ergiebt sich dann leicht die entsprechende Zug- oder Druckkraft $P = \frac{a}{b} G$. Auch wendet man mit Vor-

theil, namentlich zur Erzeugung bedeutender Zug- oder Druckkräfte, anstatt der Gewichte sogenannte hydraulische Pressen an. Um die Größe der Ausdehnung oder Zusammendrückung beobachten zu können, versieht man entweder den zu untersuchenden Stab in der Nähe von jedem seiner beiden Enden mit einem feinen Striche, oder man befestigt an diesen Stellen auf demselben ein Paar, vielleicht gar als Verniere vorgerichteter Zeiger, und um nicht nur die elastische, sondern auch die permanente Ausdehnung zu ermitteln, mißt man die Entfernung dieser Striche oder Zeiger von einander nicht allein vor dem Auflegen und während des Aufliegens eines Gewichtes, sondern auch nach erfolgter Abnahme desselben, und läßt auch gern inzwischen mehrere Minuten, oder nach Befinden einige Stunden Zeit verfließen, weil, zumal bei stärkeren Spannungen, die Ausdehnung und Zusammendrückung nicht momentan, sondern erst nach Verlauf einer längeren Zeit einen gewissen Werth annehmen. Die Ausmessung dieser Entfernung erfolgt entweder durch einen Stangenzirkel oder mittels einer unmittelbar am Stabe hinlaufenden Eintheilung; auch wendet man hierzu ein sogenanntes Kathetometer an, welches in der Hauptsache in einem an einem verticalen Stabe auf- und niederschiebbaren Luftblasenniveau (s. „Ingenieur“ S. 234) besteht.

Um die Compression an längeren Stäben beobachten zu können, muß man diese Stäbe während des Versuches in eine röhrenförmige Leitung stellen; auch sind dieselben von Zeit zu Zeit einzuschmieren, damit sie sich ohne Hinderniß in dieser Leitung verschieben können.

Kommt es nur darauf an, den Festigkeitsmodul eines Körpers zu ermitteln, so kann man sich zu den Versuchen kürzerer Körper bedienen.

Zu den Zerreißungsversuchen wendet man Körper mit starken Köpfen, $A$ und $B$, Fig. 320, an, welche genau in der Axe durchbohrt sind. Jede Durchbohrung erhält in der Mitte eine ringförmige Schneide, damit der Körper mittels eines durchgesteckten Bolzens $CD$ und durch einen die Enden dieses Bolzens ergreifenden Haken $FF$ genau in der Axe gezogen werde. Bei den Zerdrückungsversuchen giebt man dem Körper $A$, Fig. 321, zwei parallele Grundflächen, und bringt denselben zwischen zwei Cylinder $B$ und $C$ mit ebenfalls eben abgeschliffenen Grundflächen; während nun der abgerundete Kopf $H$ des einen Cylinders von der pressenden Kraft ergriffen wird, stützt sich der andere Cylinder gegen eine starke Fußplatte $D$, und gleiten

Fig. 320.

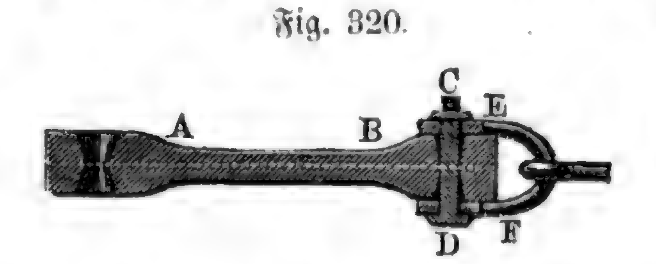
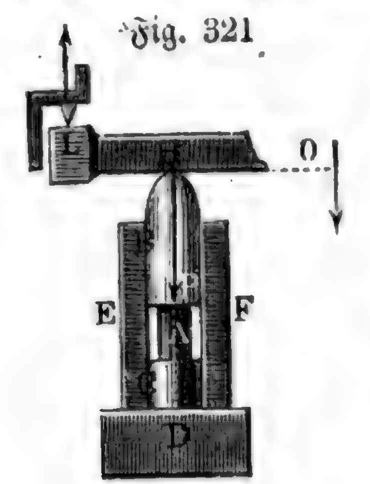



Fig. 321

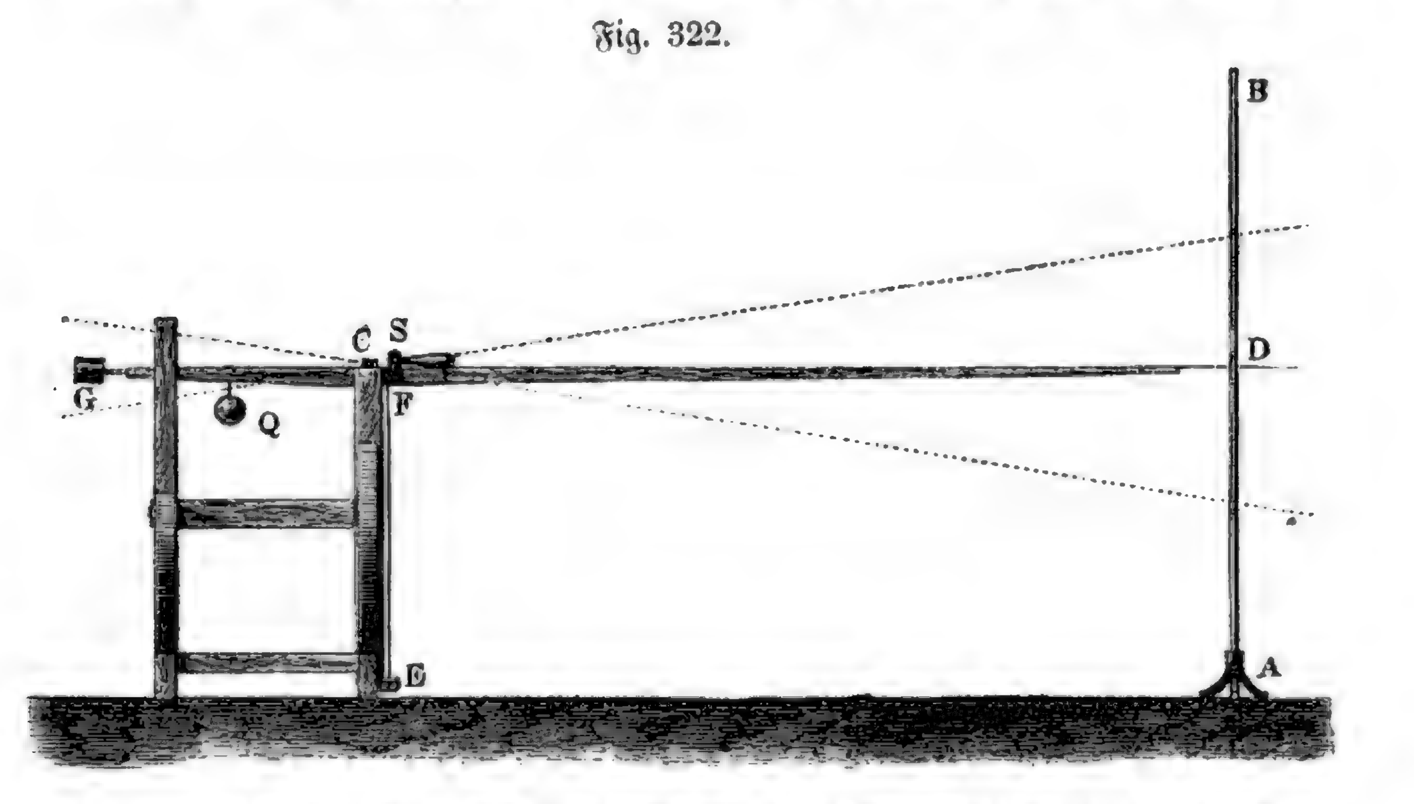


beide in dem Inneren eines Cylinders *EF*. Der Druck *P* auf den Kopf *H* des Stempels *B* besteht entweder in der Kolbenkraft einer hydraulischen Presse oder in der Kraft eines in der Figur nur zum Theil angegebenen einarmigen Hebels *LO*.

Während das Zerreißen eines Körpers in dem kleinsten Querschnitte desselben erfolgt und sich daher der Körper nur in zwei Stücke zertheilt, geht das Zerdrücken in der Regel in schiefen Flächen vor sich, wobei der Körper in mehrere Stücke zerfällt. Prismatische Körper zertheilen sich hierbei vorzüglich in zwei Pyramiden, welche die beiden Grundflächen des Körpers zur Basis und den Mittelpunkt desselben zur Spitze haben, und nächstdem in andere pyramidenähnliche Körper, deren Grundflächen die Seitenflächen des Ganzen ausmachen und deren Spitzen ebenfalls die Mitte des Körpers einnehmen. Körper, welche nach verschiedenen Richtungen ein verschiedenes Gefüge haben, verhalten sich natürlich anders; so wird z. B. ein Holzstück durch eine Kraft, welche in der Richtung der Fasern desselben wirkt, dadurch zerdrückt, daß im kleinsten Querschnitte desselben eine wulstförmige Ausbiegung entsteht.

**Ausdehnungsversuche.** Die ersten gründlichen Untersuchungen über die Ausdehnung und Elasticität des Eisens in Drähten haben wir Gerstner zu verdanken. Derselbe verwendete zu den hierbei zu Grunde gelegten Versuchen Eisendraht von 0,2 bis 0,8 Linien Dicke und bediente sich des in Fig. 322 abgebildeten Hebelapparates mit einem 15 Fuß langen Zeiger *CD*, einem §. 210

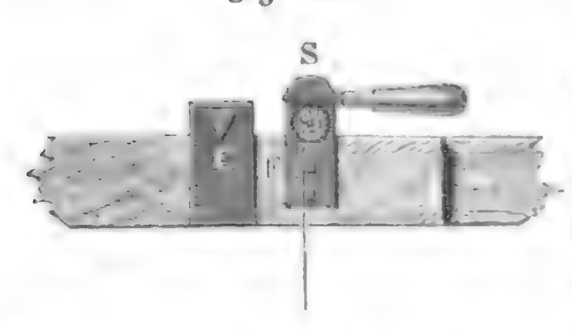
Fig. 322.




Gegengewichte *G* und einem Laufgewichte *Q*. Der ungefähr 4 Fuß lange Draht *EF* wurde am Ende *E* festgeklemmt und mit dem oberen Ende um

einen Wirbel $F$ gewunden, welcher sich mittels einer Schraube $S$ ohne Ende umdrehen ließ, wodurch natürlich dem Drahte jede beliebige Spannung gegeben werden konnte. Die dadurch bewirkte Ausdehnung des Drahtes gab die Zeigerspitze $D$ an einem eingetheilten Stabe $AB$ vervierundfünfzigfacht an. Die schneidige Axe $C$ des Hebels sowie der Wirbel $F$, um welche das obere Ende des Drahtes gewunden war, und die Schraube ohne Ende $S$ zum Umdrehen des Wirbels sind in Fig. 323 in größerem Maßstabe besonders abgebildet. Durch diese Versuche weist Gerstner nach, daß jede Ausdehnung die Summe von zwei Ausdehnungen ist, wovon die eine (die elastische Ausdehnung) nach Abnahme des Gewichts verschwindet, und die andere (die permanente Ausdehnung) zurückbleibt, und daß in Folge dessen die Ausdehnung $\lambda$ sogar innerhalb der Elasticitätsgrenze nicht genau der spannenden Kraft $P$ proportional, sondern daß es angemessen ist, die Formel

Fig. 323.




$$P = \frac{\lambda}{l} FE \text{ [§. 204 (4)]}$$

durch die Reihe

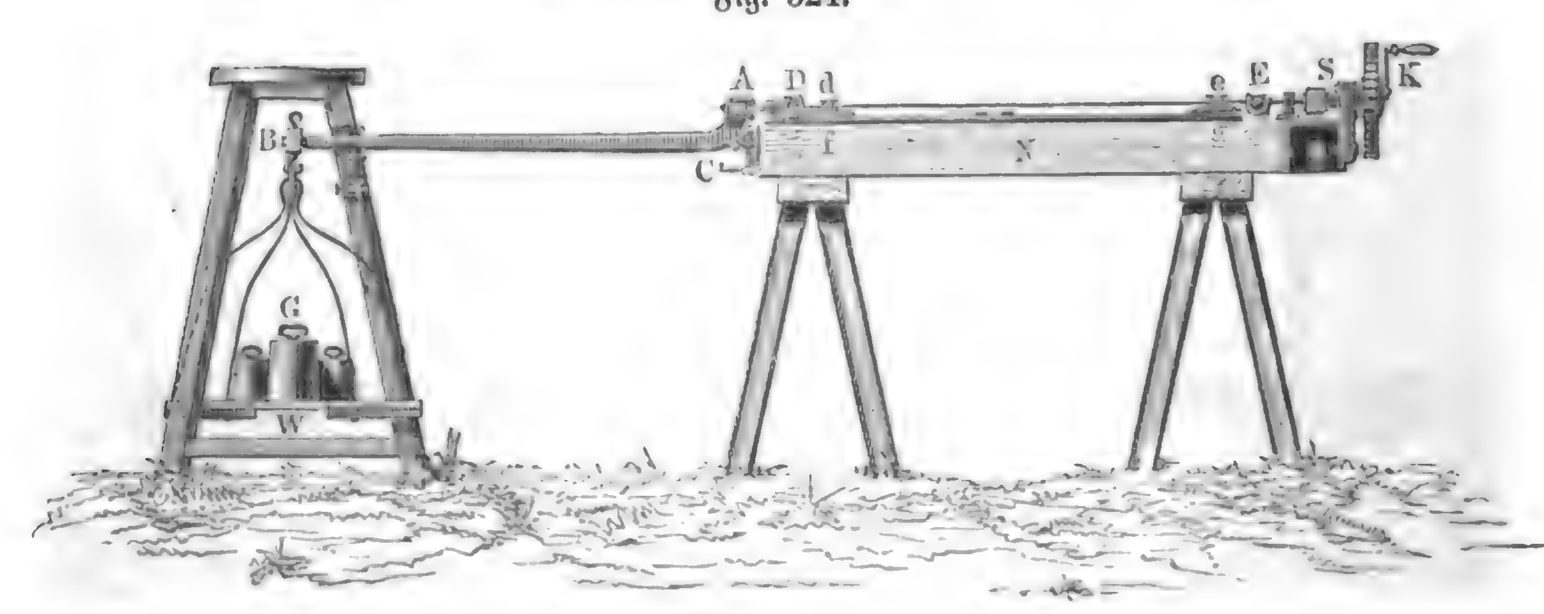
$$P = \frac{\lambda}{l}\left[1 + \alpha \frac{\lambda}{l} + \beta \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2\right] FE,$$

worin $\alpha$ und $\beta$ Erfahrungszahlen bezeichnen, zu ersetzen.

Später wurden von Lagerhjelm sowie auch von Brix ausgedehnte Versuche über die Elasticität und Festigkeit des Schmiedeeisens und Eisendrahtes zur Ausführung gebracht. Beide Experimentatoren wendeten zu ihren Versuchen einen Winkelhebel $ACB$, Fig. 324, an, dessen längerer Arm $CB$ von dem auf eine Wagschale $W$ aufgelegten Gewichte $G$



Fig. 324.



abwärts gezogen wurde, wodurch der am kürzeren Arme $CA$ angeschlossene Eisenstab oder Draht $DE$ beliebig gespannt werden konnte. Bei dem Apparate von Brix betrug das Hebelarmverhältniß $\frac{CA}{CB} = \frac{1}{20}$, und es war hier das eine Drahtende $D$ mittels Kluppe, Haken und Bolzen an den Arm $CA$ und das andere Ende $E$ auf gleiche Weise an eine Schraube $S$ befestigt, welche durch eine Kurbel $K$ und mittels eines Räderwerkes in Umdrehung gesetzt werden konnte. Zur Angabe der Längenausdehnung dienten zwei Nonien $d$ und $e$, welche an den Enden auf den Draht aufgeschraubt wurden und über zwei in Viertellinien eingetheilten Scalen $fg$ hinliefen. Nachdem man den Draht in den Kluppen eingeklemmt hatte, wurde die Wagschale nach und nach mit größeren Gewichten beladen, und bei jedem einzelnen Versuche durch Drehung der Kurbel $K$ des Räderwerkes, der Draht so gespannt, daß sich der Hebel von seiner Unterstützung erhob, und sich so die Spannung des Drahtes mit dem Gewichte $G$ ins Gleichgewicht setzte. Die Versuche wurden mit Drähten von $1\frac{1}{3}$ bis $1\frac{1}{2}$ Linien Stärke ausgeführt und gaben für dieselben, wenn sie ungeglüht waren, im Mittel den Festigkeitsmodul $K = 94000$ Pfund, und dagegen nach dem Glühen, $K = 62000$ Pfund. Der Elasticitätsmodul wurde dagegen für geglühten und ungeglühten Draht im Mittel $E = 28'000000$ Pfund gefunden; ferner ergab sich, daß die Grenze der Elasticität erreicht wurde, wenn die Spannung bei ungeglühtem Draht $0,5\,K$ und bei geglühtem $0,6\,K$ betrug. Bei stärkeren Spannungen traten bleibende Ausdehnungen (Streckungen) ein, und es betrug die ganze Ausdehnung im Augenblicke des Zerreißens bei ungeglühtem Drahte

$\frac{\lambda}{l} = 0,0034$, und beim geglühten $\frac{\lambda}{l} = 0,0885$, also 26mal so viel.

Bei dem Apparate von Lagerhjelm erfolgte die Anspannung des Drahtes durch eine hydraulische Presse, deren Kolbenstange das Ende des Eisenstabes ergriff.

Zu diesen Versuchen verwendete Lagerhjelm verschiedene Eisenstäbe von 36 Zoll Länge mit kreisrunden und quadratischen Querschnitten von $\frac{1}{2}$ Zoll u. s. w. Seitenlänge. Denselben zufolge ist im Mittel der Elasticitätsmodul des schwedischen Schmiedeeisens:

$$E = 44'000000 \text{ Pfund},$$

der Festigkeitsmodul

$$K = \frac{1}{500} E = 88000 \text{ Pfund},$$

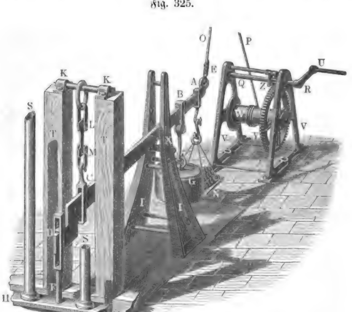
und der Tragmodul

$$T = \sigma \,.\, E = \frac{1}{1600} \cdot 44'000000 = 27500 \text{ Pfund}.$$

Wertheim ließ bei seinen Versuchen über die Elasticität und Cohäsion der Metalle die zu untersuchenden Drähte frei herabhängen, und befestigte an denselben einen Gewichtskasten, welcher mittels Fußschrauben auf dem Fußboden ruhen konnte. Um den Draht durch die in den Kasten gelegten Gewichte anzuspannen, wurden die Fußschrauben so weit herumgedreht, bis der Kasten zum Schweben kam. Zur Ausmittelung der Ausdehnungen des Drahtes diente ein Kathetometer. Diese Versuche wurden unter sehr verschiedenen Temperaturen an vielerlei Metalldrähten, als von Eisen, Stahl, Messing, Zinn, Blei, Zink, Silber u. s. w., angestellt. Die Hauptergebnisse dieser Versuche sind in der folgenden Tafel (§. 212) enthalten.

Der Apparat, womit Fairbairn seine Festigkeitsversuche angestellt hat, besteht in der Hauptsache in einem starken schmiedeeisernen Hebel oder Wagbalken $A\,C\,D$, Fig. 325, dessen Stützpunkt $D$ von einem starken Bolzen $F$ festgehalten wird, welcher von unten mittels einer Schraubenmutter höher

Fig. 325.




oder tiefer gestellt werden kann. Zwei eiserne Säulen geben dem Fußstück $H\,H$, durch welches $F$ hindurch ging, den nöthigen Widerstand. Das zu untersuchende Eisenstück $L\,M$ war mittels einer Kette an dem auf den Säulen $T\,T$ ruhenden Träger $K\,K$ aufgehangen und durch Bolzen und Ringe mit der Scheere $C$ des Wagbalkens $A\,C\,D$ verbunden. An dem langen

Arme des letzteren hing nicht bloß ein größeres constantes Gewicht $G$, sondern auch eine Wagschale $N$ zur Aufnahme kleinerer Gewichte; zur Unterstützung des Hebels von unten diente der Bolzen $X$ und zum Aufheben desselben ein Seil $OP$, welches oben über eine Leitrolle lief und sich unten auf die Welle $W$ einer Winde $UYZ$ wickeln ließ. Nach dem Auflegen der Gewichte ließ man durch langsames Umdrehen der Kurbel $U$ das Hebelende $E$ allmälig herab, bis endlich das zu prüfende Eisenstück durch $G$ und die Gewichte $N$ allein gespannt wurde.

Anmerkung. Gerstner's Versuche über die Elasticität der Eisendrähte u. s. w. sind abgehandelt in Gerstner's Mechanik, Bd. I.; über die Versuche von Lagerhjelm ist nachzulesen die Pfaff'sche Uebersetzung der Abhandlung: Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit, Gleichartigkeit, Elasticität, Schmiedbarkeit und Stärke des Stabeisens u. s. w. von Lagerhjelm (Nürnberg 1829), und über die Versuche von Brix macht die nöthigen Mittheilungen: die Abhandlung über die Cohäsions- und Elasticitätsverhältnisse einiger bei Hängebrücken in Anwendung kommenden Eisendrähte (Berlin 1837).

Die Versuche von Wertheim über die Elasticität und Cohäsion der Metalle u. s. w., sowie auch über Glas und Holz werden in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Ergänzungsband II., 1845, abgehandelt. Die Elasticitätsmodel der genannten Körper sind hier nicht allein durch Ausdehnungs-, sondern auch durch Biegungs- und Schwingungsversuche bestimmt. Ueber Fairbairn's Festigkeitsversuche ist in dessen Useful Informations for Engineers nachzulesen.

§. 211 **Eisen und Holz.** Die ausführlichsten Versuche über die Elasticität und Festigkeit des Guß- und Schmiedeeisens sind in der neuesten Zeit von Hodgkinson angestellt worden; durch sie hat man erst die Gesetze der Ausdehnung und Zusammendrückung dieser in der praktischen Anwendung so sehr wichtigen Stoffe vollständig kennen gelernt. Obgleich hiernach das auf verschiedene Weise erzeugte Eisen ziemlich verschiedene Elasticitäts- und Festigkeitsgrade gezeigt hat, so ist es doch möglich, das Verhalten dieses Körpers in Hinsicht auf Ausdehnung und Compression durch Curven auszudrücken.

Diesen Versuchen zufolge ist für Gußeisen (franz. fonte; engl. cast-iron) im Mittel, und zwar sowohl für Ausdehnung als auch für Compression, der Elasticitätsmodul

$E = 1{,}000000$ Kilogramm, bezogen auf den Querschnitt von 1 Quadratcentimeter, und folglich

$E = 13{,}68 \;.\; 1'000000 = 13'680000$ Pfund, bezogen auf 1 Quadratzoll Querschnitt.

Ferner ist die Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze:

$$\sigma = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{1500}.$$

Dieser Ausdehnung entspricht der Tragmodul

$$T = \frac{1000000}{1500} = 667 \text{ Kilogramm oder}$$

$$T = \frac{13'680000}{1500} = 9120 \text{ Pfund.}$$

Die Compression bei der Elasticitätsgrenze ist dagegen:

$$\sigma_1 = \frac{1}{750},$$

daher der Tragmodul des Zerdrückens:

$$T_1 = \frac{1000000}{750} = 1333 \text{ Kilogramm} = \frac{13'680000}{750} = 18240 \text{ Pfund.}$$

Der Festigkeitsmodul für das Zerreißen ist durch diese Versuche gefunden worden:

$$K = 1300 \text{ Kilogramm} = 17780 \text{ Pfund,}$$

und dagegen der für das Zerdrücken:

$$K_1 = 7200 \text{ Kilogramm} = 98500 \text{ Pfund.}$$

Es ist also beim Gußeisen die Festigkeit des Zerdrückens über $5^1/_2$ Mal so groß als die des Zerreißens.

Für das Schmiedeeisen (franz. fer; engl. wrought-iron) ist ferner sowohl bei Ausdehnung als bei Zusammendrückung im Mittel

$$E = 2'000000 \text{ Kilogramm} = 27'400000 \text{ Pfund,}$$

und die Elasticitätsgrenze ungefähr bei $\sigma = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{1500}$, daher der Tragmodul

$$T = \frac{2'000000}{1500} = 1333 \text{ Kilogramm} = 18235 \text{ Pfund.}$$

Endlich hat sich der Festigkeitsmodul für das Zerreißen des Schmiedeeisens

$$K = 4000 \text{ Kilogramm} = 54700 \text{ Pfund,}$$

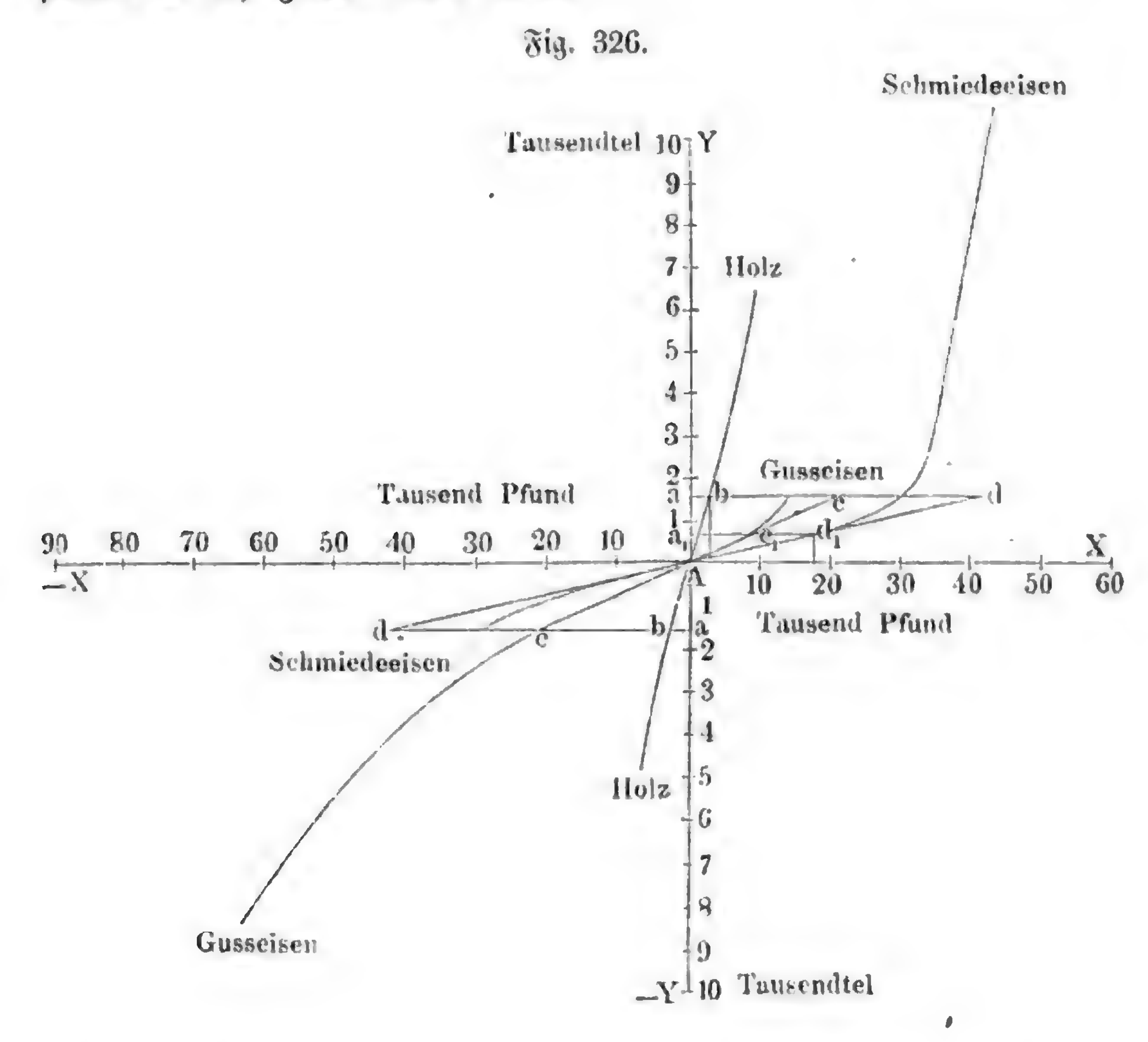
und für das Zerdrücken

$$K = 3000 \text{ Kilogramm} = 41000 \text{ Pfund ergeben.}$$

Es ist also der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens ungefähr doppelt so groß als für das Gußeisen, und während für das Zerreißen der Festigkeitsmodul des Gußeisens ungefähr nur ein Drittel von dem des Schmiedeeisens ist, beträgt dagegen für das Zerdrücken der Festigkeitsmodul des Gußeisens ungefähr zwei und ein halb Mal so viel als der des Schmiedeeisens. Diese Elasticitäts- und Festigkeitsverhältnisse des Guß- und Schmiedeeisens sind durch die graphische Darstellung in Fig. 326 vollständig vor Augen geführt. Vom Anfangspunkte $A$ aus sind auf der rechten Seite der Abscissenaxe $X\overline{X}$ die Ausdehnungs- und auf der linken die Compressionskräfte in Tausendpfunden, und zwar pr. Quadratzoll Querschnitt, angegeben, während die obere Hälfte der Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$ die entsprechenden Ausdeh-

mungen und die untere die Zusammendrückungen enthält. Es fällt besonders in die Augen, daß die Curve des Gußeisens auf der Seite der Compression und die des Schmiedeeisens auf der der Ausdehnung eine bedeutende Erstreckung hat; auch bemerkt man, daß diese Curven in der Nähe des Anfangspunktes $A$ nahe gerade Linien bilden.

Fig. 326.




Da nächst dem Eisen vorzüglich noch das Holz (franz. bois; engl. wood) am häufigsten in Anwendung kommt, so sind in der Figur noch die Elasticitätsverhältnisse des Tannen-, Buchen- und Eichenholzes u. s. w. durch eine Curve graphisch dargestellt. Es ist für diese Holzarten im Mittel der Elasticitätsmodul:

$$E = 110000 \text{ Kilogramm} = 1'500000 \text{ Pfund};$$

ferner die Elasticitätsgrenze bei $\sigma = \frac{1}{600}$ der Länge, daher der entsprechende Tragmodul:

$$T = \frac{110\,000}{600} = 180 \text{ Kilogramm} = 2500 \text{ Pfund}.$$

Endlich ist der Festigkeitsmodul für die Ausdehnung:

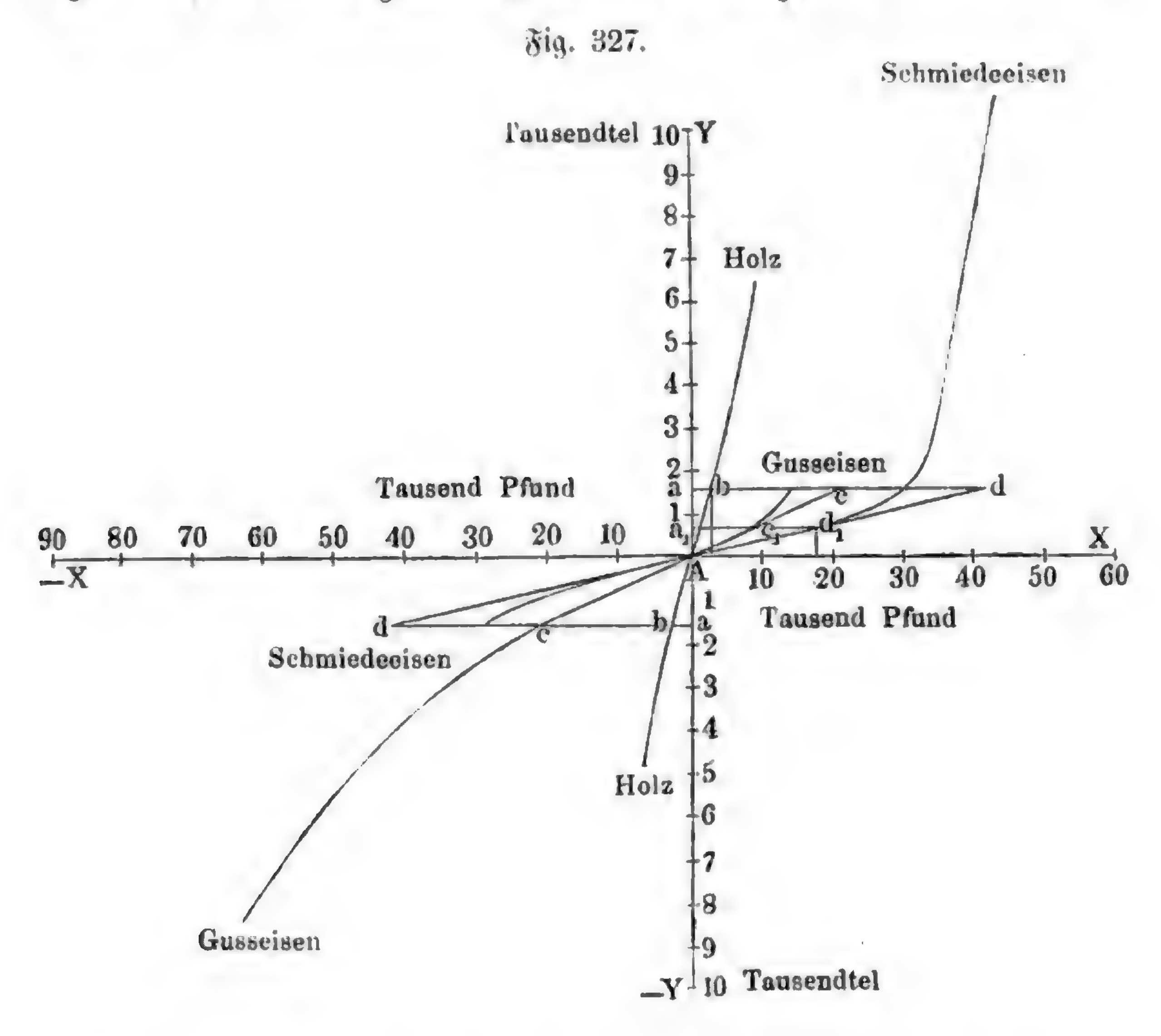
$$K = 650 \text{ Kilogramm} = 8900 \text{ Pfund},$$

und dagegen für die Compression:

$$K_1 = 450 \text{ Kilogramm} = 6200 \text{ Pfund}.$$

Das Verhältniß der Elasticitätsmodel 150 : 1368 : 2740, annähernd = 1 : 9 : 19, zwischen dem Holze, Guß- und Schmiedeeisen ist in der Figur durch die Subtangenten $a\,b$, $a\,c$ und $a\,d$ ausgedrückt.

Fig. 327.




Die Arbeitsmodul $A = \frac{1}{2}\,\sigma\,T$ für die Elasticitätsgrenze drücken die Dreiecke $A\,a\,b$, $A\,a_1\,c_1$ und $A\,a_1\,d_1$ aus, welche die Inhalte der kleinen Ausdehnungsverhältnisse $\sigma = A\,a = \frac{1}{600}$ und $\sigma = A\,a_1 = \frac{1}{1500}$ (annähernd) zur Grundlinie haben. Es ist dem Obigen zufolge, für Holz

$$A = \frac{1}{2}\,\sigma\,T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{600} \cdot 180 = 0{,}15 \text{ Kilogrammcentimeter}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{600} \cdot 2500 = 2{,}08 \text{ Zollpfund},$$

für Gußeisen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1500} \cdot 667 = 0{,}222 \text{ Kilogrammcentimeter} = 3{,}04 \text{ Zollpfund},$$

und für Schmiedeeisen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1333}{1500} = 0{,}444 \text{ Kilogrammcentimeter} = 6{,}08 \text{ Zollpfund}.$$

Um die Arbeitsmodel für das Zerreißen und für das Zerdrücken bestimmen zu können, ist eigentlich eine vollständige Reihe von Ausdehnungs- und Compressionsversuchen nöthig, da diese Model durch die Quadraturen (siehe Artikel 29 der analyt. Hülfslehren) der vollständigen Curvenzweige sowohl auf der einen als auch auf der anderen Seite der Ordinatenaxe ausgedrückt werden; namentlich ist dies erforderlich bei der Ausdehnung des Schmiedeeisens und bei der Compression des Gußeisens, da den Veränderungen dieser Körper Curven zukommen, die von geraden Linien bedeutend abweichen.

Beim Holze ist die Ausdehnung und Compression im Augenblicke des Zerreißens und Zerdrückens zu wenig bekannt, als daß sich für dasselbe mit einiger Sicherheit die Arbeitsmodel desselben für das Zerreißen und Zerdrücken angeben ließen. Behandelt man die entsprechenden Curven als gerade Linien, so erhält man den Arbeitsmodul des Zerreißens:

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{K^2}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{650^2}{110000} = 1{,}91 \text{ Kilogrammcentimeter} = 26{,}1 \text{ Zollpfd.}$$

und dagegen den des Zerdrückens:

$$B_1 = \frac{1}{2} \frac{K_1^2}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{450^2}{110000} = 0{,}92 \text{ Kilogrammcentimeter} = 12{,}7 \text{ Zollpfd.}$$

Für das Zerreißen des Gußeisens kann man die Ausdehnung $\sigma_1 = 0{,}0016$ und die mittlere Kraft 560 Kilogramm annehmen, so daß für dasselbe der Arbeitsmodul des Zerreißens:

$$B = 0{,}0016 \,.\, 650 = 1{,}04 \text{ Kilogrammcentimeter} = 14{,}2 \text{ Zollpfund}$$

zu setzen ist.

Für das Zerdrücken des Gußeisens möchte dagegen die größte Zusammendrückung $\sigma_1 = 0{,}008$, und die mittlere Compressionskraft = 3600 Kilogramm zu setzen sein, so daß der entsprechende Arbeitsmodul des Zerdrückens

$$B_1 = 0{,}008 \,.\, 3600 = 29 \text{ Kilogrammcentimeter} = 397 \text{ Zollpfund}$$

folgt.

Für das Zerreißen des Schmiedeeisens läßt sich im Mittel $\sigma_1 = 0{,}008$ und die mittlere Kraft 3000 Kilogramm, folglich der entsprechende Arbeitsmodul

$$B = 0{,}008 \,.\, 3000 = 24 \text{ Kilogrammcentimeter} = 328 \text{ Zollpfund}$$

setzen.

Für das Zerdrücken desselben ist dagegen $\sigma_1$ nur $= 0{,}0018$ und das

Kraftmittel = 1300 Kilogramm anzunehmen, daher der zugehörige Arbeitsmodul:

$$B_1 = 0{,}0018 \,.\, 1300 = 2{,}34 \text{ Kilogrammcentimeter} = 32 \text{ Zollpfund.}$$

§. 212 **Erfahrungszahlen.** In folgenden Tabellen I. und II. sind die mittleren Werthe der Elasticitäts-, Trag- und Festigkeitsmodel für die im Bauwesen am häufigsten angewendeten Stoffe aufgeführt. Die erste Tabelle bezieht sich auf Zug- und die zweite auf Druckkräfte.

Die in der zweiten Verticalcolumne dieser Tabelle enthaltenen Werthe der relativen Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze drücken auch das Verhältniß $\frac{T}{E}$ zwischen den in der vierten und dritten Columne aufgeführten Werthen von $T$ und $E$ aus. In der praktischen Anwendung belastet man die Körper entweder nur mit $\frac{1}{m} T$, z. B. $\frac{1}{3} T$ bis $\frac{1}{2} T$, oder man bestimmt die Querschnitte $F$ derselben, indem man in der Formel

$$F = \frac{P}{K}$$

statt $K$, für Metalle den Sicherheitsmodul $\frac{1}{n} K = \frac{1}{6} K$, für Holz und Stein denselben $= \frac{1}{10} K$, und für Mauerwerk nur $= \frac{1}{20} K$, dagegen für Seile $\frac{1}{3} K$ bis $\frac{1}{5} K$ einsetzt.

Die oberen Zahlen in einer Parenthese $\left\{ \right\}$ geben die Model in Kilogrammen an, und setzen einen Querschnitt von 1 Quadratcentimeter voraus; die unteren Zahlen drücken die Model in Zoll- oder Neupfund aus, und beziehen dieselben auf den Querschnitt von 1 Quadratzoll.

Anmerkung. Die in dieser Tabelle angegebenen Model für Metalle beziehen sich auf unausgeglühte Metalle. Bei ausgeglühten Metallen (franz. mét. cuits; engl. annealed met.) ist zwar in der Regel der Elasticitätsmodul derselbe wie bei den nicht ausgeglühten Metallen, dagegen ist der Festigkeitscoefficient des Zerreißens ausgeglühter Metalle meist um 30 bis 40 Procent kleiner als der unausgeglühter Metalle. Der gehärtete und angelassene Stahl (franz. acier trempé et recuit; engl. tempered and annealed steel) hat zwar ebenfalls denselben Elasticitätsmodul als der ungehärtete Stahl, dagegen ist sein Tragmodul oft um 20 bis 30 Procent größer als beim gehärteten Stahl. Da wo es nicht besonders erwähnt wird, sind die angegebenen Model für Metalle an Drähten bestimmt worden, die durch das Ziehen eine härtere Kruste erhalten als gehämmerte oder gar gegossene Metallstäbe. Bei einigen Stoffen, wie bei dem Holze, dem Eisen und den Steinen, sind die Elasticitäts- und Festigkeitsmodel so verschieden, daß sie auch in besonderen Fällen 25 Procent größer oder kleiner sein können als hier angegeben wird.

## Tabelle I.

### Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Zug.

| Namen der Körper. | Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze. | Elasticitätsmodul $E$. | Tragmodul $T = \sigma E$. | Arbeitsmodul $A = \frac{1}{2} \sigma T$ bei der Elasticitätsgrenze. | Festigkeitsmodul $K$ des Zerreißens. |
|---|---|---|---|---|---|
| Gußeisen . . . . . | $\frac{1}{1500} = 0,000667$ | 13'680000<br>1'000000 | 9120<br>667 | 3,04<br>0,222 | 17800<br>1300 |
| Schmiedeeisen, in Stäben . . . | $\frac{1}{1500} = 0,000667$ | 27'000000<br>1'970000 | 18000<br>1313 | 6,08<br>0,44 | 56000<br>4090 |
| in Drähten . . . | $\frac{1}{1000} = 0,001000$ | 30'000000<br>2'190000 | 30000<br>2190 | 15,0<br>1,10 | 85000<br>6210 |
| in Blechen . . . | $\frac{1}{1250} = 0,000800$ | 25'000000<br>1'830000 | 20000<br>1475 | 8,0<br>1,18 | 45000<br>3290 |
| Deutscher Stahl, gehärtet u. angelassen | $\frac{1}{835} = 0,001198$ | 28'000000<br>2'050000 | 33600<br>2460 | 20,0<br>1,48 | 112006<br>8190 |
| Feiner Gußstahl . . | $\frac{1}{450} = 0,002222$ | 40'000000<br>2'920000 | 88900<br>6490 | 99,0<br>7,20 | 140000<br>10230 |
| Kupfer, gehämmert . | $\frac{1}{4000} = 0,000250$ | 15'000000<br>1'100000 | 3750<br>275 | 0,47<br>0,034 | 32500<br>2380 |
| Kupferblech . . . . | $\frac{1}{3650} = 0,000274$ | 15'000000<br>1'100000 | 4110<br>301 | 0,56<br>0,041 | 29000<br>2140 |
| Kupferdraht . . . . | $\frac{1}{1000} = 0,001000$ | 16'500000<br>1'210000 | 16500<br>1210 | 8,25<br>0,605 | 58000<br>4240 |
| Zink, geschmolzen . . | $\frac{1}{4150} = 0,000241$ | 13'000000<br>950000 | 3130<br>229 | 0,377<br>0,029 | 7200<br>526 |
| Messing . . . . . | $\frac{1}{1320} = 0,000758$ | 8'800000<br>640000 | 6670<br>485 | 2,53<br>0,184 | 17000<br>1242 |
| Messingdraht . . . | $\frac{1}{742} = 0,001350$ | 13'500000<br>987000 | 18220<br>1330 | 12,3<br>0,90 | 50000<br>3654 |
| Bronce (Kanonenmetall) . . . . . | $\frac{1}{1590} = 0,000629$ | 9'500000<br>690000 | 5970<br>434 | 1,88<br>0,136 | 35000<br>2560 |
| Blei . . . . . . . . | $\frac{1}{477} = 0,00210$ | 685000<br>50000 | 14400<br>1050 | 15,10<br>1,10 | 1780<br>130 |
| Bleidraht . . . . . | $\frac{1}{1500} = 0,000667$ | 960000<br>70000 | 6400<br>470 | 2,13<br>0,16 | 3000<br>220 |

Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Zug (Fortsetzung.)

| Namen der Körper. | Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze. | Elasticitätsmodul $E$. | Tragmodul $T = \sigma E$. | Arbeitsmodul $A = \frac{1}{2}\sigma T$ bei der Elasticitätsgrenze. | Festigkeitsmodul $K$ des Zerreißens. |
|---|---|---|---|---|---|
| Zinn . . . . . . . . | $\frac{1}{900} = 0{,}001111$ | 5'500000<br>400000 | 6100<br>440 | 3,40<br>0,24 | 4800<br>350 |
| Silber . . . . . . . | $\frac{1}{660} = 0{,}001515$ | 10'000000<br>730000 | 15150<br>1100 | 11,5<br>0,83 | 40000<br>2900 |
| Gold . . . . . . . . | $\frac{1}{600} = 0{,}001667$ | 10'900000<br>800000 | 18000<br>1300 | 15<br>1,09 | 37000<br>2700 |
| Platin . . . . . . . | $\frac{1}{600} = 0{,}001667$ | 21'900000<br>1'600000 | 36500<br>2700 | 30,4<br>2,25 | 46500<br>3400 |
| Alumin . . . . . . . | — | 10'000000<br>675000 | —<br>— | —<br>— | 27800<br>2030 |
| Glas . . . . . . . . | — | 9'600000<br>700000 | —<br>— | —<br>— | 3400<br>248 |
| Buchen-, Eichen-, Fichten-, Kiefern-, Tannenholz, in der Richtung der Fasern . . | $\frac{1}{600} = 0{,}001667$ | 1'500000<br>110000 | 2500<br>1800 | 2,10<br>0,15 | 8900<br>650 |
| Dieselben Holzarten in radialer Richtung zu den Jahresringen | — | 180000<br>13000 | —<br>— | —<br>— | 550<br>40 |
| Dieselben Holzarten parallel zu den Jahresringen . . . . | — | 110000<br>8000 | —<br>— | —<br>— | 620<br>45 |
| Schwache Hanfseile . | — | — | — | — | 8400<br>610 |
| Starke Hanfseile . . | — | — | — | — | 6500<br>480 |
| Drahtseile . . . . . | — | — | — | — | 45000<br>3300 |
| Kettentaue . . . . | — | — | — | — | 50000<br>3650 |
| Lederriemen (von Kuhleder) . . . . . . | — | 10000<br>731 | — | — | 4000<br>290 |
| Einfach genietetes Eisenblech . . . . . | — | — | — | — | 36000<br>2600 |

## Tabelle II.

### Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Druck.

| Namen der Körper. | Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze. | Elasticitätsmodul $E$. | Tragmodul $T = \sigma E$. | Arbeitsmodul $A = \frac{1}{2} \sigma T$ bei der Elasticitätsgrenze. | Festigkeitsmodul $K$ des Zerreißens. |
|---|---|---|---|---|---|
| Gußeisen . . . . . | $\frac{1}{750} = 0{,}001333$ | 13'500000<br>990000 | 18000<br>1320 | 12,0<br>0,88 | 100000<br>7310 |
| Schmiedeeisen . . . | $\frac{1}{1500} = 0{,}000667$ | 27'000000<br>1'970000 | 18000<br>1320 | 6,0<br>0,44 | 30000<br>2200 |
| Kupfer . . . . . . | $\frac{1}{4000} = 0{,}000250$ | 15'000000<br>1'100000 | 3750<br>275 | 0,47<br>0,039 | 56000<br>4100 |
| Messing . . . . . | — | — | — | — | 10000<br>731 |
| Blei . . . . . . . . | — | — | — | — | 7000<br>510 |
| Holz, in der Richtung der Fasern . . | — | — | — | — | 6500<br>480 |
| Basalt . . . . . . | — | — | — | — | 27000<br>1970 |
| Gneiß und Granit . | — | — | — | — | 8000<br>585 |
| Kalkstein . . . . . | — | — | — | — | 5000<br>365 |
| Sandstein . . . . . | — | — | — | — | 4000<br>292 |
| Ziegelstein . . . . | — | — | — | — | 800<br>59 |
| Mörtel . . . . . . | — | — | — | — | 500<br>37 |

Beispiel 1. Welchen Querschnitt soll ein 1500 Fuß langes schmiedeeisernes Gestänge erhalten, welches durch eine Last von 60000 Pfund gespannt wird? Ohne Rücksicht auf das Gestänggewicht wäre, wenn man eine Spannung von $\frac{T}{2} = 9000$ Pfund pro Quadratzoll zuläßt, der nöthige Querschnitt $F = \frac{60000}{9000} = 6{,}67$ Quadratzoll; mit Rücksicht auf das Gestänggewicht aber wäre, da 1 Cubikzoll Schmiedeeisen das Gewicht $\gamma = 0{,}275$ Pfund hat,

$$F = \frac{60000}{9000 - 1500\,.\,12\,.\,0{,}275} = \frac{60000}{9000 - 4950} = \frac{6000}{405} = 14{,}8 \text{ Quadratzoll.}$$

Das Gewicht dieses Gestänges ist $G = Fl\gamma = 4950\,.\,14{,}8 = 73260$ Pfund, und die Verlängerung desselben durch die Zugkräfte $P = 60000$ Pfund und $G = 73260$ Pfund,

$$\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2}\,G)\,l}{FE} = \frac{96630\,.\,18000}{14{,}8\,.\,27'400000} = \frac{173934}{40552} = 4{,}29 \text{ Zoll.}$$

Beispiel 2. Wie stark sind die Grundmauern eines außen 60 Fuß langen und 40 Fuß breiten und 35 Millionen Pfund schweren Gebäudes aufzuführen, wenn man hierzu gut bearbeitete Gneißstücke verwendet. Setzen wir die gesuchte Mauerdicke $x$ Fuß, so können wir die mittlere Länge der Mauer $60 - x$ und die mittlere Breite derselben $40 - x$, also den mittleren Umfang

$$2\,.\,(60 - x + 40 - x) = 200 - 4\,x$$

und folglich die Grundfläche des ganzen Mauerwerkes

$(200 - 4\,x)\,x$ Quadratfuß $= 144\,.\,(200 - 4\,x)\,x = 576\,(50 - x)\,x$ Quadratzoll annehmen.

Der Festigkeitsmodul für das Zerdrücken des Gneißes ist nach der Tabelle 8000 Pfund, nimmt man daher für die Mauer aus demselben 20fache Sicherheit an, setzt man also den zulässigen Druck auf den Quadratzoll $\frac{8000}{20} = 400$ Pfund, so ist daher zu setzen:

$$400\,.\,576\,(50 - x)\,x = 35'000000,$$

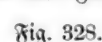
woraus nun

$$50\,x - x^2 = 151{,}9,$$

und schließlich die gesuchte Mauerdicke

$$x = \frac{151{,}9 + x^2}{50} = 3{,}04 + \frac{9}{50} = 3{,}22 \text{ Fuß folgt.}$$

§. 213 **Schubfestigkeit.** Die Schubfestigkeit oder der Widerstand des Abdrückens oder Abscheerens (franz. résistance par glissement ou cisaillement; engl. strenght of shearing), wobei die Trennungsfläche in die Richtung der Kraft fällt, ist ähnlich wie die Zugfestigkeit zu beurtheilen. Man hat es hier mit der Zusammenwirkung dreier Parallelkräfte $P$, $Q$ und $R$, Fig. 328, zu thun, wobei die Angriffspunkte $A$ und $C$ von zwei derselben ($P$ und $R$) einander so nahe liegen, daß eine Biegung des zwischenliegenden Stückes $A\,C$ nicht möglich ist, und daher eine Trennung zwischen $A$ und $C$, und zwar in einer Fläche $DD$ rechtwinkelig zur Axe des Körpers, erfolgt.


Fig. 328.

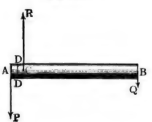
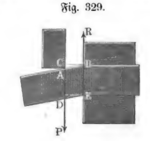



Fig. 329.



Der Widerstand des Abschiebens ist, wie der des Zerreißens und der des Zerdrückens, dem Querschnitte des Körpers oder vielmehr der Größe der Trennungsfläche $F$ proportional, und läßt sich beim Schmiedeeisen sogar annähernd dem des Zerreißens gleichsetzen, so daß also der Modul $K$ der Zugfestigkeit auch als Festigkeitsmodul für das Abschieben gelten, und folglich die Kraft zum Abschieben bei dem Querschnitte $F$

$$P = FK$$

gesetzt werden kann. Allgemein ist aber

$$P = FK_2,$$

wobei $K_2$ den durch Versuche zu ermittelnden Widerstand des Abschiebens oder Abscheerens pro Flächeneinheit bezeichnet.

Die Elasticitätsformel $P = \frac{\lambda}{l} FE = \sigma FE$ für Zug- und Druckkräfte läßt sich auch auf die Schubkraft $P$, Fig. 329, anwenden, nur bedeutet hier $\sigma$ das Verhältniß $\iota = \frac{CA}{CB}$ der Verschiebung $CA$ zur Länge oder dem Abstande $CB$ der Kraftrichtungen $AP$ und $ER$ von einander; jedoch ist für $E$ eine durch besondere Versuche zu ermittelnde Erfahrungszahl $C$ einzusetzen.

Folgende Tabelle III. enthält die bis jetzt bekannten Elasticitäts- und Festigkeitsmodel ($C$ und $K_2$) entsprechend den Formeln $P = \iota FC$ und $P_1 = FK_2$ für die Schub- oder Scheer-Elasticität und Festigkeit.

Tabelle III.

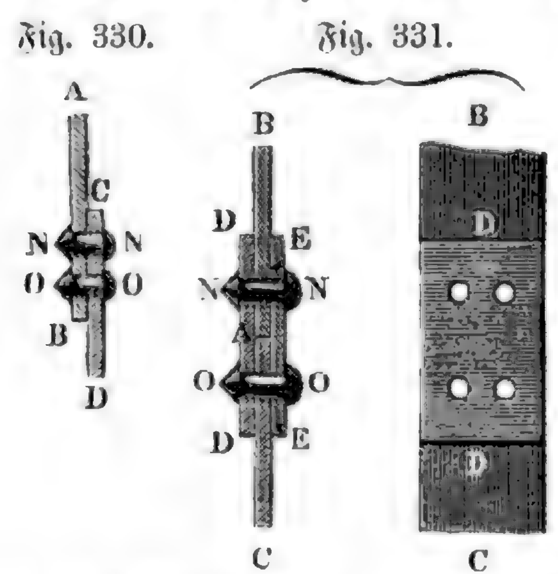
Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Schub (des Abscheerens).

| Namen der Körper. | Elasticitätsmodul $C$. | Festigkeitsmodul $K_2$. |
|---|---|---|
| Gußeisen | 2'700000<br>200000 | 31000<br>2270 |
| Schmiedeeisen | 8'600000<br>630000 | 48000<br>3500 |
| Feiner Gußstahl | 13'680000<br>1'000000 | 88900<br>6500 |
| Kupfer | 6'000000<br>440000 | — |
| Messing | 5'100000<br>370000 | — |
| Laubholz | 547000<br>40000 | 650<br>48 |
| Nadelholz | 592000<br>43300 | 2200<br>161 |

Gewöhnlich nimmt man $C = \frac{1}{3} E$ und $K_2 = K$ an.

Die Formel $P = FK_2$ findet vorzüglich ihre Anwendung bei Bestimmung der Stärke $d$ der Bolzen und Nieten, wodurch Bleche und andere plattenförmige Körper mit einander verbunden werden. Es finden bei dieser Verbindung der Hauptsache nach zwei Fälle statt; entweder werden die zu verbindenden Blechenden $AB$ und $CD$, Fig. 330, über einander geplattet, und durch Nieten oder Bolzen $NN$ und $O\,O$ zusammengehalten, oder es werden, wie Fig. 331 vor Augen führt, die Blechenden $AB$ und $AC$ stumpf zusammengestoßen, mit gelochten Laschen $DD$ und $EE$ bedeckt, und durch Nieten $NN$ und $O\,O$ fest mit einander verbunden. Bei der ersteren Verbindungsweise geht die Zugkraft in dem einen Bleche vermittels eines Kräftepaares auf das andere Blech über, wodurch beide Bleche außer der Dehnung auch noch eine Biegung erleiden, und folglich an ihrem Tragvermögen verlieren; es ist daher die zweite Verbindungsart, wo dieses Kräftepaar nicht hervor- und folglich auch keine Biegung eintritt, die bessere.

Fig. 330. Fig. 331.




Da die verbundenen Blechenden und Blechlaschen durch die Nieten- oder Bolzenköpfe mit einer nicht unbedeutenden Kraft auf einander drücken, so wird durch die daraus entspringende Reibung der Zusammenhalt der Körper noch ansehnlich verstärkt. Der Sicherheit wegen läßt man jedoch diese Wirkung bei der Bestimmung der Nietenstärke außer Acht. Auf der anderen Seite wird aber die Tragkraft der Bleche durch die Lochung für die Nieten oder Bolzen vermindert, und es ist daher dafür zu sorgen, daß diese Kraft nicht von der Tragkraft der Nieten übertroffen werde.

Ist $d$ die Stärke einer Niete und $\nu$ die Anzahl der Nieten bei einer Blechverbindung wie Fig. 331, so hat man die Trag- oder Zugkraft derselben:

$$P = \nu \frac{\pi d^2}{4} \frac{K_2}{n};$$

ist dagegen $b$ die Breite und $s$ die Dicke der zu verbindenden Blechstücke, sowie $\nu_1$ die Anzahl der Nieten neben einander, so hat man den die Kraft $P$ aufnehmenden Querschnitt des Bleches:

$$F = (b - \nu_1 d)\, s, \text{ und daher auch } P = (b - \nu_1 d)\, s\, \frac{K}{n},$$

wo $K$ den Festigkeitsmodul des Eisenbleches bezeichnet, so daß demnach

$$\frac{\nu \pi d^2}{4} K_2 = (b - \nu_1 d)\, s K, \text{ oder}$$

$$\nu = \frac{4\,(b - \nu_1 d)\, s}{\pi d^2} \frac{K}{K_2} \text{ zu setzen ist.}$$

Beim Lochen der Bleche ist jedenfalls auch der Widerstand des Abschiebens zu überwinden, nur hat man es hier nicht mit einer ebenen, sondern mit einer cylindrischen Trennungsfläche zu thun. Ist $s$ die Blechstärke und $d$ der Durchmesser des Loches in dem Bleche, so hat man den Inhalt der Trennungsfläche:

$$F = \pi d s,$$

und folglich die Kraft zum Durchlochen:

$$P = F K_2 = \pi d s K_2.$$

(Vergl. den „Civilingenieur", Band I., 1854, und zwar John Jones' Versuche über den Kraftbedarf zum Lochen von Eisenblechen, von C. Bornemann.)

Beispiele. 1) Eine eiserne Niete von $1\frac{1}{2}$ Zoll Stärke trägt mit Sicherheit, wenn $K_2 = \frac{1}{6} . 4800 = 800$ Pfund angenommen wird, die Last

$$P = \frac{\pi d^2}{4} K_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^2 . 800 = \frac{900 \pi}{2} = 1414 \text{ Pfund},$$

und das Durchstoßen des hierzu nöthigen Loches macht, wenn das Eisenblech $\frac{1}{2}$ Zoll dick ist, die Kraft

$$P_1 = \pi d s . K_2 = \pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4800 = 3600 \pi = 11310 \text{ Pfund}$$

nöthig.

2) Sind zwei Blechstücke durch eine Reihe von Nieten mit einander zu verbinden, so ist bei der Stärke $s$ des Bleches für die nöthige Breite $b$ desselben auf je einen Bolzen:

$$(b - d) s = \frac{\pi d^2}{4} \text{ zu setzen, folglich}$$

$$b = d + \frac{\pi d^2}{4 s} = d \left(1 + \frac{\pi d}{4 s}\right);$$

z. B. für $d = \frac{3}{2}$ und $s = \frac{1}{2}$ Zoll:

$$b = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{3 \pi}{4}\right) = 5 \text{ Zoll}.$$

---

## Zweites Capitel.

## Die Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

**Biegung.** Der einfachste Fall der Biegung eines Körpers $ABC$, Fig. 332 (a. f. S.), tritt dann ein, wenn dieser Körper von einer Kraft $\overline{AP} = P$ ergriffen wird, deren Richtung normal zur Axe $AB$ desselben steht, während er in zwei Punkten $B$ und $C$ festgehalten wird. Sind $l$ und $l_1$ die Entfernungen §. 214

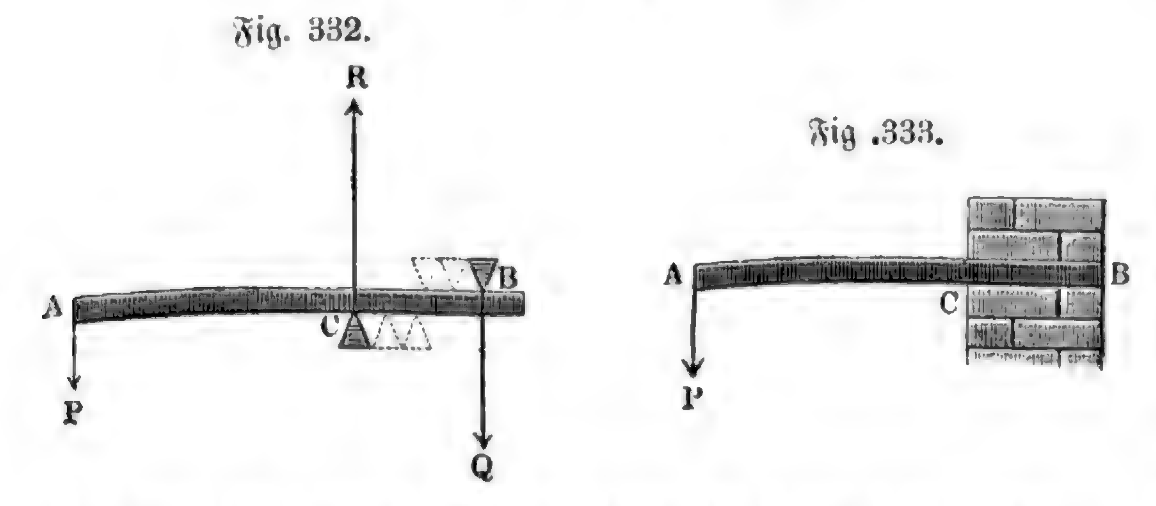
$CA$ und $CB$ der Angriffspunkte $A$ und $B$ von dem mittleren Stütz- oder Angriffspunkte $C$, so hat man dann die Kraft in $B$:

$$Q = \frac{Pl}{l_1},$$

und folglich die Mittelkraft:

$$R = P + Q = \left(1 + \frac{l}{l_1}\right) P.$$

Fig. 332. Fig. 333.



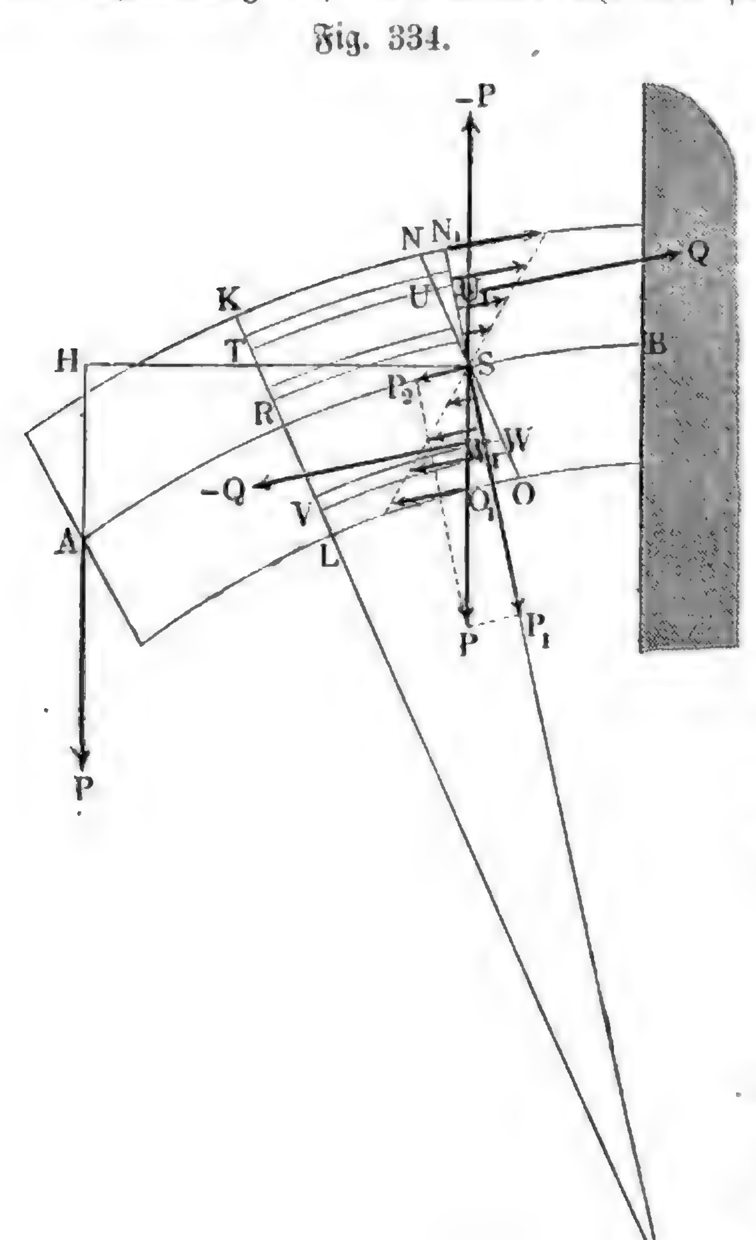

Will man die Biegung der einen Hälfte des Körpers verhindern, so muß man zwischen den Stützpunkten noch unendlich viele andere einschalten, oder den Körper längs $BC$ festklemmen oder einmauern, wie Fig. 333 vor Augen führt, und es bleibt dann nur noch die Biegung des freien Stückes $AC$ des Körpers zu untersuchen übrig.

Setzen wir zunächst einen prismatischen Körper voraus, und nehmen wir an, daß derselbe aus über- und nebeneinanderliegenden Längenfasern zusammengesetzt sei, die während der Biegung weder ihren Parallelismus verlieren, noch sich an einander verschieben.

Bei dieser Biegung werden diejenigen Fasern, welche sich auf der convexen Seite des Körpers befinden, ausgedehnt, und diejenigen, welche der concaven Seite desselben näher liegen, zusammengedrückt, während eine gewisse mittlere Faserschicht, die sogenannte neutrale Axenschicht (franz. couche des fibres invariables; engl. neutral surface of a deflected beam), weder eine Ausdehnung noch eine Zusammendrückung erleidet. Die Ausdehnungen und Zusammendrückungen der verschiedenen Fasern über und unter der neutralen Axenschicht sind den Abständen von dieser Schicht proportional; es nimmt folglich von dieser Axe oder Axenschicht aus die Ausdehnung der Fasern nach der einen Seite und die Zusammendrückung derselben nach der anderen hin allmälig zu, so daß also die von dieser Schicht am meisten abstehenden Fasern einerseits die größte Ausdehnung und andererseits die größte Zusammendrückung erleiden. Ein vor der Biegung von den Querschnitten $KL$ und $NO$ begrenztes Stück des Körpers $AKB$, Fig. 334, nimmt durch die Biegung die Form $KLO_1N_1$ an, wobei der Querschnitt $NO$ in

$N_1 O_1$ übergeht, nämlich seine parallele Lage zu $KL$ verläßt und sich wie $KL$ rechtwinkelig auf die neutrale Axe $RS$ stellt. Die Faserlänge $KN$ geht folglich hierbei in $KN_1$, die Faserlänge $LO$ in $LO_1$ über; es wird also die erstere um $NN_1$ verlängert und die letztere um $OO_1$ verkürzt, während die Faser $RS$ in der neutralen Axe ihre Länge unverändert behält. Zwischenliegende Fasern wie $TU$, $VW$ u. s. w. gehen in $TU_1$ und $VW_1$ über, wobei sie sich um die Größen $UU_1$, $WW_1$ u. s. w. ausdehnen und comprimiren, welche durch die Proportionen

Fig. 334.




$$\frac{UU_1}{NN_1} = \frac{SU}{SN},$$

$$\frac{WW_1}{OO_1} = \frac{SW}{SO} \text{ u. s. w.}$$

bestimmt sind.

Nehmen wir die Länge der Fasern

$$RS = KN = LO = \text{Eins } (1)$$

an und bezeichnen wir die Ausdehnung oder Compression derjenigen Fasern, welche um Eins (1) von der neutralen Axe abstehen, durch $\sigma$, so haben wir folglich für eine Faser, welche um $SU$ oder $SW = z$ von dieser Axe entfernt ist, die Ausdehnung oder Compression

$$UU_1 \text{ oder } WW_1 = \sigma z.$$

Ist der Körper nur wenig gebogen, so daß hierbei die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten wird, so kann man die spannenden Kräfte der verschiedenen Fasern ihren Ausdehnungen u. s. w. proportional setzen, und folglich auch annehmen, daß diese Kräfte proportional ihren Abständen von der neutralen Axe wachsen, wie auch in der Figur durch Pfeile angedeutet wird.

Wenn der Querschnitt einer Faser = Eins ist, so haben wir folglich allgemein die Spannungskraft derselben (s. §. 204):

$$= \sigma z E;$$

hat ferner eine Faser den Querschnitt $= F$, so beträgt ihre Zug- oder Druckkraft:

$$S = \sigma z F E = \sigma E \,.\, F z,$$

und es ist ihr Moment in Hinsicht auf den Axenpunkt $S$:

$$M = z \,.\, \sigma z F E = \sigma z^2 F E = \sigma E \,.\, F z^2.$$

§. 215 **Biegungsmoment.** Die sämmtlichen Zug- und Druckkräfte in einem Querschnitte $N_1 O_1$ halten der Biegungskraft $P$ am Ende $A$ des Körpers $AB$ das Gleichgewicht; es lassen sich daher auf diese Kräfte die bekannten Gesetze des Gleichgewichtes anwenden. Denkt man sich in $S$ noch zwei Kräfte $+ P$ und $- P$ wirksam, welche nicht nur der gegebenen Biegungskraft $P$ gleich, sondern auch mit derselben gleichgerichtet sind, so erhält man

1) ein Kräftepaar $(P, - P)$, welches die Biegung oder Drehung um $S$ hervorbringt und

2) eine einfache Schubkraft $\overline{SP} = P$, welche das Körperstück $AS$ in der Richtung von $SP$ oder $AP$ von dem übrigen Körper abzuschieben sucht. Die letztere Kraft läßt sich noch in zwei Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$ zerlegen, deren Richtungen in die Ebene des Querschnittes $N_1 O_1$ und in die neutrale Axe $SR$ fallen. Ist $\alpha$ der Winkel, um welchen der Querschnitt $N_1 O_1$ von der Richtung $AP$ der Biegungskraft abweicht, so hat man:

$$P_1 = P \cos. \alpha \text{ und}$$
$$P_2 = P \sin. \alpha.$$

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ist die Biegung der Körper und also auch $\alpha$ so klein, daß man $\sin. \alpha = 0$ und $\cos. \alpha = 1$, folglich die Seitenkraft $P_2$, welche das Stück $AS$ in $N_1 O_1$ abzureißen sucht, ganz vernachlässigen, und dagegen die Kraft $P_1$, welche das Stück $AS$ in $N_1 O_1$ abzuscheeren sucht, der Biegungskraft $P$ gleichsetzen kann. Bezeichnet $F$ den Inhalt des Querschnittes $N_1 O_1$ und $K_2$ den Modul der Schubfestigkeit, so ist die Kraft zum Abschieben durch das Product $F K_2$ (s. §. 213) bestimmt. Hat man es mit längeren prismatischen Körpern zu thun, so ist meistens $P$ ein so kleiner Theil von $F K_2$, daß ein solches Abschieben durch $P$ selten eintreten kann, weshalb wir es daher auch im Folgenden nur in besonderen Fällen in Untersuchung ziehen. (S. das folgende Capitel.)

Da einem Kräftepaare $(P, - P)$ nur durch ein anderes Kräftepaar das Gleichgewicht gehalten werden kann, so folgt, daß die Ausdehnungskräfte auf der einen Seite von $S$ mit den Zusammendrückungskräften auf der anderen Seite ein anderes Kräftepaar $(Q, - Q)$ bilden, und daß die Momente beider Paare einander gleich sein müssen. Sind $F_1$, $F_2$, $F_3$ u. s. w. Elemente oder unendlich kleine Theile von der ganzen Fläche $F$ des Querschnittes $NO = N_1 O_1$, und bezeichnet man die Abstände dieser Theile von der neutralen Axe oder $S$ durch $z_1$, $z_2$, $z_3$ u. s. w., so hat man die Spannkräfte derselben:

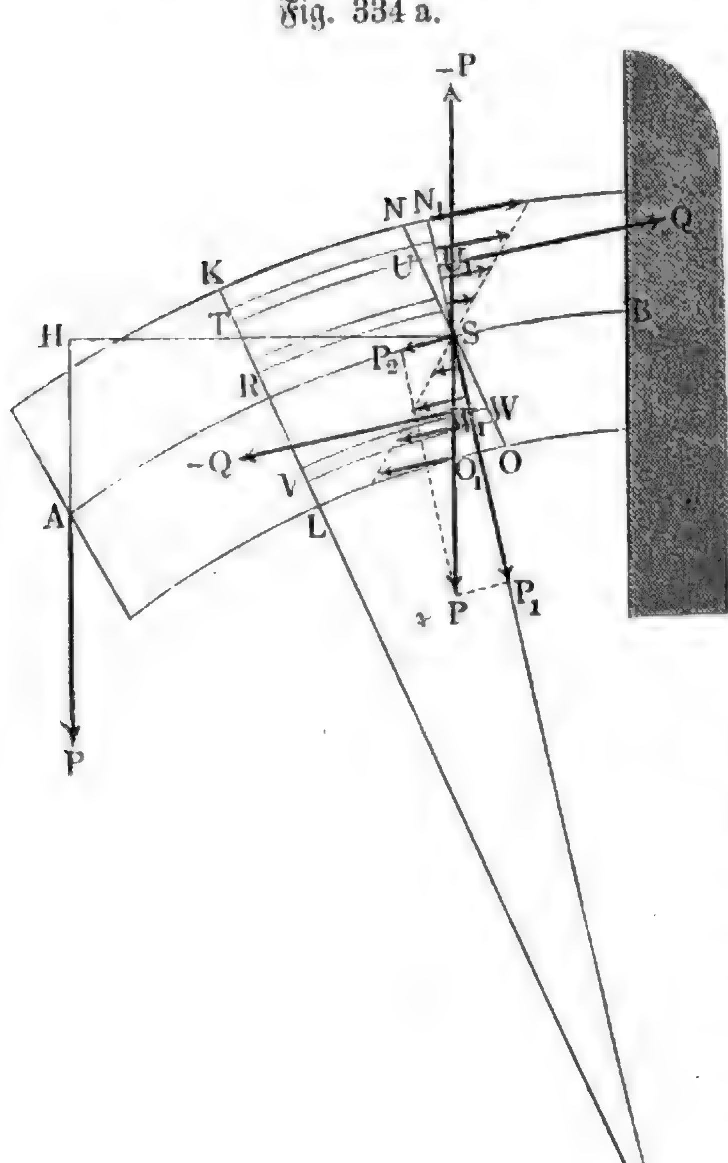
$$\sigma E . F_1 z_1,\ \sigma E . F_2 z_2,\ \sigma E . F_3 z_3 \text{ u. s. w.}$$

und ihre Momente:

$$\sigma E . F_1 z^2,\ \sigma E . F_2 z_2^2,\ \sigma E . F_3 z_3^2 \text{ u. s. w.}$$

Da diese Kräfte ein Kräftepaar ($Q$, — $Q$) bilden, so muß ihre Summe
$\sigma E\, (F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \cdots)$, und folglich auch
$F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \cdots =$ Null sein.

Fig. 334 a.




Diese Summe ist aber nur dann Null, wenn der Axpunkt $S$ mit dem Schwerpunkte der Fläche $F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$ zusammenfällt; es geht folglich die **neutrale Axe** des **gebogenen Körpers** durch den **Schwerpunkt** $S$ **seines Querschnittes** $F$. Das Moment des Kräftepaares ($Q$, — $Q$)

$$\sigma E\, (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + F_3 z_3^2 + \cdots)$$

ist natürlich dem Momente des Kräftepaares ($P$, — $P$) gleich zu setzen. Bezeichnen wir nun den Abstand $SH$ des Schwer- oder Axpunktes $S$ von der Richtung $AP$ der Biegungskraft durch $x$, so haben wir das Moment des letzteren Paares $= Px$, und daher

$$Px = \sigma E\, (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots)$$ zu setzen.

Endlich haben wir noch für den Krümmungshalbmesser $MR = MS$ der neutralen Faserschicht die Proportion

$$\frac{MR}{RS} = \frac{SU}{UU_1},$$

oder, wenn man $MR = r$, $RS = 1$, $SU = 1$ und $UU_1 = \sigma$ einsetzt,

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{\sigma}.$$

Es ist folglich $r\sigma = 1$, oder $\sigma = \frac{1}{r}$, demnach das Kraftmoment:

$$Px = \frac{E}{r}(F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots),$$

und endlich der Krümmungshalbmesser an der Stelle $S$:

$$r = \frac{E}{Px}(F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots).$$

Der Ausdruck $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ hängt nur von der Form und Größe des Querschnittes ab, und läßt sich daher auf dem Wege der Geometrie ermitteln. Wir werden ihn in der Folge durch $W$ bezeichnen und die ihm entsprechende Größe das **Maß des Biegungsmomentes**, sowie $WE$ das **Biegungsmoment** (franz. moment de flexion; engl. momentum of flexion) selbst nennen. Hiernach ist der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{WE}{Px}, \text{ und zu behaupten:}$$

> **der Krümmungshalbmesser der neutralen Axe eines gebogenen Körpers wächst mit dem Maße $W$ des Biegungsmomentes und dem Elasticitätsmodul $E$ direct und dagegen mit dem Kraftmomente $Px$ umgekehrt proportional.**

Die Krümmung selbst ist dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional, und wächst daher wie das Kraftmoment $Px$ und umgekehrt wie das Biegungsmoment $WE$.

§. 216 **Elastische Linie.** Hat man für die Querschnitte der gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Körper die Biegungsmomente $WE$ bestimmt, so kann man durch dieselben auch die Krümmung und hieraus wieder die Gestalt der neutralen Axe oder der sogenannten **elastischen Linie** ermitteln. Die Gleichung

$$Pxr = WE \text{ oder } r = \frac{WE}{Px}$$

sagt uns, daß bei einem prismatischen Körper das Product aus Krümmungshalbmesser und Kraftmoment für alle Punkte der **elastischen Linie** $AB$, Fig. 335, eins und dasselbe ist, daß folglich $r$ um so größer oder kleiner ausfällt, je kleiner oder größer der Hebelarm $x$ der Kraft ist, oder je näher oder entfernter der in Betrachtung zu ziehende Punkt $S$ dem Ende $A$ der neutralen Axe liegt. In $A$ ist $x = 0$, und folglich der Krümmungshalbmesser unendlich groß, im festen Punkte $B$ ist dagegen $x$ am größten und daher der Krümmungshalbmesser am kleinsten; es nimmt also derselbe, wenn man vom festen Punkte $B$ allmälig nach dem Endpunkte $A$ zu fortschreitet, von einem gewissen endlichen Werthe an, nach und nach bis ins Unendliche zu.

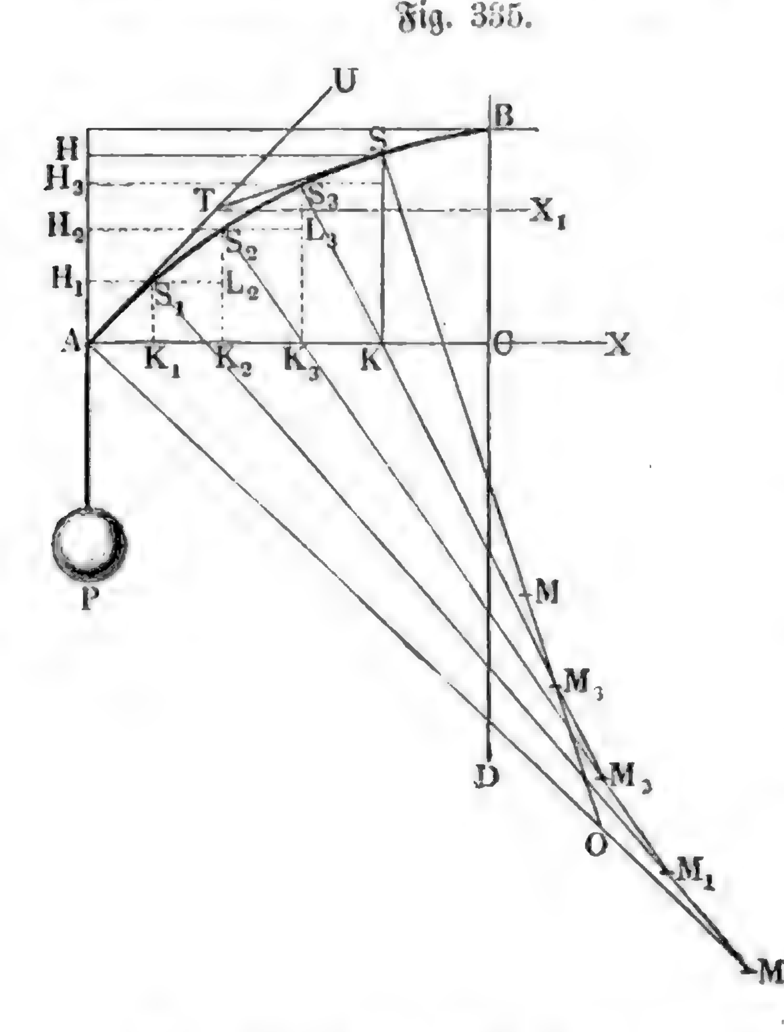
Theilt man ein Stück $AS$ der elastischen Linie, dessen Länge $= s$ sein möge, in lauter gleiche Theile, und errichtet man in den End- und Theilpunkten $A$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ u. s. w. Perpendikel auf die Curve, so schneiden sich dieselben in den Mittelpunkten $M_0$, $M_1$, $M_2$ der Krümmungskreise, und es sind folglich

die Abschnitte $M_0 A = M_0 S_1$, $M_1 S_1 = M_1 S_2$, $M_2 S_2 = M_2 S_3$ u. s. w. die gesuchten **Krümmungshalbmesser** (s. analyt. Hülfslehren Art. 33) $r_1, r_2, r_3$ u. s. w. der elastischen Linie. Ist $n$ die Anzahl der Theile dieser Linie, so hat man die Größe eines Theiles, $= \frac{s}{n}$, und bezeichnet man die Bogenmaße (für den Radius = 1) der **Krümmungswinkel** $AM_0S_1 = \delta_1^0$, $S_1 M_1 S_2 = \delta_2^0$, $S_2 M_2 S_3 = \delta_3$ u. s. w. durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ u. s. w. schlechtweg, so läßt sich

$$\frac{s}{n} = \delta_1 r_1 = \delta_2 r_2 = \delta_3 r_3$$

u. s. w. setzen, wonach sich nun $\delta_1 = \frac{s}{n r_1}$, $\delta_2 = \frac{s}{n r_2}$, $\delta_3 = \frac{s}{n r_3}$ u. s. w. bestimmt.

Fig. 335.




Wenn wir noch voraussetzen, daß die elastische Linie nur wenig gebogen ist, so können wir die Projectionen der Bogentheile in der rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung gelegten Abscissenaxe $A X$ diesen Bogentheilen gleich, also $A K_1 = H_1 S_1 = K_1 K_2 = K_2 K_3$ u. s. w. setzen, so daß nun die Hebelarme der Kraft $P$ in Hinsicht auf die Punkte $S_1$, $S_2$, $S_3$ u. s. w.

$$H_1 S_1 = \frac{s}{n},$$

$$H_2 S_2 = H_1 S_1 + S_1 L_2 = 2 \frac{s}{n},$$

$$H_3 S_3 = H_2 S_2 + S_2 L_3 = 3 \frac{s}{n} \text{ u. s. w.}$$

und folglich die entsprechenden Kraftmomente oder Werthe für $P x$ folgende sind:

$$\frac{Ps}{n}, \frac{2 Ps}{n}, \frac{3 Ps}{n} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man endlich diese Werthe in die obige Formel $r = \frac{WE}{Px}$ für den Krümmungshalbmesser, statt $P x$ nach und nach ein, so erhält man folgende Reihe für die Krümmungshalbmesser:

$$r_1 = n\,\frac{WE}{Ps},\ r_2 = \frac{n}{2}\,\frac{WE}{Ps},\ r_3 = \frac{n}{3}\,\frac{WE}{Ps}\ \text{u. s. w.},$$

und daher für die entsprechenden Krümmungsmaße:

$$\delta_1 = \frac{s}{n\,r_1} = \frac{Ps^2}{n^2\,WE},\ \delta_2 = \frac{s}{n\,r_2} = 2\,.\,\frac{Ps^2}{n^2\,WE},$$

$$\delta_3 = \frac{s}{n\,r_3} = 3\cdot\frac{Ps^2}{n^2\,WE}\ \text{u. s. w.}$$

Durch Summation dieser Winkelmaße ergiebt sich nun für den Krümmungswinkel $AOS = \varphi^0$ des ganzen Bogens $AS = s = x$:

$$\varphi = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\,\frac{Ps^2}{n^2\,WE},$$

oder, da, wie bekannt, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2}$ zu setzen ist,

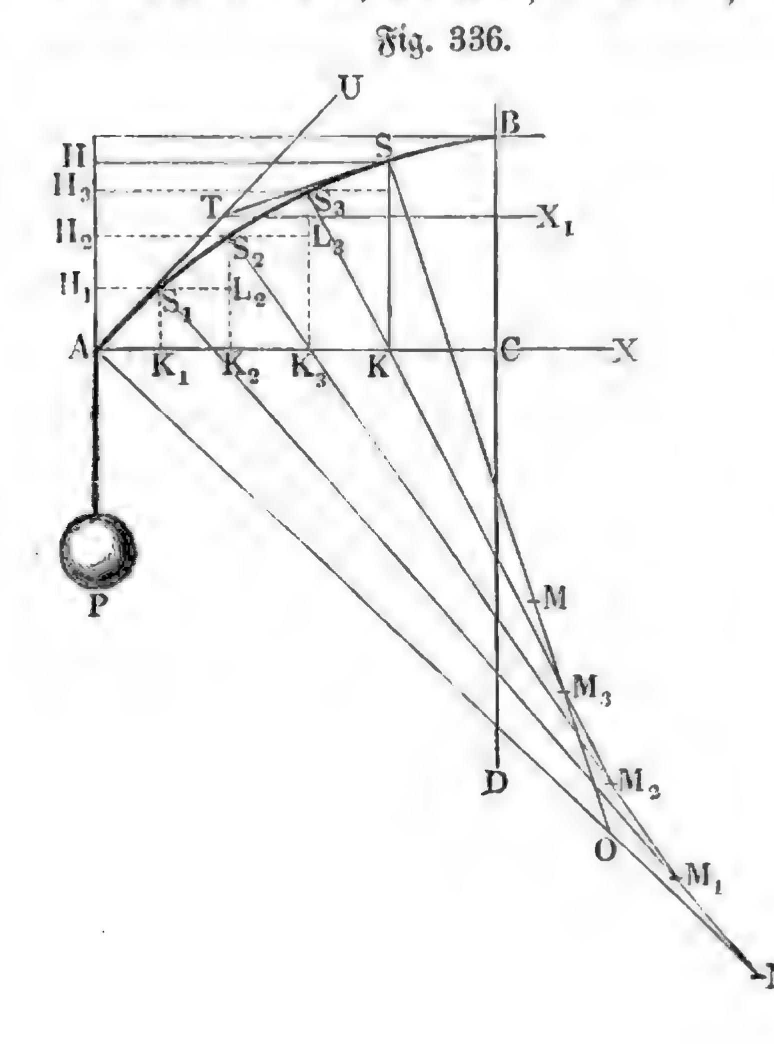
$$\varphi = \frac{n^2}{2}\cdot\frac{Ps^2}{n^2\,WE} = \frac{Ps^2}{2\,WE},$$

wofür unter der gemachten Voraussetzung natürlich auch

$$\varphi = \frac{Px^2}{2\,WE}\ \text{gesetzt werden kann.}$$

Dieser Bogen oder Winkel drückt, da der Winkel zwischen zwei Linien gleich ist dem Winkel zwischen den Normalen zu diesen Linien, auch den Winkel $STU$ aus, um welchen die durch $A$ und $S$ gelegten Berührungslinien $AT$ und $ST$ von einander abweichen, oder um welchen die Curve in $A$ mehr gegen die Abscissenaxe geneigt ist als in $S$.

Fig. 336.




Gehen wir von einem unbestimmten Punkte $S$ auf den festen Endpunkt $B$ über, so haben wir statt $s$ die ganze Länge $l$ von $ASB$, oder annähernd, die Projection $AC$ derselben in der Abscissenaxe einzusetzen, und es geht dann, unter der Voraussetzung, daß in $B$ die Curve rechtwinkelig zur Kraftrichtung, also mit der Abscissenaxe parallel läuft, der Winkel $\varphi$ in

$$ADB = \beta = \frac{Pl^2}{2WE},$$

dagegen aber der Neigungs- oder Tangentenwinkel $TSH = STX_1$ in

$$\alpha = \beta - \varphi = \frac{Pl^2}{2WE} - \frac{Ps^2}{2WE} = \frac{P(l^2 - s^2)}{2WE} = \frac{P(l^2 - x^2)}{2WE} \text{ über.}$$

Wäre die Curve im festen Punkte $B$ nicht genau rechtwinkelig auf der Kraftrichtung, sondern hätte sie an dieser Stelle einen kleinen Neigungswinkel $\alpha_1$, so würde sein:

$$\beta = \alpha_1 + \frac{Pl^2}{2WE} \text{ und daher:}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{P(l^2 - x^2)}{2WE}.$$

**Gleichung der elastischen Linie.** Mit Hülfe der letzten Formel kann man nun auch die Gleichung der elastischen Linie entwickeln. Die Ordinate $KS = y$ dieser Curve läßt sich aus unendlich vielen ($n$) Stücken, wie z. B. $K_1 S_1$, $L_2 S_2$, $L_3 S_3$ u. s. w. zusammensetzen, welche sich durch Multiplication eines Bogenelementes §. 217

$$AS_1 = S_1 S_2 = S_2 S_3 \text{ etc.} = \frac{s}{n}$$

mit den Sinus der entsprechenden Tangentenwinkel $S_1 A K_1$, $S_2 S_1 L_2$, $S_3 S_2 L_3$ u. s. w. bestimmen lassen. Es ist

$$KS = K_1 S_1 + L_2 S_2 + L_3 S_3 + \cdots, \text{ oder}$$

$$y = \frac{s}{n} (sin.\, S_1 AK + sin.\, S_2 S_1 L_2 + sin.\, S_3 S_2 L_3 + \cdots),$$

also, wenn man die Abscisse $AK = x$ statt des Bogens $AS = s$ einführt, und die letzten Sinus durch nach der Formel

$$\alpha = \frac{P(l^2 - x^2)}{2WE}$$

zu berechnende Bögen ersetzt, indem man für $x$ nach und nach $\frac{x}{n}$, $\frac{2x}{n}$, $\frac{3x}{n}$ u. s. w. einführt.

$$y = \frac{x}{n} \cdot \frac{P}{2WE} \left[ l^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{2x}{n}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{3x}{n}\right)^2 + \cdots + l^2 - \left(\frac{nx}{n}\right)^2 \right].$$

Nun läßt sich aber $l^2 + l^2 + \cdots + l^2 = n l^2$ und

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \left(\frac{3x}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{nx}{n}\right)^2$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{n^3}{3} \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

setzen (s. „Ingenieur“, Seite 88); es folgt daher:

$$y = \frac{x}{n} \cdot \frac{P}{2\,WE}\left[n\,l^2 - \frac{n^3}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^2\right], \text{ oder}$$

$$y = \frac{Px\,(l^2 - \frac{1}{3}\,x^2)}{2\,WE},$$

die gesuchte Gleichung der elastischen Linie, unter der Voraussetzung, daß dieselbe nur wenig gekrümmt ist.

Setzt man in dieser Gleichung $x = l$, so erhält man statt $x$ die Bogenhöhe

$$\overline{BC} = a = \frac{Pl^3}{3\,WE}.$$

Während also der Tangentenwinkel $\alpha$ wie die Kraft und wie das Quadrat der Länge wächst, nimmt die Bogenhöhe oder Einbiegung $a$ wie die Kraft und wie der Cubus der Länge des gebogenen Körpers zu.

Die mechanische Arbeit $L$, welche zum Biegen des Körpers aufzuwenden ist, bestimmt sich, da die Kraft

$$P = \frac{3\,WEa}{l^3}$$

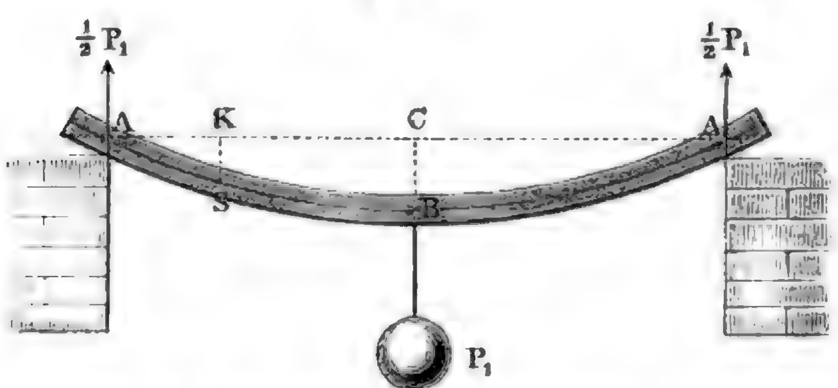
mit ihrem Wege gleichmäßig wächst, sich also im Mittel

$$\frac{1}{2}\,P = \frac{3}{2}\,\frac{WEa}{l^3} \text{ setzen läßt, durch den Ausdruck:}$$

$$L = \frac{1}{2}\,Pa = \frac{3}{2}\,\frac{WEa^2}{l^3} = \frac{1}{6}\,\frac{P^2\,l^3}{WE}.$$

Wird ein Balken $ABA$, Fig. 337, von der Länge $AA = l$, in den Enden unterstützt und in der Mitte $B$ von einer Kraft $P_1$ ergriffen, so bie-

Fig. 337.




gen sich die Enden desselben genau in derselben Curve wie in dem soeben behandelten und in Fig. 333 abgebildeten Falle, nur hat man hier die Kraft in $A_1 = \frac{1}{2}\,P_1$, und die Bogenlänge $AB = \frac{1}{2}\,AA = \frac{1}{2}\,l$ zu setzen. Es ist folglich hier für die Coordinaten $AK = x$ und $KS = y$ die Gleichung

$$y = \frac{P_1 x (\frac{1}{4} l^2 - \frac{1}{3} x^2)}{4 WE} = \frac{P_1 x (3 l^2 - 4 x^2)}{48 WE},$$

so daß sich für $x = \overline{AC} = \frac{l}{2}$, die Bogenhöhe

$$y = \overline{BC} = a_1 = \frac{P_1 l^3}{48 WE} = \frac{1}{16} \cdot \frac{P_1 l^3}{3 WE},$$

d. i. ein Sechszehntel von der Bogenhöhe des durch ein gleiches Gewicht am Ende belasteten Balkens (Fig. 333), ergiebt.

Wenn für den ersten Fall die elastische Linie $AB$, Fig. 336, im festen Punkte $B$ schon eine kleine Neigung $\alpha_1$ hat, so ist zum obigen Ausdrucke für $y$ noch die Verticalprojection eines Tangentenstückes $x$, d. i. $\alpha_1 x$ zu addiren, so daß sich dann die Ordinate

$$y = \left(\alpha_1 + \frac{P(l^2 - \frac{1}{3} x^2)}{2 WE}\right) x$$

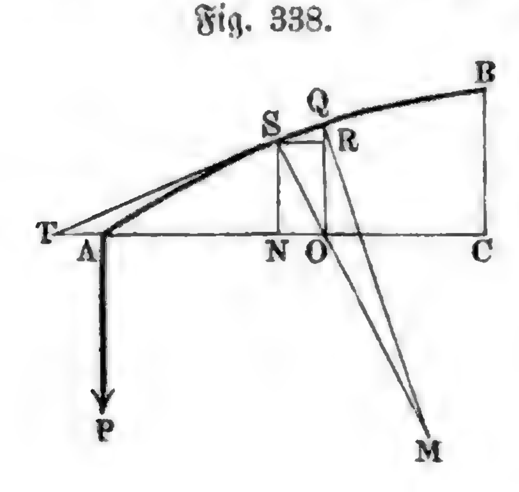
sowie die Bogenhöhe

$$a = \left(\alpha_1 + \frac{P l^2}{3 WE}\right) l$$

herausstellt.

**Allgemeinere Gleichung der elastischen Linie.** (§. 218) Eine schärfere Gleichung der von der neutralen Axe eines gebogenen Balkens gebildeten elastischen Linie $ASB$, Fig. 338, läßt sich durch den höheren Calcul auf folgende Weise finden. Setzen wir in der allgemeinen Gleichung des §. 216, $WE = Pxr$ für den Krümmungshalbmesser (aus Art. 33 der analytischen Hülfslehren) den Werth

Fig. 338.




$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial (tang.\, \alpha)}$$

ein, und hierin wieder, nach Art. 32:

$$\partial s = \sqrt{1 + (tang.\, \alpha)^2} . \partial x,$$

so erhalten wir:

$$WE = -\frac{P x \partial x\, [1 + (tang.\, \alpha)^2]^{3/2}}{\partial\, tang.\, \alpha}.$$

Bei einer mäßigen Biegung des Balkens ist aber der Winkel $\alpha$, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenaxe einschließt, nur klein, und es läßt sich daher

$$[1 + (tang.\, \alpha)^2]^{3/2} \text{ annähernd } = 1 + \frac{3}{2} (tang.\, \alpha)^2$$

setzen, weshalb nun

$$W E = -\frac{P x\,[1 + \,^3/_2\,(tang.\,\alpha)^2]\,\partial x}{\partial\,(tang.\,\alpha)}$$, oder umgekehrt,

$$\frac{P x \partial x}{W E} = -\frac{\partial\, tang.\,\alpha}{1 + \,^3/_2\,(tang.\,\alpha)^2} = -\,[1 - \,^3/_2\,(tang.\,\alpha)^2]\,\partial\,(tang.\,\alpha)$$

folgt.

Hiernach ergiebt sich:

$$\int \frac{P x \partial x}{W E} = -\int \partial\,(tang.\,\alpha) + \,^3/_2 \int (tang.\,\alpha)^2\,\partial\,(tang.\,\alpha),$$

d. i. nach Art. 18 der analyt. Hülfslehren:

$$\frac{P x^2}{2\,W E} = -\,tang.\,\alpha + \,^1/_2\,(tang.\,\alpha)^3 + Con.$$

Nun ist aber in dem Scheitel $B$ die Curve parallel zur Abscissenaxe, also $\alpha = 0$; setzen wir daher die Projection $CA$ der elastischen Linie in der Abscissenaxe $= b$, so erhalten wir:

$$\frac{P b^2}{2\,W E} = -\,tang.\,0 + \,^1/_2\,(tang.\,0)^3 + Con. = 0 + Con.,$$

und daher durch Subtraction dieser Gleichungen:

$$\frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,W E} = tang.\,\alpha - \,^1/_2\,(tang.\,\alpha)^3;$$

und umgekehrt, für den Tangentenwinkel $S T N = \alpha$:

$$tang.\,\alpha = \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,W E} + \,^1/_2\,(tang.\,\alpha)^3$$

$$= \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,W E} + \,^1/_2\,\frac{P^3\,(b^2 - x^2)^3}{8\,W^3 E^3},$$

d. i.:

$$1)\;\; tang.\,\alpha = \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,W E}\left(1 + \frac{P^2\,(b^2 - x^2)^2}{8\,W^2 E^2}\right).$$

Nun ist ferner $tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, daher folgt:

$$\partial y = \left(1 + \frac{P^2\,(b^2 - x^2)^2}{8\,W^2 E^2}\right)\frac{P\,(b^2 - x^2)\,\partial x}{2\,W E},$$ und

$$y = \frac{P}{2\,W E}\left(\int (b^2 - x^2)\,\partial x + \frac{P^2}{8\,W^2 E^2}\int (b^2 - x^2)^3\,\partial x\right)$$

$$= \frac{P}{2\,W E}\Big[\int b^2\,\partial x - \int x^2\,\partial x$$

$$+ \frac{P^2}{8\,W^2 E^2}\left(\int b^6\,\partial x - \int 3\,b^4 x^2\,\partial x + \int 3\,b^2 x^4\,\partial x - \int x^6\,\partial x\right)\Big]$$

$$= \frac{P}{2\,W E}\left[b^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{P^2}{8\,W^2 E^2}\left(b^6 x - b^4 x^3 + \frac{3\,b^2 x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\right]$$

$$+ Con.$$

Da mit $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so hat man auch $Con. = 0$, und

$$2)\ y = \frac{Px}{2\,WE}\left[b^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{P^2}{8\,W^2 E^2}\left(b^6 - b^4 x^2 + {}^3/_5\, b^2 x^4 - \frac{x^6}{7}\right)\right].$$

Im Scheitel ist $x = b$ und $y$ die Bogenhöhe $CB = a$, daher folgt:

$$a = \frac{P}{2\,WE}\left({}^2/_3\, b^3 + \frac{P^2}{8\,W^2 E^2} \cdot {}^{16}/_{35} \,.\, b^7\right),$$

d. i.:

$$3)\ a = \frac{Pb^3}{3\,WE}\left(1 + {}^3/_{35}\,\frac{P^2 b^4}{W^2 E^2}\right).$$

Aus $\partial s = \sqrt{1 + (tang.\,\alpha)^2} \,.\, \partial x = [1 + {}^1/_2\,(tang.\,\alpha)^2]\,\partial x$ ergiebt sich, wenn man $tang.\,\alpha = \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,WE}$ substituirt:

$$s = \int\left(1 + {}^1/_8 \,.\, \frac{P^2\,(b^2 - x^2)^2}{W^2 E^2}\right)\partial x$$

$$= \int \partial x + \frac{P^2}{8\,W^2 E^2}\left[\int\left(b^4\,\partial x - 2\,b^2 x^2\,\partial x + x^4\,\partial x\right)\right]$$

$$= x + \frac{P^2}{8\,W^2 E^2}\left(b^4 x - \frac{2\,b^2\,x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right),$$

d. i. die Bogenlänge:

$$4)\ s = \left[1 + \frac{P^2}{8\,W^2 E^2}\left(b^4 - {}^2/_3\, b^2 x^2 + \frac{x^4}{5}\right)\right] x.$$

Nimmt man $x = b$ an, so ergiebt sich die ganze Länge des Balkens:

$$5)\ l = \left(1 + \frac{P^2 b^4}{15\,W^2 E^2}\right) b = \left(1 + {}^3/_5 \,.\, \frac{a^2}{b^2}\right) b.$$

Umgekehrt erhält man:

$$6)\ b = \frac{l}{1 + \frac{P^2 b^4}{15\,W^2\,E^2}} = \left(1 - \frac{P^2 l^4}{15\,W^2 E^2}\right) l,$$

und daher:

$$a = \frac{Pl^3}{3\,WE}\left(1 - \frac{P^2 l^4}{15\,W^2 E^2}\right)^3\left(1 + {}^3/_{35} \,.\, \frac{P^2 l^4}{W^2 E^2}\right), \text{ oder}$$

$$= \frac{Pl^3}{3\,WE}\left(1 - \frac{3\,P^2 l^4}{15\,W^2 E^2}\right)\left(1 + {}^3/_{35} \,.\, \frac{P^2 l^4}{W^2 E^2}\right),$$

d. i.:

$$7)\ a = \frac{Pl^3}{3\,WE}\left(1 - {}^4/_{35} \,.\, \frac{P^2 l^4}{W^2 E^2}\right).$$

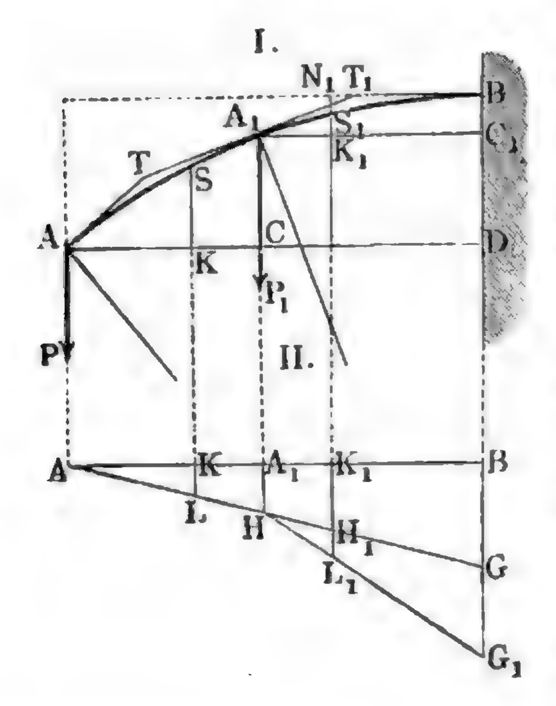
Vernachlässigen wir alle Glieder mit den Potenzen von $\frac{P}{WE}$, so erhalten wir, wie in dem vorigen Paragraphen:

$$tang.\,\alpha = \frac{P(l^2 - x^2)}{2\,W E} \text{ und } y = \frac{P x}{2\,W E}(l^2 - \tfrac{1}{3} x^2), \text{ daher}$$

für $x = 0$, $tang.\,\alpha = \frac{Pl^2}{2\,WE}$, und für $x = b = l$, $y = a = \frac{Pl^3}{3\,WE}$.

§. 219 **Biegung durch zwei Kräfte.** Wird ein an einem Endpunkte $B$ fest eingeklemmter Balken $A A_1 B_1$, Fig. 339, I. u. II., von zwei Kräften $P$ und $P_1$ gebogen, deren Angriffspunkte $A$ und $A_1$ von einander um $l$ abstehen, während der Angriffspunkt $A_1$ der Kraft $P_1$ um $A_1 B = l_1$ von dem festen Punkte $B$ entfernt ist, so fällt das Biegungsmoment in einem Punkte $S$ des Stückes $A A_1$:

Fig. 339.




$$M = Px,$$

und dagegen das in einem Punkte $S_1$ des Stückes $A_1 B$:

$$M_1 = P(l + x_1) + P_1 x_1$$

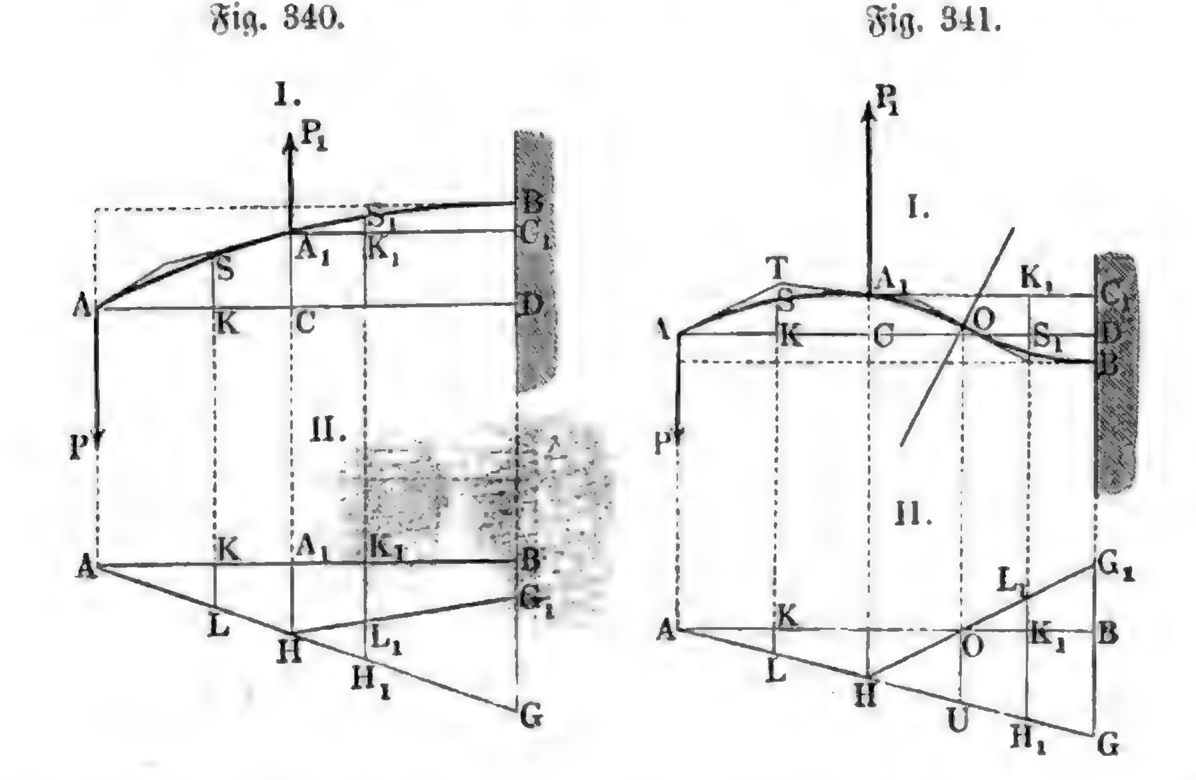
aus, wobei $x$ und $x_1$ die Abscissen $AK$ und $A_1 K_1$ bezeichnen.

Um ein anschauliches Bild von der Veränderlichkeit dieser Momente zu finden, kann man die verschiedenen Werthe derselben in den entsprechenden Punkten als Ordinaten, wie $M = y = \overline{KL}$, $M_1 = y_1 = \overline{K_1 L_1}$ u. s. w. in II, auftragen, und die Endpunkte $L$, $L_1$ u. s. w. derselben durch einen Zug $A L H L_1 G_1$ verbinden, welcher dann die sämmtlichen Werthe von $M$ und $M_1$ über der ganzen Balkenlänge $AB$ begrenzt. Wäre der Balken nur durch die Kraft $P$ gespannt, so würde der Zug, welcher die sämmtlichen Werthe von $M$ oder $y = Px$ begrenzt, in einer geraden Linie $AG$ bestehen, deren Endpunkt $G$ die Ordinate $\overline{BG} = P.\overline{AB} = P(l + l_1)$ ist. Durch den Hinzutritt der Kraft $P_1$ wird aber das Stück $HG$ dieser geraden Linie in die Gerade $HG_1$ umgeändert, deren Endpunkte $H$ und $G_1$ durch die Coordinaten $\overline{A A_1} = l$ und $\overline{A_1 H} = Pl$, sowie $\overline{AB} = l + l_1$ und $\overline{B G_1} = \overline{BG} + \overline{G G_1} = P(l + l_1) + P_1 l_1$ bestimmt sind.

Ist die Kraft $P_1$ negativ, so bleibt zwar das Moment eines Punktes $K$ innerhalb $\overline{A A_1} = l$, $M = y = Px$, dagegen geht das Moment eines Punktes $K_1$ innerhalb $A_1 B$ in $M_1 = y_1 = P(l + x_1) - P_1 x_1$ über, und es fällt das Moment der Biegung im festen Punkte $B$, $= P(l + l_1) - P_1 l_1$, und zwar positiv oder negativ aus, je nachdem $P(l + l_1)$ größer

oder kleiner als $P_1 l_1$ ist. In beiden Fällen nimmt das Biegungsmoment von $A_1$ aus allmälig ab, bleibt im ersten Falle, Fig. 340, immer positiv,

Fig. 340. Fig. 341.




fällt dagegen im zweiten Falle, Fig. 341, in einem Punkte $O$, welcher um $A_1 O = x_1 = \frac{Pl}{P_1 - P}$ von $A_1$ absteht, Null aus, nimmt dann für größere Werthe das negative Zeichen an, und ist im festen Punkte $B$,

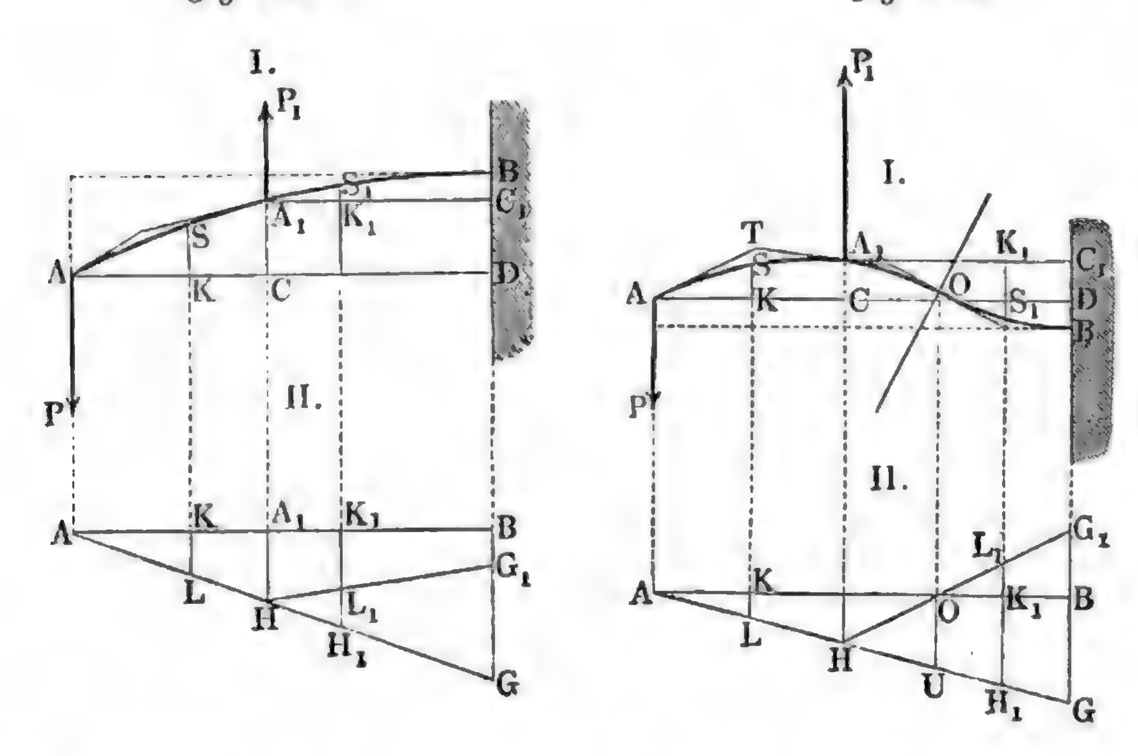
$$= -[P_1 l_1 - P(l + l_1)].$$

Im ersteren Falle zieht sich die gerade Linie $HG_1$, Fig. 340, II., welche das Biegungsmoment in einem Punkte $K_1$ zwischen $A$ und $B$ darstellt, unter der Grundlinie $AB$ hin, und endigt sich im Punkte $G_1$, dessen Ordinate $\overline{BG_1} = P(l + l_1) - P_1 l_1$ ist; im zweiten Falle steigt dagegen diese Gerade $HG_1$, Fig. 341, II., vom Punkte $O$ aus über $AB$, wobei die Ordinaten $K_1 L_1 = y_1 = -[P_1 x_1 - P(l + x_1)]$, und $BG_1 = a_1 = -[P_1 l_1 - P(l + l_1)]$ ausfallen.

Da der Krümmungshalbmesser $r = \frac{WE}{M}$ des Balkens umgekehrt und folglich die Krümmung selbst direct wie das Biegungsmoment $M$ wächst, so geben die graphischen Darstellungen in II. der Figuren 339, 340 und 341 auch zugleich ein Bild von der Veränderlichkeit der Krümmung des Balkens an. Es nimmt also hiernach in dem Falle Fig. 339, wo $P_1$ und $P$ eine gleiche Richtung haben, die Krümmung des Balkens, von $A$ nach $B$ gegangen, allmälig zu, nimmt dagegen in den Fällen, wo $P$ und $P_1$ entgegengesetzt gerichtet sind, von $A_1$ an allmälig wieder ab. Ist hierbei $P_1 l_1 < P(l + l_1)$, wie in Fig. 340, so wird der Balken nur nach einer Seite hin gebogen; ist

dagegen $P_1 l_1 > P(l + l_1)$, so fällt die Biegung nicht allein in $A$, sondern auch im Punkte $O$, wo ein sogenannter Wendepunkt (siehe analytische Hülfslehren, Art. 14) entsteht, Null aus, und es nimmt der Balken zwischen $O$ und $B$ eine allmälig wachsende Biegung in entgegengesetzter Richtung an.

Fig. 342. Fig. 343.




Sind im zweiten Falle, Fig. 342, die Kräfte $P_1$ und $P$ der Größe nach einander gleich, so fällt für die Punkte $K_1$ zwischen $A_1$ und $B$,

$$M = P(l + x_1) - P x_1 = Pl,$$

also constant aus; dann ist also auch die Krümmung des Balkenstückes $A_1 B$ überall dieselbe, d. i. die eines Kreises.

Der Krümmungshalbmesser des Stückes $A A_1$ bestimmt sich in allen drei Fällen mittels der bekannten Formel:

$$r = \frac{WE}{Px},$$

und der des Stückes $A_1 B$, im ersten Falle nach der Formel:

$$r_1 = \frac{WE}{P(l + x_1) + P_1 x_1},$$

dagegen im zweiten und dritten Falle nach der Formel:

$$r_1 = \frac{WE}{P(l + x_1) - P_1 x_1}.$$

Wenn im zweiten Falle $P_1 = P$ ist, so fällt $r_1 = \frac{WE}{Pl}$, also constant aus, und im dritten Falle, wo $P_1 l_1 > P(l + l_1)$ ist, wird im Punkte $O$, dessen Abscisse $x_1$ den Werth $\frac{Pl}{P_1 - P}$ hat, $r_1 = \infty$ (unendlich groß), wo-

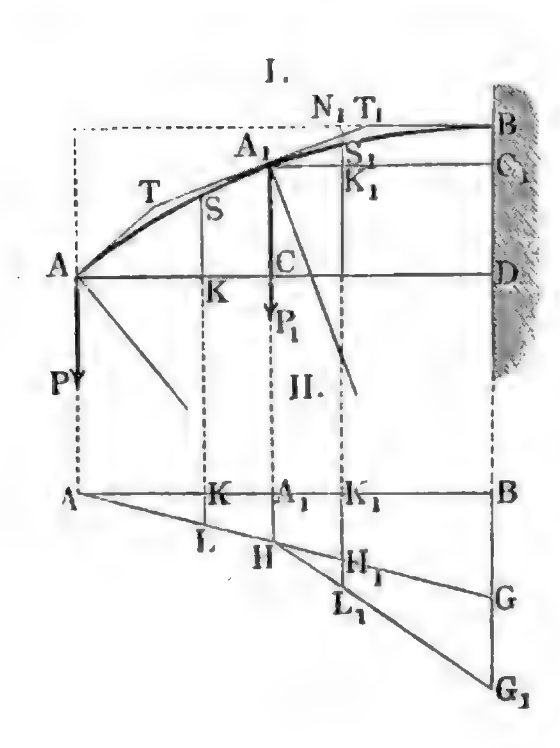
gegen im Punkte $A_1$, $r = \frac{WE}{Pl}$, und im Punkte $B$,

$$r_1 = -\frac{WE}{P_1 l_1 - P(l + l_1)} \text{ ist.}$$

Je nachdem $Pl$ größer oder kleiner als $P_1 l_1 - P(l + l_1)$, d. i. $P \gtrless P_1$ ist, fällt im letzteren Falle $r \lessgtr r_1$, also die Krümmung in $A_1$ größer oder kleiner aus als in $B$.

**Die elastische Linie für zwei Kräfte.** Die Gleichungen der elastischen Linie, welche von der Axe des von zwei Kräften $P$ und $P_1$ ergriffenen Balkens gebildet wird, lassen sich aus den bereits in den Paragraphen 216 und 217 gefundenen Formeln leicht zusammensetzen. §. 220

Fig. 344.




Bezeichnet $\alpha_1$ den Neigungswinkel der elastischen Linie in $A_1$, so hat man zunächst für das Bogenstück $AA_1$, Fig. 344, I., den Bogen, welcher die Neigung desselben in $S$ mißt:

$$1)\quad \alpha = \alpha_1 + \frac{P(l^2 - x^2)}{2\,WE},$$

und die der Abscisse $AK = x$ entsprechende Ordinate $KS$:

$$(2)\, y = \alpha_1 x + \frac{Px(l^2 - \frac{1}{3}x^2)}{2\,WE}$$

(vergl. §. 217).

In (1) für $x = 0$ gesetzt, folgt der Neigungswinkel in $A$:

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \frac{Pl^2}{2\,WE};$$

dagegen in (2) für $x = l$ angenommen, die Ordinate in $A_1$:

$$A_1 C = a = \alpha_1 l + \frac{Pl^3}{3\,WE}.$$

Für einen Punkt des zweiten Balkenstückes $A_1 B$ ist das Biegungsmoment $P(l + x_1) + P_1 x_1 = Pl + (P + P_1) x_1$ aus zwei Theilen, $Pl$ und $(P + P_1) x_1$, zusammengesetzt, wovon das eine wegen seiner Unveränderlichkeit das Balkenstück nach einem Kreisbogen vom Halbmesser $r = \frac{WE}{Pl}$ krümmt, dessen Neigungswinkel in einem Punkte $S_1$, welcher um $A_1 S_1 = x_1$ von $A$ und um $BS_1 = l_1 - x_1$ von $B$ absteht,

$$\beta_1 = \frac{l_1 - x_1}{r} = \frac{Pl(l_1 - x_1)}{WE} \text{ mißt.}$$

In Folge der Biegung durch das Moment $(P + P_1) x_1$ ist dagegen die Neigung des Balkenstückes in $S$:

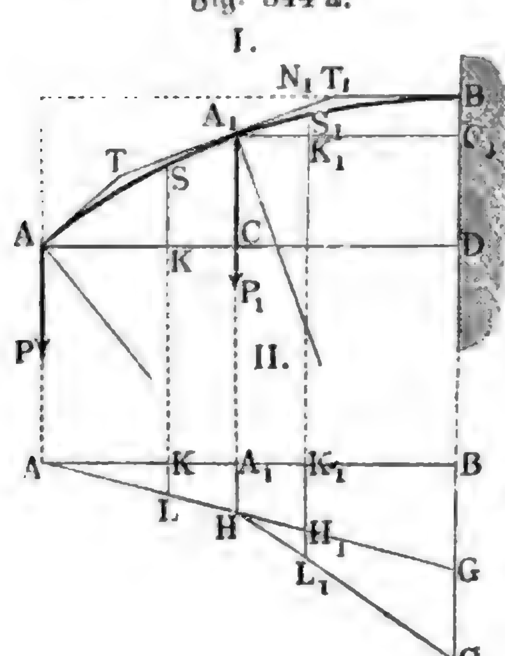



Fig. 344 a.

$$\beta_2 = \frac{(P + P_1)(l_1^2 - x_1^2)}{2\,WE};$$

daher folgt nun die vollständige Neigung in demselben Punkte $S$:

$$3) \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{Pl(l_1 - x_1)}{WE} + \frac{(P + P_1)(l_1^2 - x_1^2)}{2\,WE}.$$

In Folge der Krümmung um $\beta_1$ nach dem Kreise wäre die Bogenhöhe von $BS_1$, nach der bekannten Kreisgleichung

$$N_1 S_1 = \frac{\overline{BS_1}^2}{2r} = \frac{(l_1 - x_1)^2 Pl}{2\,WE},$$

daher die vom ganzen Stücke $BA_1$:

$$BC_1 = \frac{Pl l_1^2}{2\,WE},$$ und die Höhe des Punktes $S_1$ über $A_1$:

$$K_1 S_1 = BC_1 - N_1 S_1 = \frac{Pl[l_1^2 - (l_1 - x_1)^2]}{2\,WE} = \frac{Pl(2l_1 x_1 - x_1^2)}{2\,WE}.$$

Dem Krümmungswinkel $\beta_2 = \dfrac{(P + P_1)(l_1^2 - x_1^2)}{2\,WE}$ entspricht dagegen nach dem Obigen (§. 217) die Bogenhöhe $K_1 S_1 = \dfrac{(P + P_1) x_1 (l_1^2 - \frac{1}{3} x_1^2)}{2\,WE}$; es ist daher die vollständige Bogenhöhe:

$$4) \quad K_1 S_1 = y_1 = \frac{Pl(2l_1 x_1 - x_1^2) + (P + P_1) x_1 (l_1^2 - \frac{1}{3} x_1^2)}{2\,WE}.$$

Setzt man in (3), $x_1 = 0$, so erhält man in $\beta$ den oben als gegeben angenommenen Neigungswinkel, und zwar:

$$\alpha_1 = \frac{2Pll_1 + (P + P_1) l_1^2}{2\,WE},$$

und führt man in (4) $x_1 = l_1$ ein, so ergiebt sich dadurch die Bogenhöhe:

$$BC_1 = a_1 = \frac{3Pll_1^2 + 2(P + P_1) l_1^3}{6\,WE}.$$

Endlich folgt die Bogenhöhe des ganzen Balkens:

$$\overline{BD} = a + a_1 = \alpha_1 l + \frac{Pl^3}{3\,WE} + \frac{3Pll_1^2 + 2(P + P_1) l_1^3}{6\,WE}$$

$$= \alpha_1 l + \frac{Pl(2l^2 + 3l_1^2) + 2(P + P_1) l_1^3}{6\,WE}$$

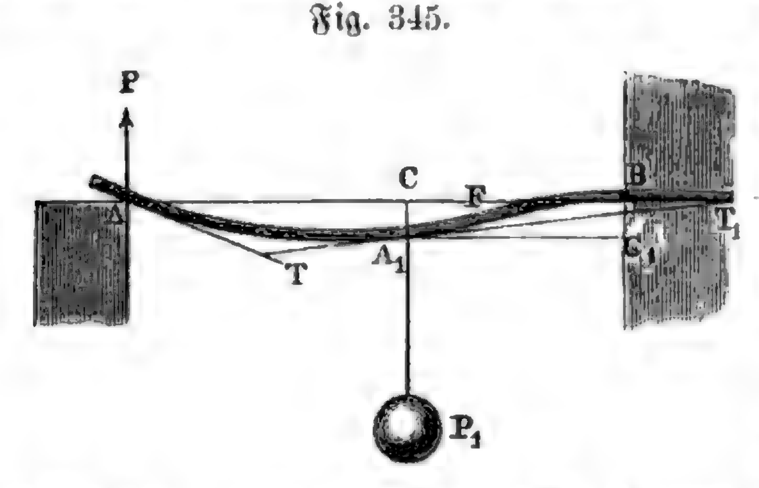
$$= \alpha_1 l + \frac{P(2l^3 + 3ll_1^2 + 2l_1^3) + 2P_1 l_1^3}{6\,WE}.$$

Wenn der Balken $AB$ bei $B$ mit einer gewissen Neigung $\beta_0$ aus der Mauer hervortritt, so ist in (3) zu $\beta$ noch $\beta_0$ und in (4) zu $y_1$ noch $\beta_0 x_1$ zu addiren. Wirkt die Kraft $P_1$ der Kraft $P$ entgegengesetzt, so hat man in den Grundformeln (3) und (4), statt $P + P_1$, $P - P_1$ einzusetzen.

**Einseitig aufliegender Balken.** Die Formeln des vorstehenden Paragraphen finden in mehreren Fällen der Praxis ihre Anwendung. Ist z. B. ein Balken $AB$, Fig 345, in einem Endpunkte $B$ horizontal eingemauert, und im anderen Endpunkte $A$ einfach unterstützt, so entsteht die Frage: welches ist die **Biegungskraft** in $A$ oder welchen Druck $P$ hat die Stütze in $A$ auszuhalten, während der Balken in einem Zwischenpunkte $A_1$ von einer Last $P_1$ niedergezogen wird?

§. 221

Fig. 345.




Es ist hier $P$ negativ, $\beta_0 = 0$, und, da $A$ und $B$ in einerlei Niveau liegen, die Summe von den Bogenhöhen

$$CA_1 = a \text{ und } C_1 B = a_1, = \text{Null},$$

also:

$$\left(\alpha_1 + \frac{Pl^2}{3\,WE}\right) l + \frac{\frac{1}{2} P l l_1^2 + \frac{1}{3}(P - P_1)\, l_1^3}{WE} = 0,$$

oder, da $\alpha_1 = \dfrac{P l l_1 + \frac{1}{2}(P - P_1)\, l_1^2}{WE}$ ist,

$$Pl^2 l_1 + \tfrac{1}{2}(P - P_1)\, l_1^2 l + \tfrac{1}{3} P l^3 + \tfrac{1}{2} P l l_1^2 + \tfrac{1}{3}(P - P_1)\, l_1^3 = 0.$$

Hieraus folgt nun:

$$P\,(2\,l^3 + 6\,l^2 l_1 + 6\,l l_1^2 + 2\,l_1^3) = P_1\,(3\,l l_1^2 + 2\,l_1^3)$$

und daher die gesuchte Stütz- oder Biegungskraft in $A$:

$$P = \frac{(3\,l + 2\,l_1)\, l_1^2}{l^3 + 3\,(l^2 l_1 + l l_1^2) + l_1^3}\, \frac{P_1}{2},$$

z. B. für $l = l_1$, also in dem Falle, wenn $P_1$ in der Mitte liegt,

$$P = \tfrac{5}{16} P_1.$$

Hieraus folgt das Biegungsmoment in $A_1$:

$$Pl = \frac{5}{16} P_1 l, \text{ dagegen das in } B:$$

$$P_1 l_1 - 2\,Pl = \frac{3}{8} P_1 l = \frac{6}{16} P_1 l,$$

also größer als das in $A_1$.

Ist zwar $l = l_1$, liegen aber die Stützpunkte $A$ und $B$ nicht in einerlei Höhe, sondern liegt $A$ um $a_2$ höher als $B$, so muß man $a + a_1 = a_2$ setzen. Nun ist aber dann

$$\alpha_1 = \frac{(3P - P_1)\, l^2}{2\, WE},$$

$$a = \alpha_1 l + \frac{P l^3}{3\, WE} = \frac{(11 P - 3 P_1)\, l^3}{6\, WE} \text{ und}$$

$$a_1 = \frac{[3P + 2(P - P_1)]\, l^3}{6\, WE} = \frac{(5P - 2P_1)\, l^3}{6\, WE};$$

daher hat man

$$\frac{(16 P - 5 P_1)\, l^3}{6\, WE} = a_2, \text{ und es folgt}$$

$$P = \frac{6\, WE a_2}{16\, l^3} + \frac{5}{16} P_1.$$

Sollen die Biegungsmomente in $A_1$ und $B$ gleich groß, jedoch einander entgegengesetzt sein, so hat man

$$P l = 2 P_1 l - 2 P l, \text{ oder}$$

$$3 P = P_1, \text{ d. i. } P = \frac{P_1}{3} \text{ zu setzen, wobei dann}$$

$$a_2 = \frac{P l^3}{6\, WE} = \frac{P_1 l^3}{18\, WE} \text{ zu machen ist.}$$

Wenn man also das Balkenende um $0{,}0555 \frac{P_1 l^3}{WE}$ höher legt als $B$, so ist das Biegungsmoment in $A$ und $B$, $= \pm \frac{P_1 l}{3}$, also kleiner als wenn $A$ und $B$ in gleicher Höhe liegen.

Mit Hülfe des gefundenen Werthes für $P$ lassen sich nun auch die Krümmungshalbmesser, Tangentenwinkel u. s. w. der Curvenstücke $A A_1$ und $A_1 B$ berechnen.

§. 222 **Biegung eines an beiden Enden frei aufliegenden Balkens.** Einen anderen Fall der Anwendung der Formeln des letzten Paragraphen bietet ein an beiden Enden $A$ und $B$ frei aufliegender Balken $AB$, Fig. 346, dar, wenn derselbe von einer Kraft $P_1$ ergriffen wird, deren Angriffspunkt $A_1$ von dem einen Stützpunkte $A$ um $l$ und vom anderen Stützpunkte $B$ um $l_1$ absteht.

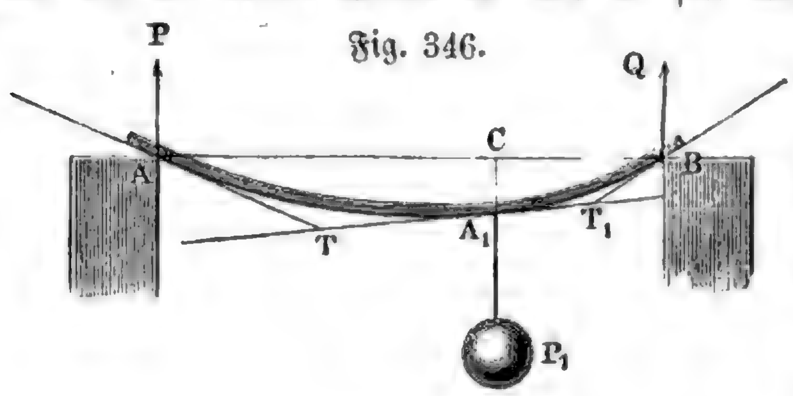


Fig. 346.

Es ist hier das Moment

$$P \cdot \overline{BA} = \text{dem Momente } P_1 \cdot \overline{BA_1},$$

d. i.

$$P(l + l_1) = P_1 l_1,$$

folglich der Druck im Stützpunkte $A$:

$$P = \frac{P_1 l_1}{l + l_1},$$

und dagegen der Druck im Stützpunkte $B$:

$$Q = P_1 - P = \frac{P_1 l}{l + l_1}.$$

Da wieder $A$ und $B$ in einer Horizontalen liegen, so hat man auch

$$a + a_1 = 0;$$

es ist jedoch dieses Mal der Winkel $\beta$ nicht $=$ Null, sondern eine zu bestimmende negative Größe $CBT_1$.

Man hat hier

$$a = -\beta l + \frac{Pl^2 l_1 + \frac{1}{2}(P - P_1) l l_1^2}{WE} + \frac{Pl^3}{3\,WE}$$

und auch

$$a_1 = -\beta l_1 + \frac{\frac{1}{2} P l l_1^2 + \frac{1}{3}(P - P_1) l_1^3}{WE},$$

daher die Summe:

$$\beta(l + l_1) - \frac{P}{6\,WE}(2l^3 + 6l^2 l_1 + 6 l l_1^2 + 2 l_1^3)$$
$$+ \frac{P_1}{6\,WE}(3 l l_1^2 + 2 l_1^3) = 0,$$

oder

$$6\beta(l + l_1) WE = P(2l^3 + 6l^2 l_1 + 6 l l_1^2 + 2 l_1^3) - P_1(3 l l_1^2 + 2 l_1^3)$$
$$= [2l^3 + 6l^2 l_1 + 6 l l_1^2 + 2 l_1^3 - (3 l l_1 + 2 l_1^2)(l + l_1)] P,$$

so daß nun der Neigungswinkel in $B$:

$$\beta = \frac{Pl(2l^2 + 3 l l_1 + l_1^2)}{6(l + l_1) WE} = \frac{P_1 l l_1 (2l^2 + 3 l l_1 + l_1^2)}{6(l + l_1)^2 WE}$$

und dagegen der Neigungswinkel in $A$:

$$\alpha = \frac{P_1 l l_1 (l^2 + 3 l l_1 + 2 l_1^2)}{6(l + l_1)^2 WE} \text{ folgt.}$$

Ist z. B. $P_1$ in der Mitte aufgehangen, so hat man $l_1 = l$, sowie $P = Q = \frac{P_1}{2}$ und daher

$$\beta = \frac{Pl^2}{2\,WE} = \frac{P_1 l^2}{4\,WE} \text{ (vergl. §. 216).}$$

Mit Hülfe des bestimmten Winkels $\beta$ lassen sich auch die sämmtlichen

Biegungsverhältnisse des Balkens durch die oben gefundenen Formeln bestimmen.

Das Biegungsmoment dieses Balkens ist im Aufhängepunkte $A_1$ am größten und zwar

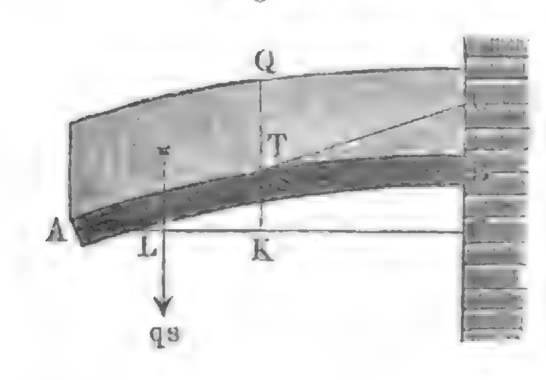
$$M = Pl = Q l_1 = \frac{P_1 l l_1}{l + l_1} = \frac{P_1}{l + l_1}\left[\left(\frac{l + l_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{l - l_1}{2}\right)^2\right],$$

also am größten für $l = l_1$, d. i. wenn das Gewicht $P_1$ in der Mitte hängt, und zwar

$$M = \frac{P_1\,(l + l_1)}{4} = \tfrac{1}{2}\, P_1\, l.$$

§. 223 **Gleichmässig belastete Balken.** Ist die ganze Last gleichmäßig vertheilt auf den Balken $AB$, Fig 347, und trägt jede Längeneinheit desselben $= q$, also der ganze Balken von der Länge $l$, $Q = lq$, und ein Balkenstück $AS = s$, die Last $qs$, so hat man statt der Momente $\frac{1}{n} Ps$, $\frac{2}{n} Ps$, $\frac{3}{n} Ps$ u. s. w. die Momente $\frac{1}{2} q \left(\frac{s}{n}\right)^2$, $\frac{1}{2} q \left(\frac{2s}{n}\right)^2$, $\frac{1}{2} q \left(\frac{3s}{n}\right)^2$ u. s. w. einzusetzen, weil

Fig. 347.




die Schwerpunkte der Lasten $q\left(\frac{s}{n}\right)$, $q\left(\frac{2s}{n}\right)$, $q\left(\frac{3s}{n}\right)$ u. s. w. in der Mitte von $\frac{s}{n}$, $\frac{2s}{n}$, $\frac{3s}{n}$ u. s. w. liegen, also die Hebelarme $\frac{1}{2}\frac{s}{n}$, $\frac{1}{2}\frac{2s}{n}$, $\frac{1}{2}\frac{3s}{n}$ u. s. w. sind. Hiernach bekommen wir hier die Krümmungswinkel der Bogenelemente:

$$\delta_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q s^3}{n^3 WE},\ \delta_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2^2 . q s^3}{n^3 WE},\ \delta_3 = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{3^2 . q s^3}{n^3 WE} \text{ u. s. w.,}$$

und daher den Krümmungswinkel von $AS = s$:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q s^3}{n^3 WE}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{q s^3}{2 n^3 WE}\cdot\frac{n^3}{3}$$

$$= \frac{q s^3}{6 WE}, \text{ annähernd} = \frac{q x^3}{6 WE}.$$

Wird $x = l$ gesetzt, so folgt nun der Tangentenwinkel $TAC = UTB$ für den Endpunkt $A$:

$$\beta = \frac{q l^3}{6 WE} = \frac{Q l^2}{6 WE},$$

und daher der für einen Punkt $S$, dessen Abscisse $AK = x$ ist,

$$\alpha = \beta - \varphi = \frac{q}{6 WE}(l^3 - x^3).$$

Aus dem letzten Winkelmaße folgt ein Ordinatenelement

$$\frac{x}{m}\,\alpha = \frac{x}{m}\cdot\frac{q}{6\,WE}\,(l^3 - x^3),$$

und nun statt $x^3$ nach und nach $\left(\frac{x}{m}\right)^3, \left(\frac{2\,x}{m}\right)^3, \left(\frac{3\,x}{m}\right)^3$ eingeführt, ergiebt sich die gesuchte Gleichung für die Ordinate $KS = y$:

$$y = \frac{x}{m}\cdot\frac{q}{6\,WE}\left[m\,l^3 - \left(\frac{x}{m}\right)^3\cdot(1^3 + 2^3 + \cdots + m^3)\right]$$

$$= \frac{x}{m}\cdot\frac{q}{6\,WE}\left[m\,l^3 - \left(\frac{x}{m}\right)^3\cdot\frac{m^4}{4}\right], \text{ d. i.:}$$

$$y = \frac{q\,x}{6\,WE}\left(l^3 - \frac{x^3}{4}\right).$$

Nehmen wir wieder $x = l$ an, so bekommen wir die Bogenhöhe

$$a = \frac{q\,l}{6\,WE}\cdot {}^3\!/_4\, l^3 = \frac{q\,l^4}{8\,WE} = \frac{Q\,l^3}{8\,WE} = {}^3\!/_8\cdot\frac{Q\,l^3}{3\,WE},$$

d. i. $^3/_8$ mal so groß, als wenn die Last $Q$ am Ende des Balkens hinge.

Die Ordinate des Mittelpunktes der Balkenaxe ist:

$$y_1 = \frac{q\,l}{12\,WE}\left(l^3 - \frac{l^3}{32}\right) = \frac{31\,q\,l^4}{12\,.\,32\,WE},$$

folglich die Tiefe dieses Punktes unter der Horizontalen durch $B$:

$$y_2 = a - y_1 = \frac{17\,q\,l^4}{12\,.\,32},$$

und daher das Arbeitsquantum, welches der Einbiegung $a$ oder dieser Senkung ($y_2$) des Schwerpunktes der Last $Q = l\,q$ entspricht, insofern man nämlich $Q$ allmälig auflegt:

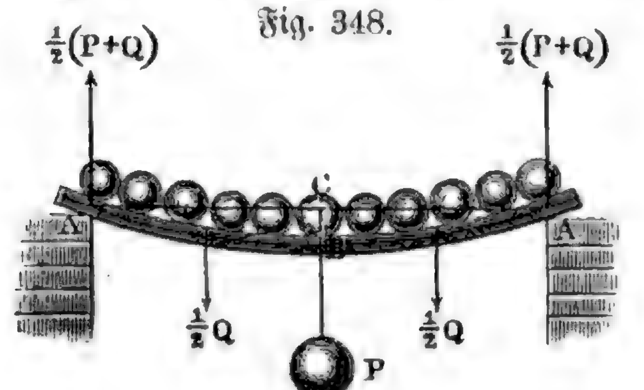
$$L = {}^1\!/_2\,Q\,y_2 = {}^1\!/_2\,q\,l\,y_2 = \frac{17\,q^2\,l^5}{24\,.\,32\,.\,WE} = \frac{17\,Q^2\,l^3}{24\,.\,32\,.\,WE}\,.$$

Ist der Balken durch eine gleichmäßig vertheilte Last $Q$ und durch eine Kraft $P$ am Ende zugleich belastet, so hat man die Bogenhöhe:

$$a = \frac{P\,l^3}{3\,WE} + \frac{Q\,l^3}{8\,WE} = \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right)\frac{l^3}{WE}.$$

Wenn der Balken $ABA$, Fig. 348, an beiden Enden frei aufliegt, und nicht allein in der Mitte $B$ eine Last $P$, sondern auch gleichmäßig vertheilt eine Last $Q = l\,q$ trägt, so findet man die Ein- oder Durchbiegung $CB = a$, wenn man in dem Ausdrucke

Fig. 348.




$$a = \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right)\frac{l^3}{WE}$$

für den Fall in Fig. 347 statt $P$, den Druck oder die Gegenkraft $\frac{P + Q}{2}$ in einem Ende

$A$, statt $Q$ die gleichmäßig vertheilte Last — $\frac{Q}{2}$ einer Hälfte $BA$, und statt $l$, die halbe Länge des Balkens, $\overline{BA} = {}^1/_2\,\overline{AA} = {}^1/_2\,l$ einführt.

Es folgt auf diese Weise:

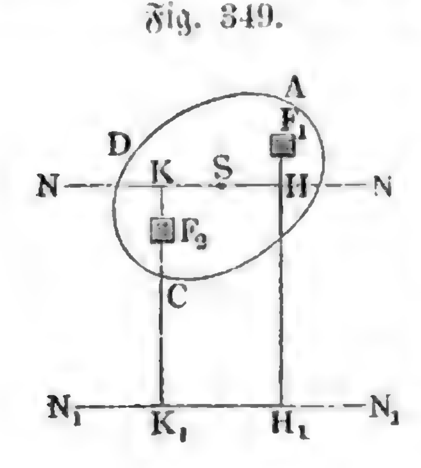
$$a = \left(\frac{P+Q}{6} - \frac{Q}{16}\right)\frac{l^3}{8\,WE} = (P + {}^5/_8\,Q)\,\frac{l^3}{48\,WE}.$$

Für $P = 0$ ist also $a = {}^5/_8 \cdot \frac{Q\,l^3}{48\,WE}$. Wenn also die ganze Last gleichmäßig auf den an beiden Enden unterstützten Balken vertheilt ist, so fällt die Bogenhöhe nur ${}^5/_8$ mal so groß aus, als wenn dieselbe in der Mitte des Balkens hinge.

Das Gewicht $G$ des Balkens hat genau denselben Einfluß auf die Biegung wie die gleichmäßig vertheilte Last $Q$, und ist daher auch genau wie diese in Rechnung zu bringen.

§. 224 **Reduction der Biegungsmomente.** Kennt man das Biegungsmoment $W_1\,E$ eines Körpers $A\,B\,C\,D$, Fig. 349, in Beziehung auf eine Axe $N_1\,N_1$ außerhalb des Schwerpunktes, so läßt sich leicht dieses Moment in Beziehung auf eine andere, durch den Schwerpunkt $S$ gehende Axe $N\,N$ finden, welche mit der ersteren parallel läuft. Ist der Abstand $H\,H_1 = K\,K_1$ zwischen beiden Axen $= d$, und sind die Abstände der Flächenelemente $F_1$, $F_2$ u. s. w. von der neutralen Axe $NN$, $= z_1$, $z_2$ u. s. w., so hat man die Abstände von der Axe $N_1\,N_1$, $= d + z_1$, $d + z_2$ u. s. w., und es ist nun das Biegungsmoment:

Fig. 349.




$$W_1\,E = [F_1\,(d + z_1)^2 + F_2\,(d + z_2)^2 + \cdots]\,E$$
$$= [F_1\,(d^2 + 2\,d\,z_1 + z_1^2) + F_2\,(d^2 + 2\,d\,z_2 + z_2^2 + \cdots)]\,E$$
$$= [d^2\,(F_1 + F_2 + \cdots) + 2\,d\,(F_1\,z_1 + F_2\,z_2 + \cdots)$$
$$+ (F_1\,z_1^2 + F_2\,z_2^2 + \cdots)]\,E.$$

Nun ist aber

$$F_1 + F_2 + \cdots$$

als Summe aller Elemente = Querschnitt $F$ des ganzen Körpers, ferner

$$F_1\,z_1 + F_2\,z_2 + \cdots$$

als Summe der statischen Momente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe = Null, und

$$(F_1\,z_1^2 + F_2\,z_2^2 + \cdots)\,E$$

das Biegungsmoment $W\,E$ in Beziehung auf die neutrale Axe $NN$; es folgt daher:

$$W_1 E = (W + F d^2) E,$$

oder:

$$W_1 = W + F d^2$$

und umgekehrt:

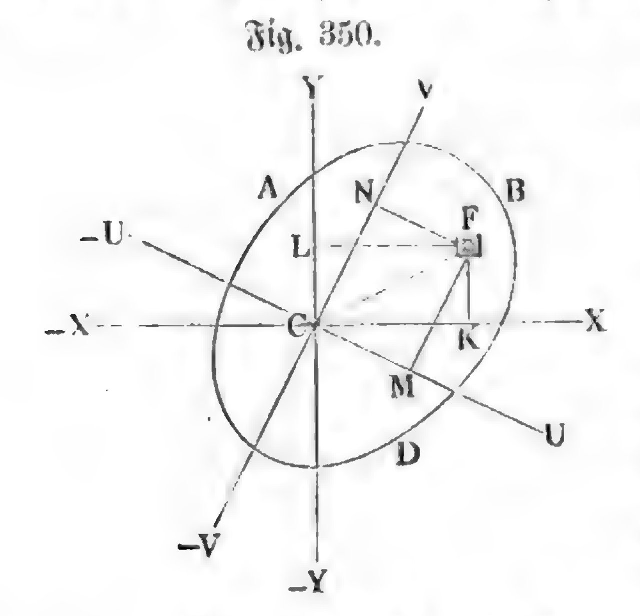
$$W = W_1 - F d^2.$$

Es ist also das Maß $W$ des Biegungsmomentes in Beziehung auf die neutrale Axe gleich dem Maße $W_1$ des Biegungsmomentes in Beziehung auf eine zweite Parallelaxe minus das Product aus dem Querschnitt $F$ und dem Quadrat ($d^2$) des Abstandes beider Axen. Auch folgt hieraus, daß unter allen Biegungsmomenten das in Hinsicht auf die neutrale Axe am kleinsten ist.

Von vielen Körpern lassen sich die Biegungsmomente in Hinsicht auf irgend eine Axe leicht finden, man kann daher diese dazu benutzen, um mittels der gefundenen Formel die Momente in Hinsicht auf die neutrale Axe zu bestimmen.

§. 225. Sind $CK = x$ und $CL = y$, Fig. 350, die Coordinaten eines Punktes $F$ in Hinsicht auf ein rechtwinkeliges Axenkreuz $\overline{X}X$, $\overline{Y}Y$, sind ebenso $CM = u$ und $CN = v$ die Coordinaten dieses Punktes auf ein anderes rechtwinkeliges Axenkreuz $\overline{U}U$, $\overline{V}V$, und ist endlich $CF = r$ der Abstand des gedachten Punktes $F$ von dem gemeinschaftlichen Nullpunkte $C$ beider Axensysteme, so gelten, dem Pythagoreischen Lehrsatze zufolge, die Gleichungen:

Fig. 350.




$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = r^2,$$

und es ist also auch

$$F x^2 + F y^2 = F u^2 + F v^2 = F r^2.$$

Setzen wir nun in diesen Gleichungen statt $F$ nach und nach die Elemente $F_1$, $F_2$, $F_3$ u. s. w. des ganzen Querschnittes $ABD$ und ebenso statt $x$, $y$, $u$ und $v$ die entsprechenden Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ u. s. w., $y_1$, $y_2$, $y_3$ u. s. w., sowie $u_1$, $u_2$ ... und $v_1$, $v_2$ ... ein, so erhalten wir durch Addition folgende Gleichungen:

$$F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots + F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + \cdots$$
$$= F_1 u_1^2 + F_2 u_2^2 + \cdots + F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2 + \cdots$$
$$= F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \cdots,$$

oder, wenn wir

$$F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma (F x^2),$$

ferner

$$F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(F y^2),$$

sowie

$$F_1 u_1^2 + F_2 u_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(F u^2),$$
$$F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(F v^2),$$

und

$$F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(F r^2)$$

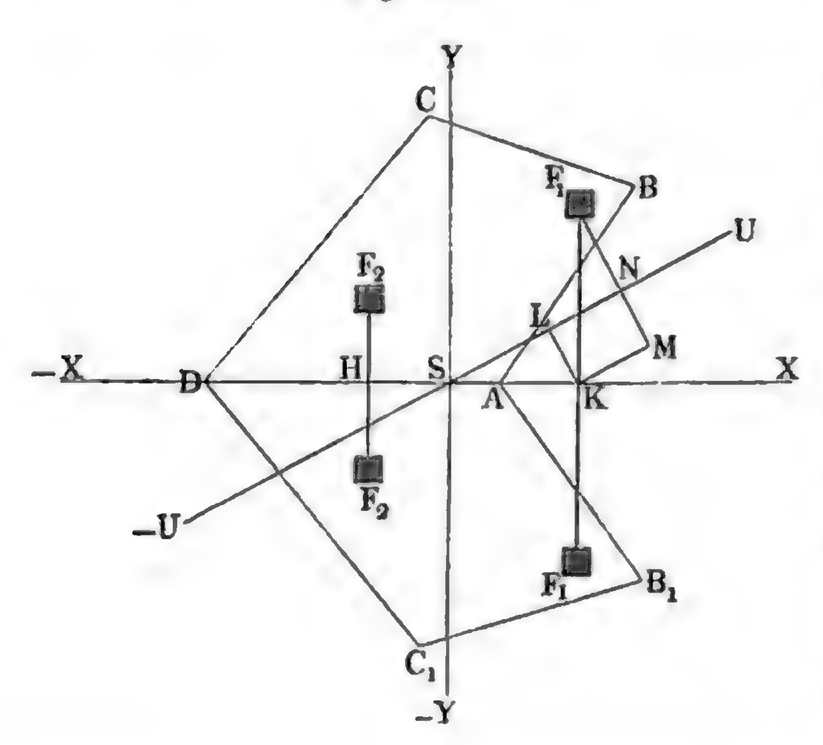
bezeichnen,

$$\Sigma\,(F x^2) + \Sigma\,(F y^2) = \Sigma\,(F u^2) + \Sigma\,(F v^2) = \Sigma\,(F r^2).$$

Es ist hiernach die Summe der Maße der Biegungsmomente, in Hinsicht auf beide Axen $XX$ und $YY$ eines Axensystemes gleich der Summe der Maße der Biegungsmomente in Hinsicht auf beide Axen eines anderen Axensystemes und gleich dem Maße des Biegungsmomentes in Hinsicht auf den Axpunkt, d. i. gleich der Summe der Producte aus den Elementen des Querschnittes und aus den Quadraten ihrer Entfernungen von der Axe $C$.

Ist der Querschnitt $A\,C\,C_1$, Fig. 351, eines gebogenen Körpers eine symmetrische Figur, und ist die Axe $\overline{X}\,X$ rechtwinkelig gegen die Biegungsebene der Symmetrieaxe derselben, so findet noch eine Relation zwischen den Biegungsmomenten statt. Sind wieder $SK = x$ und $KF_1 = y$ die Coordinaten eines Flächenelementes $F$ in Hinsicht auf das Axensystem $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$, und ist auch $FN = v$ der Abstand desselben Elementes $F$ von einer anderen Axe $\overline{U}\,U$, welche um den Winkel $XSU = \alpha$ von der ersten Axe $\overline{X}\,X$ abweicht, so haben wir für denselben

Fig. 351.




$$v = MF - MN = MF - KL$$
$$= KF\,\cos. KFM - SK\,\sin. KSL = y\cos.\alpha - x\sin.\alpha,$$

daher:

$v^2 = x^2 (sin.\alpha)^2 + y^2 (cos.\alpha)^2 - 2xy\, sin.\alpha\, cos.\alpha$, sowie auch
$F v^2 = (sin.\alpha)^2 F x^2 + (cos.\alpha)^2 F y^2 - sin.2\alpha\, F x y$, und
$\Sigma (F v^2) = (sin.\alpha)^2 \Sigma (F x^2) + (cos.\alpha)^2 \Sigma (F y^2) - sin.2\alpha\, \Sigma (F x y)$.

Da wegen der symmetrischen Gestalt der Figur jedem Elemente $F_1, F_2 \ldots$ ein gleiches Gegenelement $F_1, F_2 \ldots$ zukommt, bei welchem $y$ und folglich auch das ganze Product negativ ist, so fällt die Summe der entsprechenden Producte für je zwei solcher Elemente, und folglich auch die ganze Summe $\Sigma (F x y) =$ Null aus, und es ist daher:

$$\Sigma (F v^2) = (sin.\alpha)^2 \Sigma (F x^2) + (cos.\alpha)^2 \Sigma (F y^2), \text{ oder:}$$
$$W = (sin.\alpha)^2 W_1 + (cos.\alpha)^2 W_2,$$

wobei $W$ das Maß des Biegungsmomentes in Hinsicht auf irgend eine Axe $\overline{U}U$, $W_1$ das in Hinsicht auf die Symmetrieaxe $\overline{X}X$ und $W_2$ das in Hinsicht auf die rechtwinkelig zur Symmetrieaxe stehende Axe $\overline{Y}Y$ bezeichnen, und vorausgesetzt wird, daß die Axen $\overline{U}U$ und $\overline{Y}Y$ sowie die Symmetrieaxe $\overline{X}X$ durch den Schwerpunkt $S$ der Figur gehen.

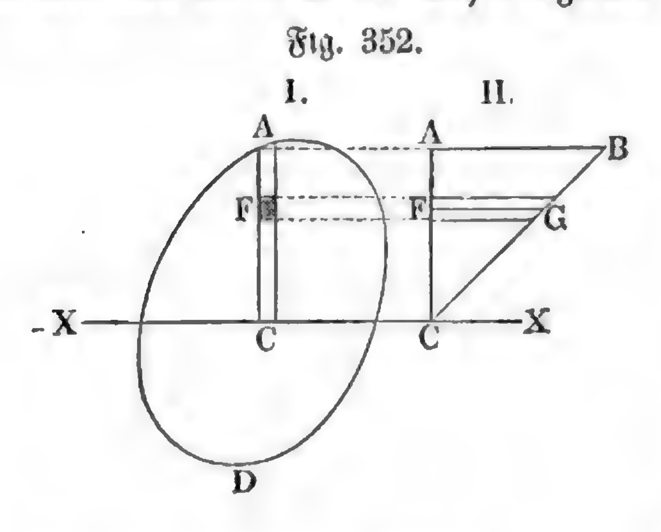
Mit Hülfe der beiden vorstehenden Regeln kann man nicht selten aus dem bekannten Biegungsmomente eines Körpers in Hinsicht auf eine gewisse Axe das Biegungsmoment desselben in Hinsicht auf eine andere Axe finden.

§. 226 **Biegungsmoment eines Streifens.** Um das Biegungsmoment eines Körpers von bekanntem Querschnitte $AD$, Fig. 352, I., in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$ zu finden, denken wir uns diesen Querschnitt durch Perpendikel zu $\overline{X}X$ in lauter schmale Streifen und jeden solchen Streifen, wie z. B. $CA$, wieder in rectanguläre Elemente $F_1$, $F_2$, $F_3$ u. s. w. zerlegt. Sind dann $z_1$, $z_2$, $z_3$ u. s. w. die Abstände $(CF)$ dieser Elemente von der Axe $\overline{X}X$, so haben wir das Maß des Biegungsmomentes für einen solchen Streifen:

$$F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + F_3 z_3^2 + \cdots$$
$$= F_1 z_1 . z_1 + F_2 z_2 . z_2 + F_3 z_3 . z_3 + \cdots$$

Ziehen wir nun in Fig. 352, II., $AB$ rechtwinkelig auf und gleich $CA$, und verbinden wir $B$ und $C$ durch eine gerade Linie, so schneidet dieselbe von den in den Abständen $(CF) = z_1$, $z_2$, $z_3$ u. s. w. auf $CA$ errichteten Perpendikeln gleiche Stücke $(FG) = z_1$, $z_2$, $z_3$ u. s. w. ab, und es lassen sich nun $F_1 z_1$, $F_2 z_2$ u. s. w. als die Inhalte von Prismen, sowie $F_1 z_1 . z_1$, $F_2 z_2 . z_2$ u. s. w. als die statischen Momente derselben in Hinsicht auf die Axe $C$ ansehen. Die Prismen

Fig. 352.



$F_1 z_1$, $F_2 z_2$ u. s. w. machen aber zusammen ein dreiseitiges Prisma aus, dessen Grundfläche das Dreieck $ABC$ und dessen Höhe die Breite des Streifens $AC$ (I.) ist; es ist daher auch die Summe der obigen statischen Momente gleich dem Momente des Prismas $ABC$ in Hinsicht auf die Axe $\overline{X}X$. Setzen wir die Höhe $CA = z$ und die Breite des Streifens $= b$, so haben wir den Inhalt des gedachten dreiseitigen Prismas

$$= \tfrac{1}{2} b z^2,$$

und da der Abstand seines Schwerpunktes von $C$, $\tfrac{2}{3} z$ beträgt (s. §. 109), so ergiebt sich das statische Moment des Prismas und folglich auch das Maß des Biegungsmomentes vom Streifen $CA$:

$$W = \tfrac{1}{2} b z^2 \cdot \tfrac{2}{3} z = \tfrac{1}{3} b z^3.$$

Um nun das Biegungsmoment des ganzen Querschnittes $AD$ zu finden, bedarf es natürlich nur einer Addition der Biegungsmomente der Streifen wie $CA$, in welche sich die ganze Fläche durch Perpendikel zur Axe $\overline{X}X$ zerlegen läßt.

Am einfachsten ist die Bestimmung bei einem rectangulären Querschnitte $ABCD$, Fig. 353. Hier sind die Streifen, in welche sich die Flächen zerlegen, von gleicher Größe, und machen daher zusammen einen einzigen Streifen von der Breite $AD = b$ des ganzen Rechteckes aus. Ist dann noch die Höhe $AB$ dieses Rechteckes $= h$, so hat man die Höhe eines Streifens:

Fig. 353.

$$z = \tfrac{1}{2} h,$$

daher das Maß des Biegungsmomentes einer Hälfte dieser Fläche:

$$\tfrac{1}{3} b \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b h^3}{24},$$

und endlich dieses Maß vom ganzen Rechtecke:

$$W = 2 \cdot \frac{b h^3}{24} = \frac{b h^3}{12}.$$

§. 227 **Biegungsmoment eines parallelepipedischen Balkens.** Es wächst dem Vorstehenden zufolge, bei einem parallelepipedischen Balken das Biegungsmoment $WE = \frac{b h^3}{12} E$ wie die Breite und wie der Cubus der Höhe des Balkens.

Setzen wir diesen Werth für $WE$ in die erste Formel

$$a = \frac{P l^3}{3 WE} \text{ des §. 217,}$$

so erhalten wir die Bogenhöhe für den an einem Ende eingeklemmten Balken mit rectangulärem Querschnitte:

$$a = 4 \cdot \frac{P l^3}{b h^3 E};$$

setzen wir ihn aber in die zweite Formel desselben Paragraphen,

$$a = \frac{1}{48} \frac{P l^3}{W E},$$

so stellt sich für den an beiden Enden aufliegenden Balken,

$$a = \frac{P l^3}{4 b h^3 E}$$

heraus. Umgekehrt folgt aus der Bogenhöhe $a$ der Elasticitätsmodul

$$E = \frac{4 P l^3}{a b h^3} \text{ für den einen, und}$$

$$E = \frac{P l^3}{4 a b h^3} \text{ für den anderen Fall.}$$

Beispiele. 1) Ein hölzerner Balken von 10 Fuß = 120 Zoll Länge, 8 Zoll Breite und 10 Zoll Höhe soll an beiden Enden aufruhen und eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 10000$ Pfund tragen; welche Biegung wird derselbe erleiden? Es ist die Bogenhöhe:

$$a = {}^5/_8 \, \frac{Q l^3}{4 b h^3 E} = {}^5/_{32} \cdot \frac{10000 \,.\, 120^3}{8 \,.\, 10^3 \,.\, E} = \frac{50000 \,.\, 12^3}{32 \,.\, 8 \, E} = \frac{1350000}{4 \,.\, E}.$$

Nun $E = 1'500000$ Pfund eingesetzt, folgt $a = \frac{135}{4 \,.\, 150} = 0{,}225$ Zoll.

2) Wenn sich eine parallelepipedisch geformte gußeiserne Stange von 2 Zoll Breite und $^1/_2$ Zoll Dicke durch ein in der Mitte aufliegendes Gewicht $P = 18$ Pfund um $^1/_4$ Zoll gesenkt hat, während die Entfernung $l$ der Stützen 5 Fuß beträgt, so ergiebt sich der Elasticitätsmodul des Gußeisens:

$$E = \frac{P l^3}{4 a b h^3} = \frac{18 \,.\, 60^3}{4 \,.\, {}^1/_4 \,.\, 2 \,.\, ({}^1/_2)^3} = \frac{18 \,.\, 60^3}{{}^1/_4} = 72 \,.\, 216000 = 15'552000 \text{ Pfund.}$$

**Hohle Balken.** Von einem hohlen parallelepipedischen Balken $ABCD$, Fig. 354, bestimmt sich das Biegungsmoment, wenn man von dem Momente des vollständigen Balkens das Moment der Höhlung abzieht. Sind $AB = b$ und $BC = h$ die äußere Breite und Höhe und $A_1 B_1 = b_1$ und $B_1 C_1 = h_1$ die innere Breite und Höhe, so hat man die Maße der Biegungsmomente der Flächen $AC$ und $A_1 C_1$:

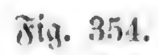
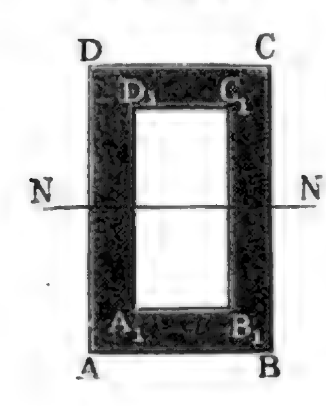


Fig. 354.



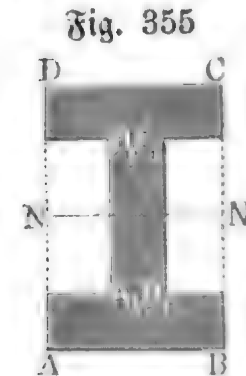

$$= \frac{b h^3}{12} \text{ und } \frac{b_1 h_1^3}{12},$$

und es folgt durch Subtraction das Biegungsmoment des hohlen Balkens:

$$W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}.$$

Ganz auf gleiche Weise ergiebt sich das Biegungsmoment des an den Seiten ausgehöhlten Körpers $ABCD$, Fig. 355. Sind $AB = b$ und $BC = h$ äußere Breite und Höhe, und ist $AB - A_1 B_1 = b_1$, sowie $B_1 C_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der beiden Höhlungen, so erhält man wieder durch Subtraction:

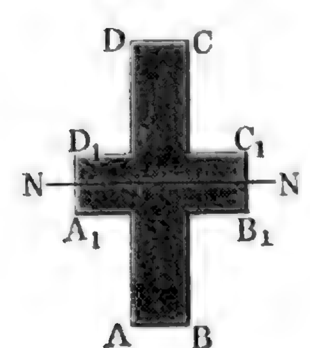
Fig. 355




$$W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}.$$

Ebenso ergiebt sich das Biegungsmoment des Körpers $ABCD$, Fig. 356, mit kreuzförmigem Querschnitte. Ist hier $AB = b$ und $BC = h$ die Breite und Höhe des Mittelstückes, und ist $A_1 B_1 - AB = b_1$ und $A_1 D_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der Seitenstücke, so folgt durch Addition das Biegungsmoment des Ganzen:

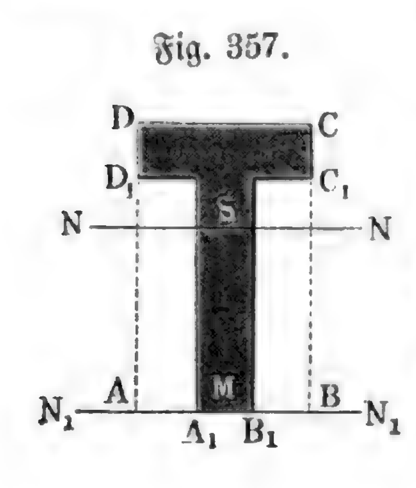
Fig. 356.




$$W = \frac{b h^3 + b_2 h_1^3}{12}.$$

Auf dieselbe Weise kann man die Biegungsmomente vieler anderen in der Praxis vorkommenden Körper finden. So ist z. B. für den Körper mit Tförmigem Querschnitte $A_1 B_1 CD$, Fig. 357, bei den Dimensionen

Fig. 357.




$AB = CD = b$,
$AB - A_1 B_1 = AA_1 + BB_1 = b_1$,
$AD = BC = h$ und
$AD_1 = BC_1 = BC - CC_1 = h_1$,
das Maß des Biegungsmomentes in Beziehung auf die untere Kante $A_1 B_1$:
Moment des Rechteckes $ABCD$ minus Moment der Rechtecke $A_1 D_1$ und $B_1 C_1$, d. i.:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b (2h)^3}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1 (2 h_1)^3}{12}$$
$$= \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{3},$$

wie sich ergiebt, wenn man jedes dieser Rechtecke als die Hälfte von doppelt so hohen Rechtecken mit der neutralen Axe $N_1 N_1$ ansieht. Nun ist die Fläche $A_1 C_1 D = F = bh - b_1 h_1$, und ihr statisches Moment:

$$F . e_1 = bh \cdot \frac{h}{2} - b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} = \frac{1}{2} (b h^2 - b_1 h_1^2);$$

es folgt daher der Hebelarm

$$MS = e_1 = \frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{2 (b h - b_1 h_1)},$$

das Product

$$F . e_1^2 = {}^1/_4 (b h^2 - b_1 h_1^2)^2 : (b h - b_1 h_1)$$

und das Biegungsmoment des Körpers in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt $S$ gehende neutrale Axe $NN$:

$$W = W_1 - F . e_1^2 = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{3} - {}^1/_4 (b h^2 - b_1 h_1^2)^2 : (b h - b_1 h_1)$$

$$= \frac{4 (b h^3 - b_1 h_1^3)(b h - b_1 h_1) - 3 (b h^2 - b_1 h_1^2)^2}{12 (b h - b_1 h_1)}$$

$$= \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4 b h b_1 h_1 (h - h_1)^2}{12 (b h - b_1 h_1)}.$$

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß die hohen, ausgehöhlten und gefiederten Körper bei gleicher Masse ein größeres Biegungsmoment haben, als die breiten, massiven Körper. Weil dieses Moment mit dem Querschnitte $F$ und dem Quadrate ($z^2$) der Entfernung von der neutralen Axe wächst, so hat eine und dieselbe Faser um so mehr Widerstand gegen die Biegung, je entfernter sie von der neutralen Axe liegt. Ist z. B. bei einem massiven parallelepipedischen Balken die Höhe $h$ gleich der doppelten Breite $b$, so fällt das Biegungsmoment entweder

$$W = \frac{b . (2 b)^3}{12} = {}^2/_3 b^4 \text{ oder } = \frac{2 b . b^3}{12} = {}^1/_6 b^4$$

aus, je nachdem man diesen Balken mit der kleineren Breite $b$ oder mit der größeren $2 b$ auflegt; es ist also im ersten Falle das Biegungsmoment viermal so groß, als im zweiten Falle. Wenn man ferner den massiven Balken vom Querschnitte $b h$ durch einen hohlen ersetzt, dessen Höhlung $b h$ gleich ist dem massiven Theile vom Querschnitte $b_1 h_1 - b h$, wenn also $b_1 h_1 - b h = b h$, d. i. $b_1 h_1 = 2 b h$, oder $b_1 = b \sqrt{2}$ und $h_1 = h \sqrt{2}$ ist, so erhält man für den letzteren das Biegungsmoment:

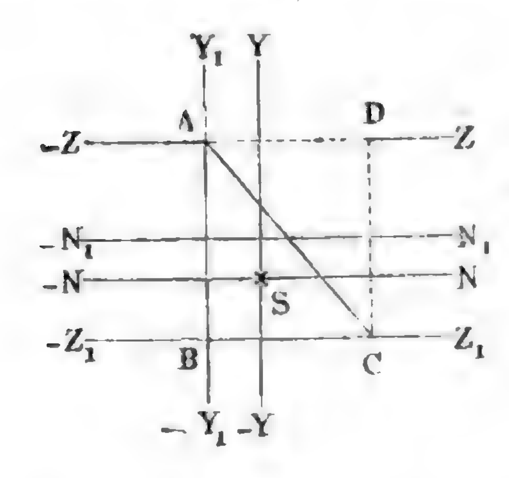
$$\frac{b_1 h_1^3 - b h^3}{12} = \frac{b \sqrt{2} (h \sqrt{2})^3 - b h^3}{12} = {}^3/_{12} b h^3,$$

d. i. dreimal so groß als für den ersteren.

§. 229 **Dreiseitige Balken.** Das Maß des Biegungsmomentes eines prismatischen Körpers mit dreiseitigem Querschnitte $ABC$, Fig. 358 (a. f. S.), wird mit Hülfe der letzten Paragraphen wie folgt bestimmt. Für das Prisma mit rectangulärem Querschnitte $ABCD$ ist, wenn man die Bezeichnungen des vorletzten Paragraphen beibehält, das Maß des Biegungsmomentes

$= \frac{b h^3}{12}$, folglich das für seine Hälfte mit dem triangulären Querschnitte $ABC$, und zwar in Hinsicht auf die Mittellinie $\overline{N_1 N_1}$:

Fig. 358.




$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{b h^3}{12} = \frac{b h^3}{24}.$$

Nun steht aber die Schwerlinie $\overline{NN}$ des Dreieckes um $\frac{1}{6}\, AB = \frac{1}{6}\, h$ von der Mittellinie oder Schwerlinie $\overline{N_1 N_1}$ des Rechteckes ab, daher ist nach §. 224, das Moment in Hinsicht auf $\overline{NN}$:

$$W = W_1 - \left(\frac{h}{6}\right)^2 F = \frac{b h^3}{24} - \frac{b h^3}{72}$$
$$= \frac{b h^3}{36} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b h^3}{12},$$

also das Biegungsmoment $W$ des Balkens mit dreiseitigem Querschnitte ist nur ein Drittel vom Biegungsmomente des parallelepipedischen, bei gleicher Grundlinie und Höhe des Querschnittes. Da nun aber der letztere Balken nur doppelt so viel Volumen hat als der erstere, so folgt, daß bei übrigens gleichen Dimensionen der trianguläre Balken nur $\frac{2}{3}$ so viel Biegungsmoment besitzt als der rectanguläre Balken.

Für die Axe $\overline{Z_1 Z_1}$ durch die Basis $BC$ ist ferner dieses Moment:

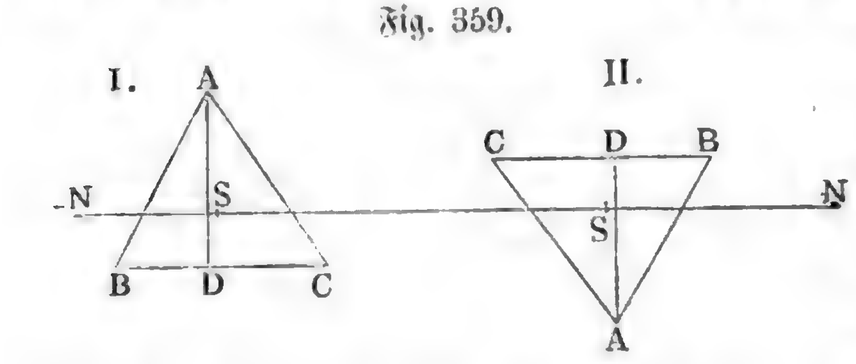
$$W_2 = W + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot F = \frac{b h^3}{36} + \frac{b h^3}{18} = \frac{b h^3}{12},$$

und für die Axe $\overline{ZZ}$ durch die scharfe Kante $A$ ist es:

$$W_3 = W + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{b h}{2} = \frac{b h^3}{36} + \frac{4 b h^3}{18} = \frac{b h^3}{4}.$$

Diese Formeln bedingen übrigens nicht einen rechtwinkelig triangulären Querschnitt. Es gelten dieselben auch für jedes andere Dreieck $ABC$, Fig. 359, dessen Basis $BC$ rechtwinkelig gegen die Biegungskraft $P$ steht; denn es läßt sich dasselbe in zwei rechtwinkelige Dreiecke $ABD$ und $ACD$ zerlegen, deren Grundlinien $BD = b_1$ und $DC = b_2$ zusammen die Grundlinie $BC = b$ des schiefen Dreieckes $ABC$ ausmachen, so daß sich daher für das letztere

Fig. 359.



$$W = \frac{1}{36} b_1 h^3 + \frac{1}{36} b_2 h^3 = \frac{1}{36} (b_1 + b_2) h^3 = \frac{b h^3}{36}$$

berechnet.

Uebrigens ist es natürlich ganz einerlei, ob die Grundlinie $BC$ oben oder unten, also wie in I. oder in II., liegt. Es ist für beide Fälle das Biegungsmoment selbst

$$WE = \frac{b h^3}{36} E,$$

so lange die Elasticitätsmodel ($E$) für Ausdehnung und Zusammendrückung nicht von einander abweichen.

Dieselben Formeln finden auch ihre Anwendung bei einem rhomboidalen Querschnitt $ABCD$, Fig. 360, mit horizontaler Diagonale $BD$. Ist wieder die Breite $BD = b$ und Höhe $AC = h$, so hat man für Körper mit diesem Querschnitte:

$$W = 2 \cdot \frac{b}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b h^3}{48} = \frac{1}{4} \frac{b h^3}{12},$$

d. i. ein Viertel von dem Momente des Balkens mit rectangulärem Querschnitte $EFGH$ bei gleicher Breite und Höhe. Auch folgt hiernach für ein Doppeltrapez $ABED$, Fig. 361, von der Höhe $AC = BD = h$, äußeren Breite $AB = CD = b$ und inneren Breite $EF = b_1$,

$$W = \frac{b h^3}{12} - (b - b_1) \frac{h^3}{48} = \frac{(3b + b_1) h^3}{48}.$$

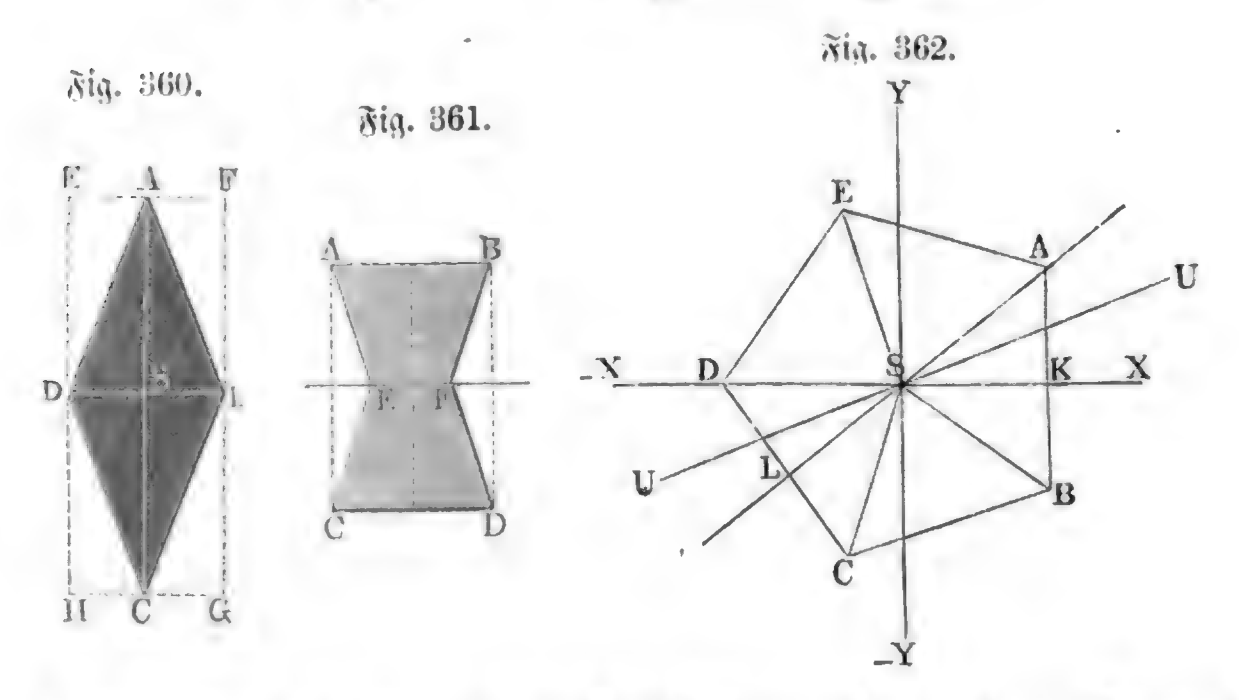
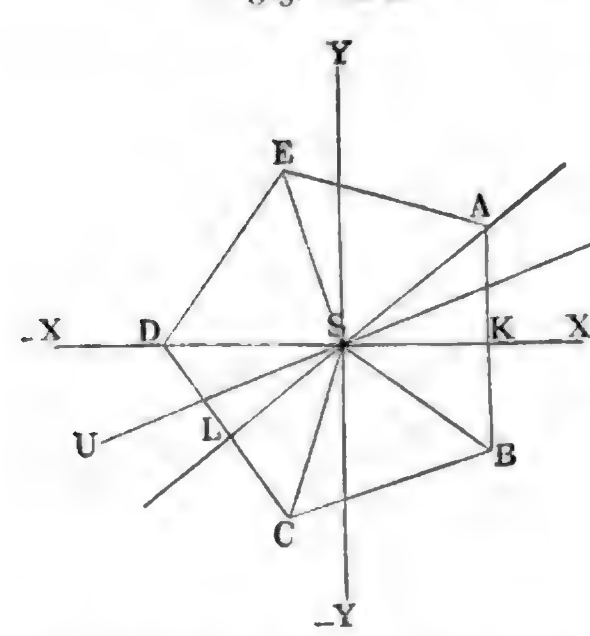



Fig. 360. Fig. 361. Fig. 362.

**Polygonale Balken.** Die vorstehende Theorie kann auch auf Körper mit regelmäßig polygonalen Querschnitten wie $ACE$, Fig. 362, angewendet werden, bei welchen die neutrale Axe $\overline{X}X$ zugleich eine Symmetrieaxe ist. Da sich ein solches Polygon in lauter congruente Dreiecke zerlegen läßt, so kommt es bei dieser Bestimmung vorzüglich darauf an, das §. 230

Biegungsmoment eines solchen Dreieckes $A S B$ zu ermitteln. Bezeichnet man die Seite $A B = B C = C D$ des Polygons oder die Grundlinie eines Ergänzungsdreieckes desselben, durch $s$, und die Höhe $S K$ desselben durch $h$, so hat man das Maß seines Biegungsmomentes in Hinsicht auf die Axe $\overline{X} X$:

Fig. 362 a.




$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{h s^3}{12} = \frac{h s^3}{48},$$

dagegen dasselbe in Hinsicht auf die zweite Axe $\overline{Y} Y$: $= \frac{s h^3}{4}$,

und es ist folglich die Summe beider Momente:

$$\frac{s h^3}{4} + \frac{h s^3}{48} = \frac{s h}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right).$$

Diese Summe gilt nun (nach §. 225) auch für jedes der übrigen Ecke, und es ist daher dieselbe für das Polygon von $n$ Seiten:

$$W_1 + W_2 = \frac{n s h}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right) = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right),$$

wenn man den Inhalt desselben:

$$n \cdot \frac{s h}{2}, \text{ durch } F \text{ ausdrückt.}$$

Bezeichnen wir den Winkel $A S X$ durch $\alpha$, so ist nach §. 225 das Moment in Hinsicht auf die Axe $A S L$:

$$= W_1 (sin. \alpha)^2 + W_2 (cos. \alpha)^2;$$

dasselbe ist aber auch gleich dem Momente $W_1$ in Hinsicht auf $K S D$ oder $\overline{X} X$, daher hat man:

$$W_1 = W_1 (sin. \alpha)^2 + W_2 (cos. \alpha)^2, \text{ oder:}$$
$$W_1 [1 - (sin. \alpha)^2] = W_2 (cos. \alpha)^2, \text{ d. i.:}$$
$$W_1 (cos. \alpha)^2 = W_2 (cos. \alpha)^2, \text{ und folglich:}$$
$$W_1 = W_2.$$

Für eine Axe $\overline{U} U$, welche um einen willkürlichen Winkel $X S U = \varphi$ von der Axe $\overline{X} X$ der Symmetrie abweicht, ist ferner das Moment:

$$W = W_1 \, sin. \varphi^2 + W_2 \, cos. \varphi^2 = W_1 (sin. \varphi^2 + cos. \varphi^2) = W_1.$$

Wenn man folglich in der obigen Gleichung

$$W_1 + W_2 = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right), \; W = W_1 = W_2$$

einsetzt, so erhält man für jede beliebige Axe des regulären Polygons das Maß des Biegungsmomentes:

$$W = W_1 = W_2 = \frac{F}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right),$$

oder, wenn man noch den Halbmesser des Polygons $SA = SB = r$, und hiernach $h^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$ setzt:

$$W = \frac{F}{4}\left(r^2 - \frac{s^2}{6}\right).$$

**Cylindrische und elliptische Balken.** Für den Kreis als Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ist $s = 0$, daher folgt das Maß des Biegungsmomentes eines Cylinders: §. 231

$$W = \frac{F}{4} r^2 = \frac{\pi r^4}{4} = 0,7854\, r^4.$$

Für einen hohlen Cylinder oder eine Röhre mit dem äußeren Halbmesser $r_1$ und inneren Halbmesser $r_2$ folgt daher durch Subtraction:

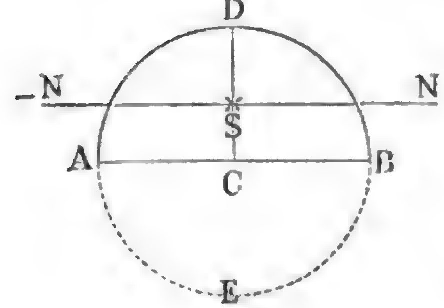
$$W = \frac{\pi\,(r_1^4 - r_2^4)}{4} = \frac{\pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2)}{4} = \frac{F\,(r_1^2 + r_2^2)}{4}$$

$$= \frac{F r^2}{2}\left[1 + \left(\frac{b}{2r}\right)^2\right],$$

wobei $F = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)$ den Inhalt des ringförmigen Querschnittes, $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$, den mittleren Halbmesser, und $b = \frac{r_1 - r_2}{2}$, die Wanddicke des Cylinders bezeichnen.

Der horizontale Durchmesser $AB$ theilt den Vollkreis $DE$, Fig. 363, in zwei Halbkreise $ADB$ und $AEB$, und es ist das Maß des Biegungsmomentes für eine solche Hälfte in Hinsicht auf den Durchmesser $AB$:

Fig. 363.




$$W_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Nun steht aber der Schwerpunkt $S$ des Halbkreises um $CS = \frac{4r}{3\pi}$ (s. §. 113) von dem Mittelpunkte $C$ des Kreises ab, es ist daher für die parallele Axe $\overline{NN}$ durch $S$:

$$W = W_1 - F.\overline{CS}^2 = W_1 - F.\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$$

$$= \pi r^4\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0,1098\,.\,r^4,$$

wogegen für den Halbkreis mit verticalem Durchmesser

$$W = \frac{\pi r^4}{8} = 0{,}3927\, r^4 \text{ ist.}$$

In Hinsicht auf eine Axe $\overline{N N}$, welche um den Winkel $N S X = \alpha$ von der Symmetrieaxe $C D$, Fig. 364, abweicht, ist das **Moment des Halbkreises**:

$$W = \frac{\pi r^4}{8} \sin.\alpha^2 + \pi r^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) \cos.\alpha^2$$
$$= (0{,}3927 \sin.\alpha^2 + 0{,}1098 \cos.\alpha^2)\, r^4.$$

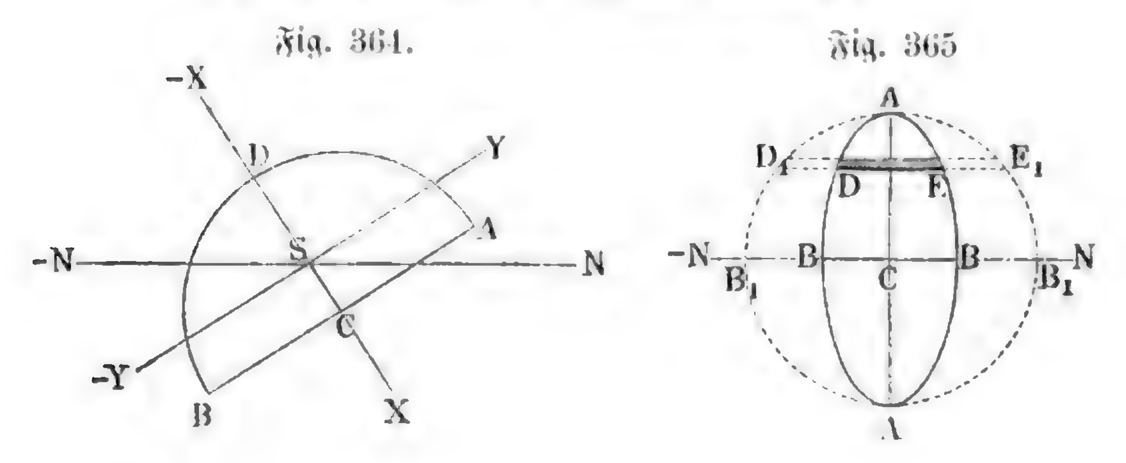


Fig. 364. Fig. 365

Aus der Formel

$$W = \frac{\pi r^4}{4}$$

für das Biegungsmoment des Vollkreises läßt sich auch das für eine **Ellipse** $A B A B$, Fig. 365, ableiten. In Folge der aus Art. 12 der analytischen Hülfslehren bekannten Beziehung der Ellipse zum Kreise, ist, wenn $A B_1 A B_1$ einen Kreis vorstellt, dessen Halbmesser $C A$ der einen Halbaxe $a$ der Ellipse gleich ist, und wenn die andere Halbaxe $C B$ der Ellipse durch $b$ bezeichnet wird, das Verhältniß $\frac{D E}{D_1 E_1}$ der Breite $D E$ eines elliptischen Elementes zur Breite $D_1 E_1$ eines gleichliegenden und gleichhohen Elementes vom Kreise

$$= \frac{B B}{B_1 B_1} = \frac{C B}{C B_1} = \frac{b}{a}.$$

Da nun aber das Biegungsmoment eines solchen Streifens nur der einfachen Breite proportional wächst, so verhält sich daher auch das Moment eines Streifens $D E$ der Ellipse zu dem entsprechenden Streifen $D_1 E_1$ des Kreises wie $b$ zu $a$, und es ist folglich auch das Maß des Biegungsmomentes für den Körper mit elliptischem Querschnitte gleich $\frac{b}{a}$ von dem mit kreisförmigem Querschnitte, d. i.:

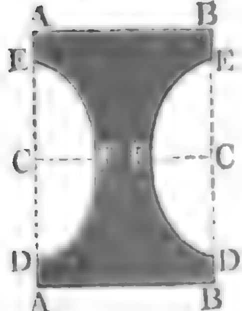
$$W = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Enthält dieser Körper noch eine **elliptische Höhlung** mit den Halbaxen $a_1$ und $b_1$, so hat man für denselben:

$$W = \frac{\pi\,(a^3 b - a_1^3 b_1)}{4}.$$

Ist ferner ein Körper mit **rectangulärem Querschnitte** entweder um seine Axe herum, oder, wie in Fig. 366, an den Seiten **elliptisch ausgehöhlt**, so hat man für dessen Biegungsmoment

Fig. 366.

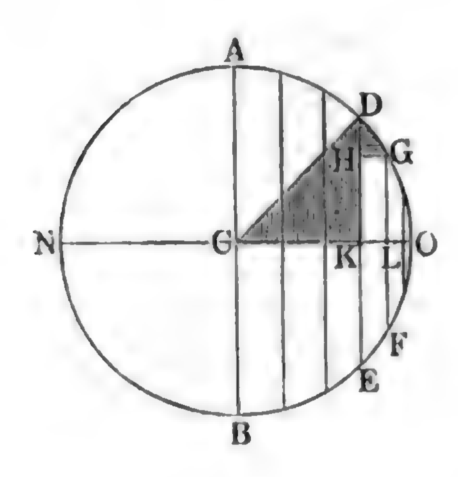



$$W = \frac{b\,h^3}{12} - \frac{\pi\,a_1^3 b_1}{4}$$

zu setzen, wobei $b$ und $h$ die Breite $AB$ und Höhe $AA = BB$ des rectangulären Querschnittes $ABBA$, dagegen $a_1$ und $b_1$ die Halbaxen $CE$ und $CF$ der halbelliptischen Ausschnitte $DFE$ bezeichnen.

§. 232 Das Maß $W$ des Biegungsmomentes von einem **Cylinder** oder einem **Cylinderabschnitte** läßt sich einfach auch auf folgende Weise ermitteln. Man theile den Quadranten $ADO$ des Cylinderquerschnittes $AOBN$, Fig. 367, in $n$ gleiche Theile, führe durch die Theilpunkte verticale Schnitte, wie $DE$, $FG$ u. s. w. und bestimme die Biegungsmomente der dadurch erhaltenen, als gerade Parallelepipede anzusehenden Blätter, z. B. $DEFG$ u. s. w. Die Summe der Biegungsmomente dieser Blätter giebt das Biegungsmoment des halben Cylinders $AOB$, und durch Verdoppelung dieses Momentes erhält man das Biegungsmoment des ganzen Cylinders. Bezeichnet $r$ den Halbmesser $CA = CO$ des kreisförmigen Querschnittes $AOBN$, so ist ein Bogentheil $DG = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r}{2n}$, und in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke $DGH$ und $CDK$, für die Dicke $KL$ des Cylinderblattes $DEFG = 2 \,.\, DGLK$:

Fig. 367.




$$KL = GH = \frac{KD}{CD} \cdot DG = \frac{KD}{CD} \cdot \frac{\pi r}{2n} = \frac{\pi}{2n} \cdot \overline{KD}.$$

Nun folgt nach der bekannten Formel in §. 226, das Maß des Biegungsmomentes von dem Blatte $DEFG$:

$$= \frac{\overline{KL}.(2\overline{KD})^3}{12} = \frac{8}{12} \cdot \frac{\pi}{2n} \cdot \overline{KD}^4 = \frac{\pi}{3n}\overline{KD}^4.$$

Setzen wir den veränderlichen Winkel $ACD$, welcher den Abstand des Schnittes $DE$ vom verticalen Durchmesser $AB$ bestimmt, $= \varphi$, so erhalten wir für die Ordinate oder halbe Blatthöhe $DK = r\, cos.\, \varphi$, und daher das letzte Biegungsmoment $= \frac{\pi r^4}{3n}(cos.\, \varphi)^4 = \frac{\pi r^4}{3n}\, \frac{3 + 4\, cos.\, 2\varphi + cos.\, 4\varphi}{8}$, da sich $(cos.\, \varphi)^4 = \frac{3 + 4\, cos.\, 2\varphi + cos.\, 4\varphi}{8}$ setzen läßt (siehe „Ingenieur" Seite 157). Um nun das Maß des Biegungsmomentes des halben Cylinders zu finden, hat man im Factor $3 + 4\, cos.\, 2\varphi + cos.\, 4\varphi$, für $\varphi$ nach und nach die Werthe $1 \cdot \frac{\pi}{2n}$, $2 \cdot \frac{\pi}{2n}$, $3 \cdot \frac{\pi}{2n}$ bis $n \cdot \frac{\pi}{2n}$ einzusetzen, die erhaltenen Ergebnisse zu addiren, und zuletzt noch mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{\pi r^4}{24n}$ zu multipliciren. Nun giebt aber die Zahl 3, $n$ mal zu sich addirt, das Product $3n$, ferner die Summe der Cosinuse von 0 bis $\pi$, = Null, weil die Cosinuse im zweiten Quadranten von $\frac{\pi}{2}$ bis $\pi$ gleich und entgegengesetzt sind den Cosinusen im ersten Quadranten von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, und ebenso die Summe der Cosinuse von 0 bis $2\pi$, = Null, weil auch die Cosinuse im dritten Quadranten von $\pi$ bis $^3/_2\, \pi$ die im vierten Quadranten von $^3/_2\, \pi$ bis $2\pi$ aufheben, daher bleibt für das Maß des Biegungsmomentes von der Cylinderhälfte $AOB$:

$$\frac{W}{2} = \frac{\pi r^4}{24n} \cdot 3n = \frac{\pi r^4}{8},$$ und endlich für den ganzen Cylinder:

$$W = \frac{\pi r^4}{4} = 0{,}7854\, r^4,$$ oder auch

$$W = \frac{\pi d^4}{64} = 0{,}09817\, d^4,$$

wenn $d = 2r$, den Durchmesser des Cylinders bezeichnet.

(Anmerkung). Im Gewande der Differenzial- und Integralrechnung ist, da $\partial \varphi$ ein Element des Bogens $\varphi$ bezeichnet, das Element $DG = \frac{r\pi}{2n}, = r\,\partial\varphi$, und daher das Moment des blattförmigen Flächenelementes $DEFG$,

$$= \frac{2\,\partial\varphi \,.\, r^4}{3}(cos.\, \varphi)^4 = \frac{2r^4\,\partial\varphi}{3}\left(\frac{3 + 4 cos. 2\varphi + cos. 4\varphi}{8}\right)$$

$$= \frac{r^4}{12}(3 + 4\, cos.\, 2\varphi + cos.\, 4\varphi)\,\partial\varphi = \frac{r^4}{12}(3\,\partial\varphi + 4\, cos.\, 2\varphi\,\partial\varphi + cos.\, 4\varphi)\,\partial\varphi$$

$$= \frac{r^4}{12}[3\,\partial\varphi + 2\, cos.\, 2\varphi\,\partial(2\varphi) + {}^1/_4\, cos.\, 4\varphi\,\partial(4\varphi)]$$

und endlich das Moment des Cylinderstückes $ABED$:

$$W = \frac{r^4}{12}\left(3\int \partial \varphi + 2\int cos.\, 2\,\varphi\, \partial\, (2\,\varphi) + \tfrac{1}{4}\int cos.\, 4\,\varphi\, \partial\, (4\,\varphi)\right), \text{ d. i.:}$$

$$W = \frac{r^4}{12}(3\,\varphi + 2\, sin.\, 2\,\varphi + \tfrac{1}{4}\, sin.\, 4\,\varphi) \text{ (s. analyt. Hülfslehren, Art. 26, I.).}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $sin.\, 2\,\varphi = sin.\, \pi = 0$, und $sin.\, 4\,\varphi = sin.\, 2\,\pi = 0$, eingesetzt und das Ganze verdoppelt, erhält man, wie oben, das Biegungsmoment des ganzen Cylinders, wieder

$$W = \frac{r^4}{12} \cdot \frac{3\,\pi}{2} \cdot 2 = \frac{\pi\, r^4}{4}.$$

Für das Segment $DOE$ ist dagegen

$$W = \frac{\pi\, r^4}{8} - (3\,\varphi + 2\, sin.\, 2\,\varphi + \tfrac{1}{4}\, sin.\, 4\,\varphi)\, \frac{r^4}{12}$$

$$= \left[\frac{\pi - 2\,\varphi}{8} - \left(\frac{2\, sin.\, 2\,\varphi + \tfrac{1}{4}\, sin.\, 4\,\varphi}{12}\right)\right] r^4$$

$$= [6\,(\pi - 2\,\varphi) - 8\, sin.\, 2\,\varphi - sin.\, 4\,\varphi]\, \frac{r^4}{48}.$$

Durch einfache Subtraction läßt sich mittels der letzten Formel auch das Moment $W$ für ein Brett $DEFG$ von endlicher Dicke $KL$ bestimmen.

**Balken mit krummlinigen Querschnitten.** Für Körper mit gesetzmäßig krummlinigen Querschnitten bestimmt sich das Maß $W$ des Biegungsmomentes am sichersten mit Hülfe der höheren Analysis. Man zerlegt zu diesem Zwecke eine solche Fläche $ANP$, Fig. 368, durch Ordinaten in ihre Elemente, und bestimmt nun die Momente eines solchen Elementes sowohl in Hinsicht auf die Abscissenaxe $AX$ als auch in Hinsicht auf die Ordinatenaxe $AY$. (§. 233)

Fig. 368.

Ist $x$ die Abscisse $AN$ und $y$ die Ordinate $NP$, so hat man den Inhalt eines Elementes:

$$\partial F = y\, \partial x$$

(s. analyt. Hülfslehren, Art. 29) und daher das Maß seines Biegungsmomentes in Hinsicht auf die Axe $AX$:

$$\partial W_1 = \tfrac{1}{3}\, y^2 \,.\, \partial F = \tfrac{1}{3}\, y^3\, \partial x$$

(s. §. 226), und dagegen in Hinsicht auf die Axe $AY$:

$$\partial W_2 = x^2\, y\, \partial x,$$

da hier das Element an allen Stellen um $x$ von $AY$ absteht.

Durch Integration erhält man nun für die ganze Fläche $ANP = F$:

$$W_1 = \frac{1}{3}\int y^3\, \partial x$$

und

$$W_2 = \int x^2 y \partial x.$$

Hat man nun (nach §. 115) den Schwerpunkt $S$ der Fläche $ANP$ ermittelt, also seine Coordinaten $AK = u$ und $KS = v$ bestimmt, so findet man hiernach die Maße der Biegungsmomente in Hinsicht auf die durch den Schwerpunkt gehenden und den Coordinatenrichtungen parallel laufenden Axen:

$$W_1 = \frac{1}{3}\int y^3 \partial x - v^2 F,$$

und

$$W_2 = \int x^2 y \partial x - u^2 F.$$

Z. B. für eine Parabelfläche $ANP$, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man (nach Art. 29 der analyt. Hülfslehren):

$F = {}^2/_3\, x y$, und (nach §. 115)
$u = {}^3/_5\, x$ und $v = {}^3/_8\, y$,

daher:

$$v^2 F = \left(\frac{3}{8}\right)^2 F y^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 y^2 \cdot \frac{2}{3}\, x y = \frac{3}{32}\, x y^3$$

und

$$u^2 F = \left(\frac{3}{5}\right)^2 F x^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 x^2 \cdot \frac{2}{3}\, x y = \frac{6}{25}\, x^3 y.$$

Da ferner aus $y^2 = px$, $x = \frac{y^2}{p}$ und $\partial x = \frac{2 y \partial y}{p}$ folgt, so ist:

$$\frac{1}{3}\int y^3 \partial x = \frac{1}{3}\int y^3 \cdot \frac{2 y \partial y}{p} = \frac{2}{3p}\int y^4 \partial y = \frac{2 y^5}{15 p} = \frac{2}{15}\, y^3 x$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\, x y \,.\, y^2 = \frac{1}{5}\, F y^2,$$

und

$$\int x^2 y \partial x = \int \frac{y^4}{p^2} \cdot \frac{2 y^2 \partial y}{p} = \frac{2}{p^3}\int y^6 \partial y = \frac{2 y^7}{7 p^3} = \frac{2}{7}\, x^3 y$$
$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3}\, x y \,.\, x^2 = \frac{3}{7}\, F x^2.$$

Endlich ergiebt sich:

$$W_1 = \frac{1}{5}\, F y^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 F y^2 = \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{64}\right) F y^2 = \frac{19}{320}\, F y^2,$$

und

$$W_2 = \frac{3}{7}\, F x^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 F x^2 = \frac{12}{175}\, F x^2.$$

Für eine symmetrische Parabelfläche $ADB$, Fig. 369, deren Sehne $AB = s$ und Höhe $CD = h$ ist, läßt sich hiernach setzen: das Moment in Hinsicht auf die Symmetricaxe $\overline{X}X$:

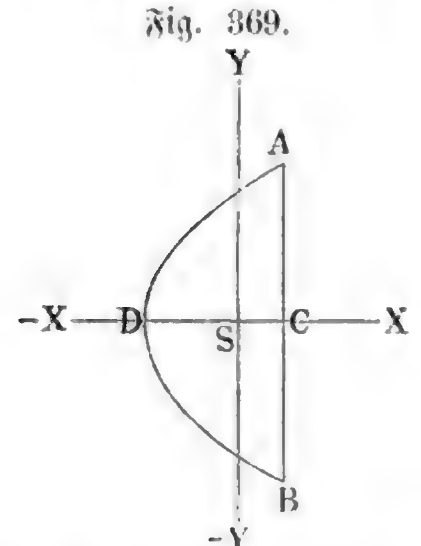


Fig. 369.

$$W_1 = \frac{1}{5} F \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{F s^2}{20} = \frac{s^3 h}{30},$$

wogegen das in Hinsicht auf die normale Axe $\overline{Y}Y$ bleibt:

$$W_2 = \frac{12}{175} F h^2 = \frac{8}{175} h^3 s.$$

**Krummlinige Querschnitte.** — §. 234 Kommt es darauf an, das Biegungsmoment eines Körpers zu ermitteln, dessen Querschnitt eine zusammengesetzte oder eine ungesetzmäßige Figur bildet, so muß man entweder diesen Querschnitt in Theile zerlegen, für welche das Maß $W$ bereits bekannt ist, oder man muß denselben durch verticale Linien in schmale Streifen zertheilen, die Maße der Biegungsmomente dieser Streifen (nach §. 226) berechnen und zuletzt noch dieselben durch Addition vereinigen, wobei wieder mit Vortheil die Regel von Simpson oder Cotes in Anwendung gebracht werden kann.

Ist z. B. $ABEC$, Fig. 370, eine solche Figur oder ein solcher Theil des Körperquerschnittes, und soll das Biegungsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe $AX$ bestimmt werden, so ermittelt man erst das Maß $W_1$ für den Flächentheil $ABGD$, und dann das Maß $W_2$ für den Theil $CED$; subtrahirt man dann das letztere vom ersteren, so erhält man das gesuchte Moment: $W = W_1 - W_2$.

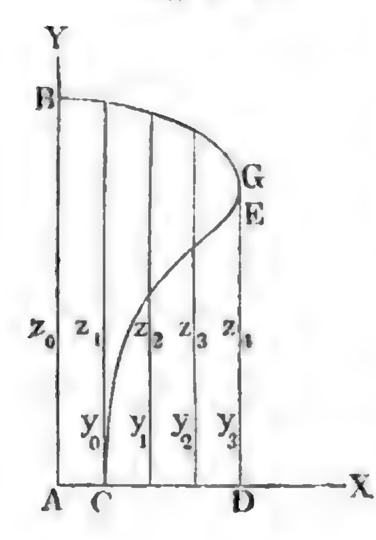


Fig. 370.

Ist die Grundlinie $AD$ des ersten Theiles $= x$, und sind die in gleichen Abständen von einander stehenden Höhen desselben $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4$, so hat man das entsprechende Maß des Biegungsmomentes nach der Simpson'schen Regel:

$$W_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{12} (z_0^3 + 4 z_1^3 + 2 z_2^3 + 4 z_3^3 + z_4^3).$$

Ist dagegen die Breite $CD$ des abzuziehenden Stückes $CDE = x_1$, und sind die Höhen desselben $y_0, y_1, y_2, y_3$, so hat man nach der Regel von Cotes (s. analyt. Hülfslehren, Art. 38):

$$W_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1}{8} (y_0^3 + 3 y_1^3 + 3 y_2^3 + y_3^3).$$

Geht $AX$ nicht durch den Schwerpunkt $S$ des ganzen Querschnittes, so muß dann noch durch die bekannte Regel (§. 224) eine Reduction auf die Axe durch $S$ vorgenommen werden. Auf diese Weise sind natürlich auch noch andere, vielleicht unter $AX$ und neben $AY$ gelegene Theile des ganzen Querschnittes zu behandeln. Den Schwerpunkt $S$ kann man entweder nach §. 124, oder auch empirisch bestimmen, indem man die ganze Fläche aus dünnem Blech oder Papier ausschneidet, und auf eine scharfe Schneide legt (s. §. 104). Wenn man auf diese Weise zwei Schwerlinien bestimmt, so erhält man im Durchschnitte derselben den gesuchten Schwerpunkt.

Beispiel. In der Fig. 370 ist $ABGEC$ ein Theil von dem Querschnitte einer Eisenbahnschiene, welcher sich als die Differenz zweier Flächen $ABGD$ und $CED$ ansehen läßt. Wenn nun die erstere eine Breite $AD$ von $^4/_3$ und die letztere eine Breite $CD$ von 1 Zoll hat, und wenn ferner die Höhen des ersteren

$$z_0 = 2{,}85;\ z_1 = 2{,}82;\ z_2 = 2{,}74;\ z_3 = 2{,}60 \text{ und } z_4 = 2{,}30$$

und die des letzteren

$$y_0 = 0{,}20;\ y_1 = 1{,}50;\ y_2 = 1{,}80 \text{ und } y_3 = 2{,}15 \text{ Zoll}$$

betragen, so ist das Maß des Widerstandsmomentes vom ersten Theile:

$$W_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot[2{,}85^3 + 2{,}30^3 + 4\,.\,(2{,}82^3 + 2{,}60^3) + 2\,.\,2{,}74^3]$$

$$= \frac{1}{27}\cdot(23{,}149 + 12{,}167 + 4\,.\,40{,}002 + 2\,.\,20{,}571)$$

$$= \frac{1}{27}\cdot 236{,}47 = 8{,}7584,$$

und dagegen das vom zweiten Theile:

$$W_2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{8}\cdot[0{,}20^3 + 2{,}15^3 + 3\,(1{,}50^3 + 1{,}80^3)]$$

$$= \frac{1}{24}\cdot(0{,}0080 + 9{,}9384 + 27{,}6210) = \frac{37{,}5674}{24} = 1{,}5653,$$

daher das gesuchte Maß für die ganze Fläche $ABGEC$:

$$W = W_1 - W_2 = 8{,}7584 - 1{,}5653 = 7{,}1931.$$

Anmerkung. Auch kann man setzen:

$$W = \frac{z}{12}\left(\frac{z}{4}\right)^2(1\,.\,0^2\,.\,y_0 + 4\,.\,1^2\,.\,y_1 + 2\,.\,2^2\,.\,y_2 + 4\,.\,3^2\,.\,y_3 + 1\,.\,4^2\,.\,y_4)$$

$$= \frac{z^3}{192}\,(4\,y_1 + 8\,y_2 + 36\,y_3 + 16\,y_4),$$

wenn $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ die in den Abständen $^0/_4\,z$, $^1/_4\,z$, $^2/_4\,z$, $^3/_4\,z$, $^4/_4\,z$, von $AX$ gemessenen Breiten bezeichnen.

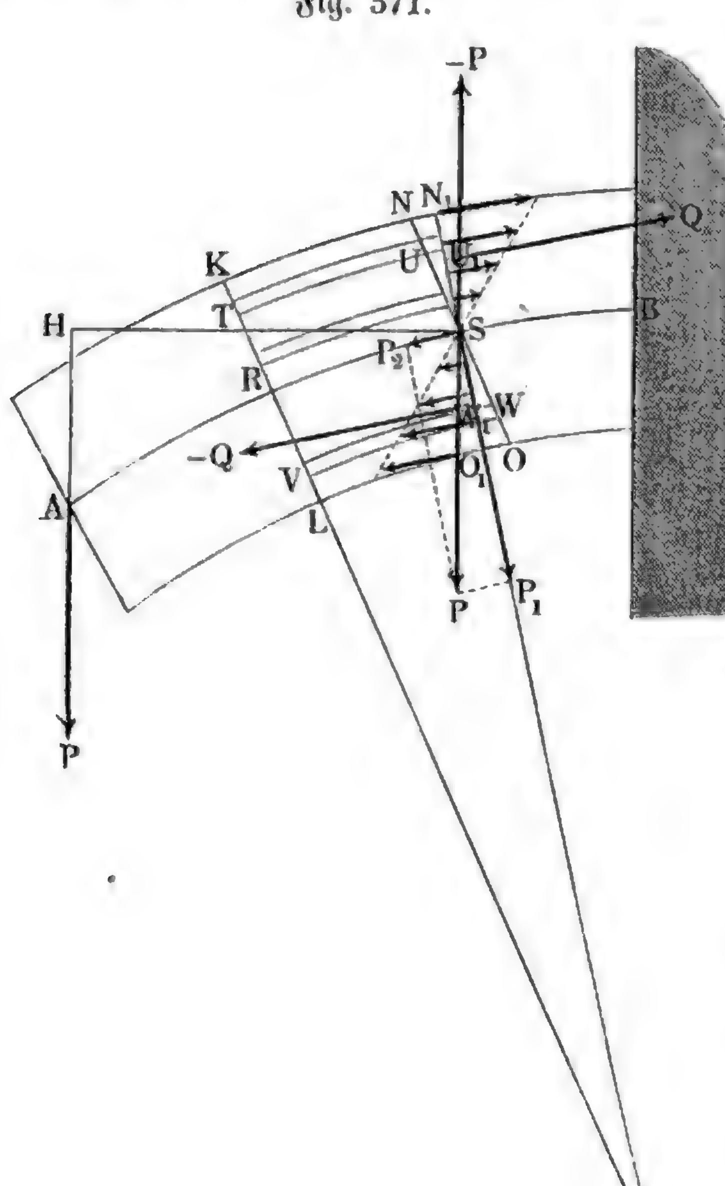
§. 235 **Biegungsfestigkeit.** Kennt man das Biegungsmoment eines an einem Ende $B$ festgehaltenen und am anderen Ende $A$ von einer Kraft $P$ gespannten Körpers $AKOB$, Fig. 371, so kann man auch die Spannungen in jedem Querschnitte $NO$ desselben finden. Bezeichnet $S$ die Spannung pro Quadratzoll in einer Entfernung $SN = e$ von der neutralen Axe $S$, so sind die Spannungen in den Abständen $z_1, z_2 \ldots$, $S_1 = \frac{z_1}{e}S$, $S_2 = \frac{z_2}{e}S \ldots$, und bei den Querschnitten $F_1, F_2 \ldots$, die Momente derselben:

$$M_1 = F_1 S_1 z_1 = F_1 z_1^2 \cdot \frac{S}{e},\ M_2 = F_1 S_2 z_2 = F_2 z_2^2 \frac{S}{e} \text{ u. s. w.},$$

und es folgt die Summe der Momente der sämmtlichen Spannungen im Querschnitte $NO$:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots = (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots) \frac{S}{e} = \frac{WS}{e}.$$

Fig. 371.




Ist nun $x$ der Abstand $SH$ des Querschnittes $NO$ vom Angriffspunkt $A$ der Kraft $P$, so hat man auch $M = Px$, und es folgt daher

1) $Px = \frac{WS}{e}$, oder

$Pxe = WS$, sowie die Spannung des Körpers in dem Abstande $e$ von der neutralen Axe,

2) $S = \frac{Me}{W} = \frac{Pxe}{W}$.

Dieselbe wächst mit $x$ gleichmäßig und ist daher für $x = l$, d. i. im Befestigungspunkte $B$ am größten. Ebenso nimmt sie auch mit $e$ gleichmäßig zu, und ist daher an der Stelle am größten, welche von der neutralen Axe am meisten absteht. Damit der Körper an keiner Stelle über die Elasticitätsgrenze hinaus gespannt werde, darf die Maximalspannung $S$ höchstens den Tragmodul $T$ erreichen, ist folglich

$$S = T = \frac{Ple}{W}, \text{ oder}$$

$$Pl = \frac{WT}{e}$$

zu setzen, wonach also die Tragkraft des Balkens $AKOB$:

$$P = \frac{WT}{le}$$ folgt.

Ebenso erhält man auch die Kraft zum Abbrechen des Körpers in $B$:

$$P_1 = \frac{WK}{le},$$

wobei man für $K$ einen, allerdings durch Zerbrechungsversuche besonders zu bestimmenden Festigkeitsmodul einzusetzen hat. Uebrigens läßt sich die Grundformel $Px = \frac{WS}{e}$ auch aus oben §. 215 gefundener Grundformel $Px = \frac{WE}{r}$, wie folgt, unmittelbar ableiten.

Wenn man die von der Spannung $S$ hervorgebrachte Ausdehnung $NN_1$ durch $\sigma$ bezeichnet, so ist auch $S = \sigma E$, und wenn man in der Proportion

$$\frac{NN_1}{SN} = \frac{RS}{MR},$$

$\overline{NN_1} = \sigma$, $\overline{SN} = e$, $\overline{RS} = 1$. und $\overline{MR} = r$, den Krümmungshalbmesser einführt, also $\frac{\sigma}{e} = \frac{1}{r}$ oder $\sigma = \frac{e}{r}$ setzt, so folgt

$$S = \frac{e}{r} E, \text{ oder } \frac{S}{e} = \frac{E}{r}, \text{ und daher auch}$$

$$Px = \frac{WE}{r} = \frac{WS}{e}.$$

Setzen wir in der Formel $L = \frac{1}{6} \frac{P^2 l^3}{WE}$ (§. 217) für die mechanische Arbeit zum Biegen des Körpers $AKB$, das Moment $Pl = \frac{TW}{e}$ und den Tragmodul $T = \sigma E$ ein, so erhalten wir

$$L = \frac{1}{6} \frac{T^2 W^2}{e^2} \cdot \frac{l}{WE} = \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{Wl}{3 e^2}.$$

Nun ist aber (nach §. 206) $\frac{1}{2} \sigma^2 E$ der Arbeitsmodul $A$ der Elasticität, daher folgt die mechanische Arbeit, durch welche der Körper bis zur Elasticitätsgrenze gebogen wird,

$$L = A \cdot \frac{Wl}{3 e^2}.$$

Ist $b$ die größere Breite des Körpers, und denkt man sich den ganzen Querschnitt $F$ des Körpers in $n$ gleich breite Streifen von der Breite $\frac{b}{n}$ und den Höhen $z_1, z_2, z_3 \ldots$ zerlegt, so kann man setzen:

$$F = \frac{b}{n} (z_1 + z_2 + z_3 + \cdots) \text{ und}$$

$$W = \frac{b}{12n}(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 \ldots), \text{ daher auch}$$

$$Wl = \left(\frac{z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + \cdots}{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots}\right)\frac{Fl}{12}.$$

Jedenfalls läßt sich $z_1 = \mu_1 e$, $z_2 = \mu_2 e$, $z_3 = \mu_3 e \ldots$ setzen, wobei $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ von der Querschnittsform abhängige Zahlen bezeichnen, daher hat man auch

$$\frac{Wl}{e^2} = \left(\frac{\mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3 + \cdots}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots}\right)\frac{Fl}{12},$$

und daher die mechanische Arbeit

$$L = \frac{A}{3}\left(\frac{\mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3 + \cdots}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots}\right)\frac{Fl}{12}.$$

Nun ist aber $\frac{\mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$ ein bloß von der Form des Körpers abhängiger Coefficient $\psi$, und $Fl = V$ das Volumen des Körpers, daher hängt die mechanische Arbeit $L = {}^1/_{36}\,\psi A V$ nicht von den einzelnen Dimensionen, sondern nur von der Querschnittsform und vom Volumen des gebogenen Körpers ab. Bei Körpern von gleicher materieller Beschaffenheit und ähnlichen Querschnitten ist also diese Arbeit dem Volumen des Körpers proportional.

Für die Arbeit zum Abbrechen ist ebenso

$$L_1 = B \cdot \frac{Wl}{3e^2}$$

zu setzen, wenn $B$ den Arbeitsmodul des Abbrechens bezeichnet.

**Festigkeitsformeln.** Für einen massiven parallelepipedischen Balken $ACB$, Fig. 372, von der Länge $l$, Breite $b$ und Höhe $h$ ist §. 236

Fig. 372.

$e = {}^1/_2\,h$ und, nach §. 226, $W = \frac{bh^3}{12}$, daher $\frac{W}{e} = \frac{bh^2}{6}$ und die Tragkraft desselben: $P = \frac{bh^2}{l}\,\frac{T}{6}$, also das Tragmoment: $Pl = bh^2 \cdot \frac{T}{6}$.

Auch folgt hiernach die mechanische Arbeit, um diesen Balken bis zur Elasticitätsgrenze zu biegen:

$$L = \frac{A}{3}\,\frac{W}{e}\,\frac{l}{e} = \frac{A}{3} \cdot \frac{bh^2}{6}\,\frac{2l}{h} = {}^1/_9\,Abhl = {}^1/_9\,AV.$$

Ist der Balken hohl, sind also seine Querschnitte wie Fig. 373 und Fig. 374 geformt, so hat man

$$\frac{W}{e} = \frac{b\,h^3 - b_1\,h_1^3}{12 \cdot {}^1\!/_2\, h} = \frac{b\,h^3 - b_1\,h_1^3}{6\,h}, \text{ daher}$$

$$P\,l = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{6\,h}\,T,$$

wo bei $b$ und $h$ die äußere, sowie $b_1$ und $h_1$ die innere Breite und Höhe

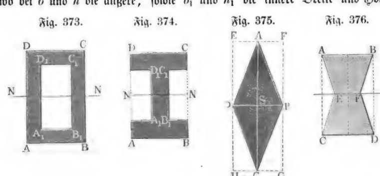


Fig. 373. Fig. 374. Fig. 375. Fig. 376.

des Querschnittes bezeichnen. Beim Körper mit rhomboidalem Querschnitte, wie Fig. 375, ist

$$\frac{W}{e} = \frac{b\,h^3}{48 \,.\, {}^1\!/_2\, h} = \frac{b\,h^2}{24}, \text{ daher}$$

$$P = \frac{b\,h^2}{l} \cdot \frac{T}{24} = {}^1\!/_4\, \frac{b\,h^2}{l} \cdot \frac{T}{6},$$

d. i. $^1/_4$ mal so groß als beim parallelepipedischen Balken von gleicher Höhe $AC = h$ und Breite $BD = b$.

Ferner beim Balken mit doppeltrapezförmigem Querschnitt, wie Fig. 376, ist

$$\frac{W}{e} = \frac{(3\,b + b_1)\,h^3}{48 \,.\, {}^1\!/_2\, h} = \frac{(3\,b + b_1)\,h^2}{24}, \text{ daher das Tragmoment}$$

$$P\,l = \frac{(3\,b + b_1)\,h^2}{4} \cdot \frac{T}{6},$$

wobei $b$ die obere, sowie $b_1$ die mittlere Dicke und $h$ die Höhe des Querschnittes bezeichnen.

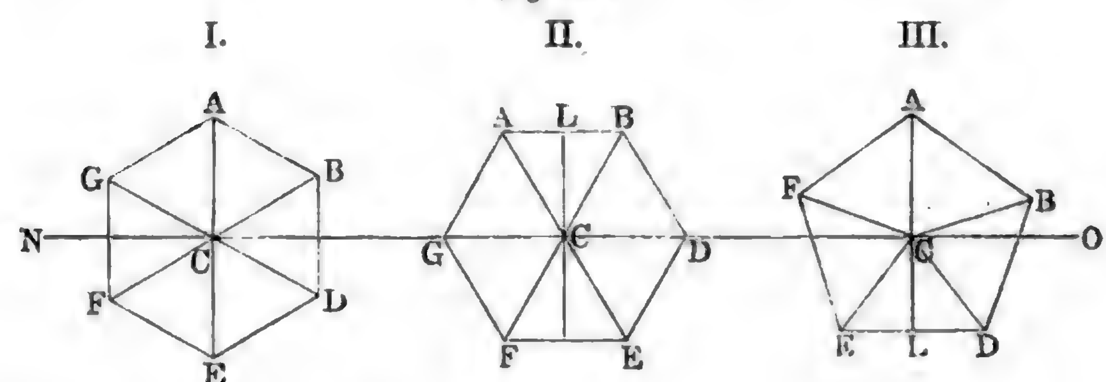
Für einen Balken mit regelmäßig $2n$seitiger Basis, wie $ADF$, Fig. 377, I. u. II., hat man, wenn $r$ den äußeren Halbmesser $CA$, $s$ die Seitenlänge $AB$, $h$ den inneren Halbmesser $CL$ und $F$ den Inhalt des ganzen Querschnittes bezeichnet,

$$W = \frac{F}{4}\left(r^2 - {}^1\!/_6\, s^2\right) = \frac{F}{4}\left(h^2 + {}^1\!/_{12}\, s^2\right) = \frac{F\,(r^2 + 2\,h^2)}{12},$$

und je nachdem die neutrale Axe $NO$, wie in Fig. 377, I., durch die gegenüberliegende Ecke, oder, wie in Fig. 377, II., durch die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten geht,

entweder $e = r$ oder $e = h = \sqrt{r^2 - (1/2\, s)^2}$ zu setzen.

Fig. 377.




Daher folgt für den ersten Fall:

$$Pl = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12r} T,$$ und dagegen für den zweiten:

$$P_1 l = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12h} T,$$ während in beiden Fällen:

$$F = 1/2\, n s h = n h \sqrt{r^2 - h^2} = 1/2\, n s \sqrt{r^2 - (1/2\, s)^2}$$ ist.

Das Verhältniß $\frac{P_1}{P}$ der Tragkräfte ist $= \frac{r}{h}$.

Ist die Anzahl $n$ der Seiten des polygonalen Querschnittes ungerade, wie Fig. 377, III., so hat man für $e$ stets $CA = r$ einzusetzen, und daher nur die erstere Formel in Anwendung zu bringen, vorausgesetzt, daß die Kraftrichtung Symmetrieaxe des ganzen Querschnittes ist.

Für den quadratischen Querschnitt ist $s = 2h = r\sqrt{2}$, $F = s^2$, und daher das Tragmoment

$$Pl = \frac{s^3}{6\sqrt{2}} T = \frac{r^3}{3} T = 0{,}333\, r^3 T,$$ dagegen

$$P_1 l = \frac{s^3}{6} T = \frac{r^3\sqrt{2}}{3} T = 0{,}471\, r^3 T.$$

Für den sechsseitigen Querschnitt hat man $s = r = \frac{2h}{\sqrt{3}}$,

$$F = \frac{3\sqrt{3}}{2} s^2 = 2{,}598\, s^2,$$ und daher

$$Pl = \frac{5\sqrt{3}}{16} s^3 T = \frac{5\sqrt{3}}{16} r^3 T = 0{,}541\, r^3 T,$$ dagegen

$$P_1 l = 5/8\, s^3 T = 5/8\, r^3 T = 0{,}625\, r^3 T.$$

Für den regelmäßig achtseitigen Querschnitt ist:

$$s = r\sqrt{2-\sqrt{2}}\,,\ h = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ und}$$

$$F = 4\,s\,h = 2\sqrt{2}\,.\,r^2 = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\,s^2; \text{ daher}$$

$$P\,l = \frac{4(2\sqrt{2}+1)}{3\sqrt{20+14\sqrt{2}}}\,s^3\,T = \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{6}\right) r^3\,T = 0{,}638\ r^3\ T,$$

und

$$P_1\,l = \frac{4(2\sqrt{2}+1)}{3\sqrt{17+12\sqrt{2}}}\,s^3\,T = \frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,r^3\,T = 0{,}691\,r^3\,T.$$

Für einen massiven Cylinder vom Halbmesser $r$ hat man

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi\,r^4}{4\,r} = \frac{\pi\,r^3}{4}, \text{ daher}$$

$$P\,l = \frac{\pi}{4}\,r^3\,T = 0{,}785\,r^3\,T_1 = {}^1/_4\,F\,r\,.\,T, \text{ und}$$

$$L = \frac{A}{3}\cdot\frac{\pi\,r^3}{4}\cdot\frac{l}{r} = {}^1/_{12}\,A\,.\,\pi\,r^2\,l = {}^1/_{12}\,A\,V.$$

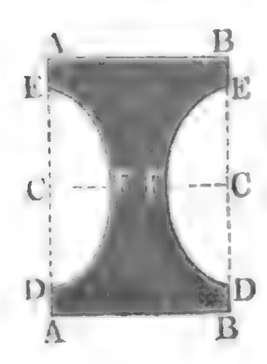
Ist der Cylinder hohl, so hat man dagegen

$$P\,l = \frac{\pi}{4}\,\frac{(r_1^4 - r_2^4)}{r_1}\,T = \frac{1+\left(\frac{b}{2\,r}\right)^2}{1+\frac{b}{2\,r}}\,\frac{F\,r}{2}\,T \text{ (vergl. §. 231),}$$

wobei $r_1$ den äußeren, $r_2$ den inneren sowie $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$, den mittleren Halbmesser, ferner $F = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)$ den Querschnitt und $b = r_1 - r_2$ die Breite des ringförmigen Cylinderquerschnittes bezeichnen.

Fig. 378.

Fig. 379.




Für den Balken mit elliptischem Querschnitte, wie Fig. 378, dessen Halbaxe $CA = a$ die Richtung der Kraft hat, und Halbaxe $CB = b$ in der neutralen Axe liegt, ist

$$P\,l = \frac{\pi\,a^2\,b}{4}\,T = {}^1/_4\,F\,a\,T.$$

Endlich für den parallelepipedischen Balken mit halbelliptischen Aushöhlungen an den Seiten, wie Fig. 379, hat man,

$$P\,l = \frac{{}^1/_{12}\,b\,h^3 - {}^1/_4\,\pi\,b\,a_1^3}{{}^1/_2\,h}\,T = \frac{3\,b\,h^3 - \pi\,b\,a_1^3}{6\,h}\,T,$$

dagegen für einen solchen mit **parabolischen Flankenhöhlungen**:

$$Pl = \frac{{}^1/_{12}\, b h^3 - {}^8/_{15}\, b a_1^3}{{}^1/_2\, h} T = \frac{5 b h^3 - 32 b_1 a_1^3}{30 h} T,$$

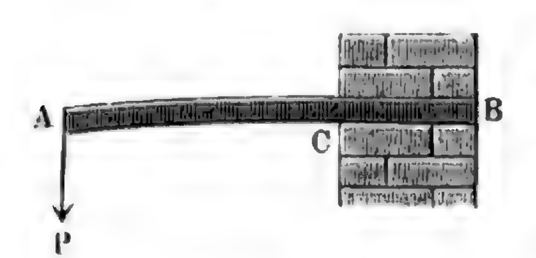
wobei $b$ die äußere Breite, $h$ die äußere Höhe, $b_1$ die Tiefe einer Höhlung und $a_1$ die Höhe derselben bezeichnen.

**Verschiedenheit der Tragmodel.** Die Formel §. 237

$$P = \frac{WT}{el}$$

für die **Tragkraft** eines an einem Ende eingemauerten Balkens $A$, Fig. 380,

Fig. 380.




hat nur dann eine allgemeine Gültigkeit, wenn die Ausdehnung $\sigma$ und die Compression $\sigma_1$ des Körpers bei der Elasticitätsgrenze einander gleich sind, weil nur dann der Tragmodul

$$T = \sigma E$$

für die Ausdehnung dem Tragmodul

$$T_1 = \sigma_1 E$$

für die Compression gleichzusetzen ist. Bei dem Schmiedeeisen scheint diese Gleichheit so ziemlich, und bei dem Holze wenigstens annähernd vorzukommen; ganz anders ist aber dieses Verhältniß bei dem **Gußeisen**; dasselbe hat nicht allein einen viel größeren Modul der Festigkeit für das Zerdrücken als für das Zerreißen, sondern es ist auch bei der allerdings nur ungefähr anzugebenden Elasticitätsgrenze die Compression $\sigma_1$ circa 2 mal so groß als die Ausdehnung $\sigma$, und folglich auch der Tragmodul $T_1$ des Zerdrückens 2 mal so groß als der Tragmodul $T$ des Zerreißens.

Um die Tragkraft des Gußeisens oder eines anderen Körpers zu finden, bei welchem eine ansehnliche Verschiedenheit zwischen $\sigma$ und $\sigma_1$ oder $T$ und $T_1$ statt hat, muß man zuerst untersuchen, welcher von den Quotienten $\frac{T}{e}$ und $\frac{T_1}{e_1}$ der kleinere ist, und diesen letzteren statt $\frac{T}{e}$ in die Formel

$$P = \frac{WT}{el}$$

einsetzen.

Die andere Balkenhälfte, welcher das größere Verhältniß $\left(\frac{T}{e} \text{ oder } \frac{T_1}{e_1}\right)$ entspricht, ist natürlich dann noch unter der Elasticitätsgrenze gespannt, und hat daher einen unnöthig großen Querschnitt. Um diesen und folglich auch den Querschnitt des ganzen Körpers auf das Minimum zurückzuführen und daher so viel wie möglich an Material zu ersparen, ist nöthig, daß beide

Balkenhälften gleichzeitig bis zu der Elasticitätsgrenze ausgedehnt und comprimirt werden. Deshalb soll man dem Querschnitt des Balkens eine solche Form und eine solche Lage geben, daß

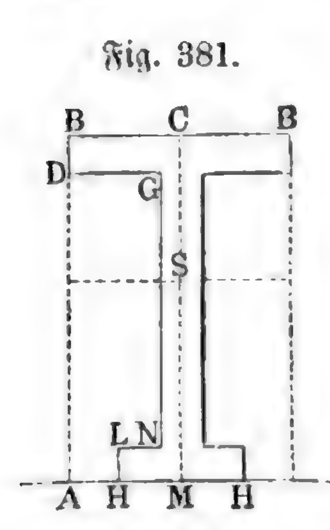
$$\frac{T}{e} = \frac{T_1}{e_1} \text{ oder } \frac{e}{e_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1}$$

ausfällt, daß also das Verhältniß zwischen den größten Abständen $e$ und $e_1$ der Fasern zu beiden Seiten der neutralen Axe gleich ist dem Verhältnisse zwischen den Tragmodeln $T$ und $T_1$ des Zerreißens und Zerdrückens.

Wenn also beim Gußeisen $\frac{T_1}{T} = \frac{\sigma_1}{\sigma} = 2$ ist (s. §. 211), so müssen wir hiernach den Querschnitt eines gußeisernen Balkens so gestalten und so legen, daß $\frac{e_1}{e}$ so viel wie möglich $= 2$ ausfällt. Ein dreiseitiger Balken aus Gußeisen ist folglich so zu legen, daß die Hälfte desselben mit dem dreiseitigen Querschnitte comprimirt, und dagegen die mit dem trapezoidalen Querschnitte ausgedehnt wird. Legt man hierbei die eine Seitenfläche des Prismas horizontal oder rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung, so hat man $\frac{e_1}{e} = \frac{2}{1}$, während bei der umgekehrten Lage, $\frac{e_1}{e}$ nur $= \frac{1}{2}$ ist.

Bei einem gußeisernen Träger, dessen Querschnitt beinahe die Form eines T hat, wie z. B. Fig. 381 vor Augen führt, läßt sich unter gewissen Voraussetzungen das Verhältniß $\frac{e_1}{e} = 2$ ebenfalls vollkommen herstellen.

Fig. 381.




Es sei die ganze Höhe dieses Balkens, $AB = h$, und die Breite seiner Kopfplatte, $BB = 2BC = b$, ferner die Höhe seiner Höhlungen zur Seite:

$$\overline{AD} = h_1 = \mu_1 h,$$

und die Breite derselben:

$$2\overline{DG} = b_1 = \nu_1 b;$$

endlich sei die Höhe einer Fußplatte:

$$\overline{HL} = h_2 = \mu_2 h$$

und die Ausladung derselben zu beiden Seiten:

$$2\overline{LN} = b_2 = \nu_2 b.$$

Dann ist der Abstand des Schwerpunktes $S$ des ganzen Querschnittes von der untersten Kante $HH$:

$$\overline{MS} = e_1 = \frac{1}{2}\frac{bh^2 - b_1 h_1^2 + b_2 h_2^2}{bh - b_1 h_1 + b_2 h_2}$$

$$= \frac{h}{2}\left(\frac{1 - \mu_1^2 \nu_1 + \mu_2^2 \nu_2}{1 - \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2}\right) \text{ (s. §. 105 und §. 109).}$$

Setzt man nun $\frac{e_1}{e} = 2$, sowie $e + e_1 = h$, so erhält man $e = \frac{1}{3}$ und $e_1 = \frac{2}{3}\, h$, und daher die Bestimmungsgleichung

$$\frac{2}{3}\, h = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \mu_1^2 \nu_1 + \mu_2^2 \nu_2}{1 - \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2},$$

welche sich in folgende umgestalten läßt:

$$\mu_1 \nu_1 \, (4 - 3\,\mu_1) - \mu_2 \nu_2 \, (4 - 3\,\mu_2) = 1.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man aus drei der Dimensionsverhältnisse $\mu_1, \nu_1, \mu_2$ und $\nu_2$ das vierte berechnen. Nimmt man $\mu_2 = 0$ an, so hat man es mit einem Querprofile wie Fig. 382 zu thun, dessen Biegungsmoment schon oben (§. 228) bestimmt worden ist, und für welches wir

$$\mu_1 \nu_1 \, (4 - 3\,\mu_1) = 1 \text{ haben.}$$

Anmerkung. Die Herren Moll und Reuleaux (s. deren Schrift: „Die Festigkeit der Materialien, Braunschweig 1853") empfehlen zur Bestimmung zweckmäßiger Querschnittsformen die Anwendung einer Wage, deren Wagbalken aus einer Tafel besteht, auf welche die in Blech ausgeschnittene Querschnittsform so gelegt wird, daß ihre, durch das Verhältniß $\frac{e}{e_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1}$ bestimmte neutrale Axe genau über die Drehungskante der Wage zu liegen kommt. Wenn nun hierbei die Wage einspielt, so hat diese Schablone eine zweckentsprechende Form; außerdem ist dieselbe durch Abschneiden an den Flanken so lange umzugestalten, bis das Einspielen bei der vorgeschriebenen Lage eintritt.

Beispiel 1. Wenn bei einem gußeisernen Balken, dessen Querschnitt die Gestalt Fig. 381 hat, die Höhenverhältnisse

$$\mu_1 = \frac{h_1}{h} = \frac{7}{8} \text{ und } \mu_2 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

sind, so hat man für dessen Breitenverhältnisse die Bedingung:

$$\frac{7}{8}\left(4 - \frac{21}{8}\right)\nu_1 - \frac{1}{8}\left(4 - \frac{3}{8}\right)\nu_2 = 1, \text{ d. i.:}$$

$$77\,\nu_1 - 29\,\nu_2 = 64.$$

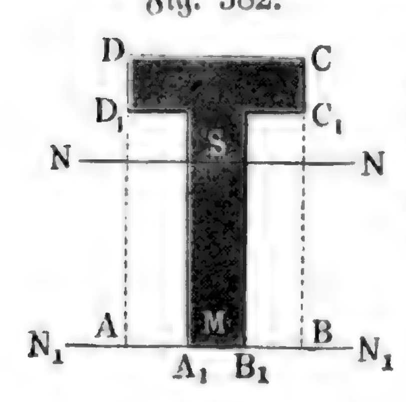
Läßt man die Fußplatte ganz weg, so ist $\nu_2 = 0$, und daher:

$$\nu_1 = \frac{b_1}{b} = \frac{64}{77} = 0{,}831,$$

also die Dicke des eigentlichen Trägers, $b - b_1 = 0{,}169\, b$.

Nimmt man hingegen $\nu_2 = \frac{\nu_1}{6}$ an, so ist $\left(77 - \frac{29}{6}\right)\nu_1 = 64$, folglich $\nu_1 = 0{,}887$ und $\nu_2 = \frac{1}{6} \cdot 0{,}887 = 0{,}148$. Für $h = 8$ Zoll und $b = 5\frac{1}{2}$ Zoll ist daher $h_1 = 7$ Zoll, $h_2 = 1$ Zoll, $b_1 = 5$ Zoll und $b_2 = \frac{5}{6}$ Zoll; so daß die Dicke der Fuß- und Kopfplatte 1 Zoll, die des Mittelstückes aber nur $\frac{1}{2}$ Zoll beträgt.

Fig. 382.




Beispiel 2. Für den Balken mit dem Tförmigen Querschnitt, Fig. 382, ist (§. 228)

$$W = \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\, b\, b_1\, h\, h_1\, (h - h_1)^2}{12\,(b h - b_1 h_1)}$$

gefunden worden und

$$e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{b h - b_1 h_1}$$

zu setzen, woraus für den Fall, daß er an einem Ende festgehalten und am anderen belastet wird,

$$Pl = \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4 b b_1 h h_1 (h - h_1)^2}{b h^2 - b_1 h_1^2}\,\frac{T_1}{6} \text{ folgt.}$$

Setzen wir nun hierin $h_1 = \mu_1 h$, und $b_1 = \nu_1 b$ ein, so erhalten wir:

$$Pl = \frac{(1 - \mu_1^2 \nu_1)^2 - 4 \mu_1 \nu_1 (1 - \mu_1)^2}{1 - \mu_1^2 \nu_1}\,\frac{b h^2}{6}\,T_1;$$

daher, wenn der Balken aus Gußeisen besteht und $\mu_1 = {}^6/_7$ und $\nu_1 = {}^7/_8$ eingeführt wird:

$$Pl = \frac{({}^5/_{14})^2 - 3\,({}^1/_7)^2}{{}^5/_{14}} \cdot \frac{b h^2}{6}\,T_1 = \frac{13}{70} \cdot \frac{b h^2}{6}\,T_1.$$

Wäre z. B. $h = 10$ und $b = 8$ Zoll, und folglich

$h_1 = {}^6/_7 \,.\, 10 = {}^{60}/_7 = 8^4/_7$, $h - h_1 = 1^3/_7$ Zoll, und

$b_1 = {}^7/_8 \,.\, 8 = 7$, sowie $b - b_1 = 1$ Zoll,

so hätte man:

$$Pl = \frac{13}{70} \cdot \frac{8\,.\,100}{6} \cdot T_1 = \frac{520}{21}\,T_1.$$

Führt man nun noch $T_1 = 18000$ Pfund ein, so stellt sich das Tragmoment

$$Pl = \frac{520}{21} \cdot 18000 = 445700 \text{ Neupfund}$$

heraus, wofür zur Sicherheit $= 150000$ Neupfund zu setzen sein möchte.

Hat dieser gußeiserne Balken eine Länge von 100 Zoll, so ist hiernach seine Tragkraft am freien Ende:

$$P = \frac{150000}{100} = 1500 \text{ Pfund.}$$

Liegt der Balken an beiden Enden auf und trägt er die Last in der Mitte, so ist dagegen:

$$P = 4\,.\,1500 = 6000 \text{ Pfund.}$$

Während im ersteren Falle die Querrippe oben liegen muß, hat man im zweiten Falle dieselbe unten zu legen.

§. 238 **Verschiedenheit der Festigkeitsmodel.** Wenn man den Elasticitäts- und den Tragmodul durch Biegungsversuche, und zwar mittels der Formeln

$$E = \frac{Plr}{W} \text{ und } T = \frac{Ple}{W}$$

bestimmt, so stößt man in der Regel auf eine vollkommen genügende Uebereinstimmung zwischen den so gefundenen Werthen von $E$ und $T$ und den durch directe Ausdehnungs- und Compressionsversuche mittels der Formeln

$$E = \frac{Pl}{\lambda F} \text{ und } T = \frac{P}{F}$$

bestimmten Werthen dieser Model (§. 212).

Anders ist aber das Verhältniß bei den Festigkeitsmodeln. Da der Elasticitätsmodul $E$ außerhalb der Elasticitätsgrenze nicht mehr als constant

angesehen werden kann, sondern immer mehr und mehr abnimmt, je weiter die Ausdehnung oder Compression gesteigert wird, und da ferner auch dann der Elasticitätsmodul für die Ausdehnung nicht mehr gleich ist dem für die Zusammendrückung, so sind die Spannungen der über einander liegenden Fasern des Körpers nicht mehr den Abständen von der neutralen Axe proportional zu setzen, und es geht folglich auch die neutrale Axe nicht mehr durch den Schwerpunkt des Querschnittes; es nehmen also die Abstände $e$ und $e_1$ ganz andere Werthe an als bei der Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze.

Bedeutet $W$ das Maß des Biegungsmomentes für die ausgedehnte Hälfte des Balkens, sowie $E$ den mittleren Elasticitätsmodul für dieselbe, und bezeichnet $W_1$ dieses Maß für die zusammengedrückte Hälfte, sowie $E_1$ ihren mittleren Elasticitätsmodul, so haben wir für größere Biegungen das Moment der Biegungskraft:

$$Pl = \frac{WE + W_1 E_1}{r},$$

also wenn wir, wenigstens annähernd, $\frac{K}{E} = \frac{e}{r}$ und $\frac{K_1}{E_1} = \frac{e_1}{r}$ setzen, wobei $K$ und $K_1$ die Festigkeitsmodel für das Zerreißen und für das Zerdrücken bezeichnen, das Moment zum Abbrechen:

$$Pl \text{ entweder} = \frac{K(WE + W_1 E_1)}{Ee} \text{ oder} = \frac{K_1 (WE + W_1 E_1)}{E_1 e_1}.$$

Bezeichnen wir ferner das statische Moment des Querschnittes des ausgedehnten Körperstückes in Hinsicht auf die neutrale Axe durch $M$, und das des Querschnittes des comprimirten Körperstückes in Hinsicht auf eben diese Axe durch $M_1$, so haben wir noch die Spannkraft der einen Hälfte, $= \frac{ME}{r}$ und die der anderen, $= \frac{M_1 E_1}{r}$, und es ist, da beide Kräfte ein Paar bilden müssen,

$$ME = M_1 E_1$$

zu setzen. Diese Gleichung dient zur Bestimmung der neutralen Axe mittels ihrer Abstände $e$ und $e_1$.

Für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte ist z. B.

$$M = \frac{be^2}{2} \text{ und } M_1 = \frac{be_1^2}{2},$$

daher

$$Ee^2 = E_1 e_1^2$$

anzunehmen. Es ergiebt sich hiernach:

$$e_1 = e\sqrt{\frac{E}{E_1}},$$

und setzt man diesen Werth in die Gleichung $e + e_1 = h$ ein, so folgt:

$$e = \frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}} \text{ und } e_1 = \frac{h\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}}.$$

Die Maße der Biegungsmomente sind in diesem Falle:

$$W \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{\partial} q} = \text{ und } W_1 = \frac{b e_1^3}{3};$$

folglich ergiebt sich

$$Pl = \frac{b}{3r}(Ee^3 + E_1 e_1^3 = \frac{b h^3}{3r}\left(\frac{E E_1 \sqrt{E_1} + E E_1 \sqrt{E}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^3}\right)$$

$$= \frac{bh^3}{3r} \cdot \frac{E E_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2},$$

und daher das Moment zum Abbrechen:

$$Pl \text{ entweder } = \frac{K . b h^3}{3 E e} \cdot \frac{E E_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2} = \frac{b h^2}{3} \cdot K \cdot \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}}$$

$$\text{oder } = \frac{b h^2}{3} K_1 \cdot \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}}.$$

Für $E_1 = E$ erhält man natürlich, wie oben:

$$Pl = \frac{b h^2}{6} K.$$

Bei Holz und Schmiedeeisen ist so ziemlich $E = E_1$, und daher annähernd

$$Pl = \frac{b h^2}{6} K,$$

wobei man für $K$ den kleineren der beiden Festigkeitsmodel zu setzen hat.

Beim Gußeisen ist jedenfalls $E_1$ viel größer als $E$, daher nähert sich hier $Pl$ dem Werthe $\frac{b h^2}{3} K$, wenn $K$ den Festigkeitsmodul für das Zerreißen ausdrückt.

Beim Holz hätte man hiernach im Mittel den Festigkeitsmodul für das Zerdrücken (s. Tabelle, S. 371), also $K_1 = 480$ Kilogramm $= 6500$ Pfund einzusetzen, was mit den Versuchen von Eytelwein, Gerstner u. s. w. sehr gut übereinstimmt. Ebenso ist für schmiedeeiserne Balken statt $K$, der Festigkeitsmodul für das Zerdrücken, d. i.

$$K_1 = 2200 \text{ Kilogramm} = 30000 \text{ Pfund}$$

einzuführen. Während unter übrigens gleichen Verhältnissen das Holz und Schmiedeeisen durch Zerdrücken zerbricht, gelangt das Gußeisen mittels des Zerreißens zum Bruche. Wäre bei demselben noch $K$ nahe $= K_1$, so würde

folglich für gußeiserne Träger in obige Formel der Modul für das Zerreißen, d. i.

$$K = 1300 \text{ Kilogramm} = 17800 \text{ Pfund}$$

einzusetzen sein; vielfachen Versuchen zufolge ist aber hier

$$K = 3200 \text{ Kilogramm} = 45000 \text{ Pfund},$$

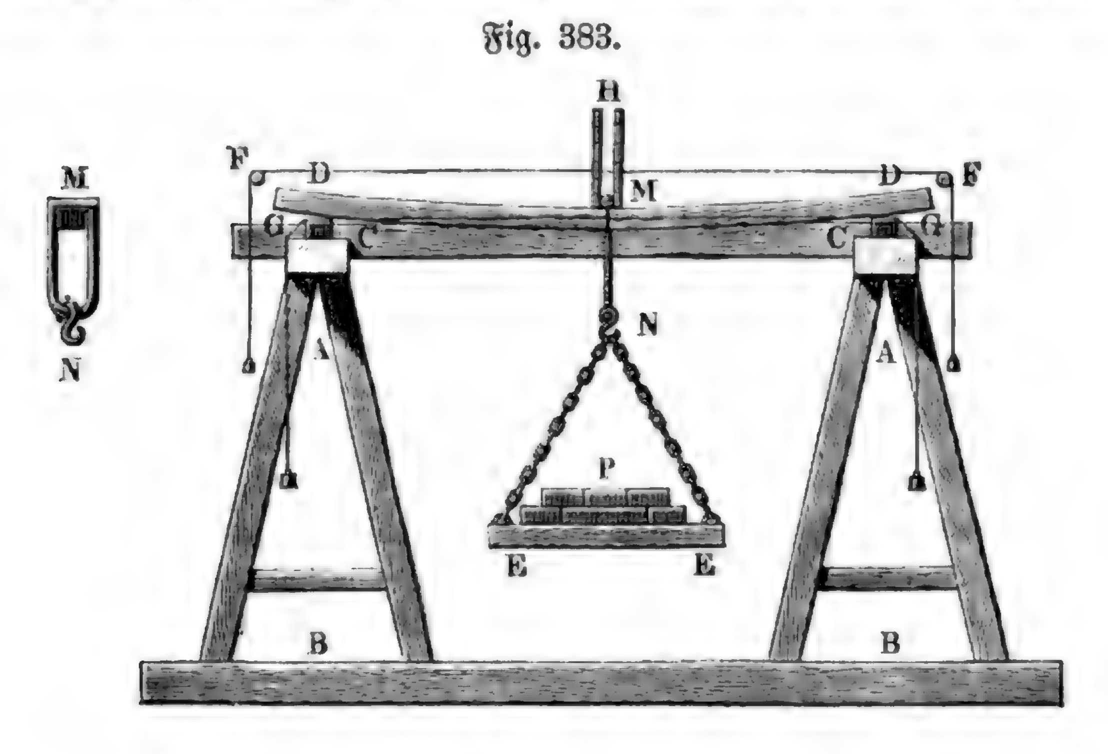
d. i. ziemlich das Mittel zwischen dem Modul des Zerreißens und dem des Zerdrückens zu setzen.

Diese große Abweichung hat jedenfalls nicht allein in der Verschiedenheit zwischen den Elasticitätsmodeln $E$ und $E_1$, sondern auch in der körnigen Structur des Gußeisens seinen Grund, vermöge deren die Annahme, daß der Balken gleichsam aus einem Bündel von Ruthen besteht, nicht zulässig ist.

Uebrigens wirken auf die Elasticität, Tragkraft und Festigkeit der Körper noch vielerlei Umstände ein, welche beträchtliche Abweichungen in den Ergebnissen der Erfahrungen zur Folge haben. So ist z. B. das Holz am Kerne und an der Wurzel stärker als am Splint und an dem Gipfel; auch trägt das Holz mehr, wenn die Kraft parallel zu den Jahresringen wirkt als winkelrecht darauf; endlich haben noch der Erdboden und die Lage des Ortes, wo das Holz gewachsen ist, Temperatur, Zustand der Trockenheit, Alter u. s. w. Einfluß auf den Widerstand der Hölzer. Endlich fällt die Biegung, welche ein Körper, nachdem er längere Zeit belastet gewesen ist, erleidet, immer etwas größer aus, als die Biegung, welche gleich anfangs beim Auflegen der Last eintritt.

§. 239 **Biegungs- und Brechungsversuche.** Die Versuche über die Elasticität und Festigkeit wurden von Eytelwein und von Gerstner mit einem in Fig. 383 abgebildeten Apparate angestellt. $AB$ und $AB$ sind zwei Rüstböcke, $C$ und $C$ darauf befestigte Eisenlager, und $DD$ ist der darüber liegende, zur Untersuchung bestimmte parallelepipedische Körper. Die Last $P$

Fig. 383.



zum Biegen des Körpers liegt auf einer Wagschale $EE$, die an einem Bügel $MN$ hängt, dessen oberer und abgerundeter Theil in der Mitte $M$ des Balkens aufliegt. Um die einer Belastung $P$ entsprechende Durchbiegung $a$ zu finden, wendete Eytelwein zwei feine Horizontalfäden $FF$ und $GG$, sowie eine in der Mitte auf dem Balken aufsitzende Scala $MH$ an. Gerstner hingegen bediente sich eines langen einarmigen Fühlhebels, der nahe bei seinem Drehpunkte in $M$ auflag und mit seinem Ende, wie der Zeiger einer Uhr, an einer verticalen Scala die Senkung von $M$ verfünfzehnfacht angab. Lagerhjelm wendete einen Zeiger an, der mittels eines Fadens und einer Rolle in Bewegung gesetzt wurde, und die Biegung des Balkens auf einer eingetheilten Kreisscheibe vergrößert angab.

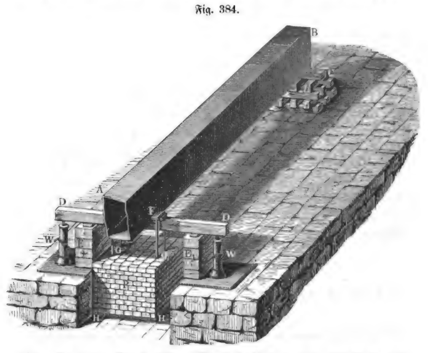
Andere, wie z. B. Morin, bedienten sich zur Ausmittelung der Durchbiegung ($a$) eines Kathetometers, welches auf eine in der Mitte des Balkens angebrachte Spitze gerichtet war; bei den englischen Versuchen ist dagegen zur Ausmessung dieser Größe ein langes Keilmaß angewendet worden, welches in der Mitte des Balkens zwischen demselben und einer festen Stütze eingeschoben wurde. Um die Genauigkeit in der Messung von $a$ durch das Nachgeben der Stützen nicht zu beeinträchtigen, legt man entweder die Balken während des Versuchs auf harte steinerne Unterlagen (Morin), oder man führt ein langes Lineal in einem gewissen Abstande über dem Balken hin, befestigt dasselbe an seinen Enden mit den Enden des Balkens so, daß es sich nicht mit dem Balken biegen kann, und mißt nun bei jedem Versuche den Abstand zwischen der Mitte des gebogenen Balkens und der unteren Kante dieses Lineals (Fairbairn).

Die Art und Weise, wie Stephenson u. s. w. die Biegung und Festigkeit der hohlen Träger aus Eisenblech ermittelt hat, ist vorzüglich aus Fig. 384 zu ersehen. Die 75 Fuß lange Röhre $AB$, von welcher in der Figur das vordere Stück weggelassen ist, ruhete an beiden Enden, wie z. B. in $C$, auf Holzböcken auf, und wurde in der Mitte durch einen Balken $DD$ unterstützt, welcher auf den Stempeln zweier Winden $W$, $W$ aufruhete. Durch die Mitte des Röhrenträgers, und zwar nahe über dem Boden desselben, ging ein eiserner Querarm, wovon in der Figur nur das eine Ende $F$ zu sehen ist, und über diesen waren zwei Gabeln $G$, $G$ gelegt, an welchen die Schale $HH$ zur Aufnahme der Gewichte $P$ hing. Vor dem Versuche und während des Auflegens der Gewichte ruhte die ganze Last auf dem Balken $DD$, wurden aber die Stempel der Winden niedergelassen, so sank $DD$ und legte sich auf die Unterlage $E$, $E$ auf, während das nun durch $P$ belastete Röhrenmittel $AF$ ganz frei wurde, und eine der Last $P$ entsprechende und mit einem Keilmaß zu messende Durchbiegung annehmen konnte.

Um bei Versuchen mit starken Trägern nicht sehr große Gewichte anhängen zu müssen, belastet man auch wohl den Balken nicht unmittelbar mit

Gewichten, sondern man läßt auf denselben den kürzeren Arm einer ungleicharmigen Wage wirken, deren längerer Arm durch Gewichte niedergezogen

Fig. 384.




wird. Zu diesem Zwecke ließ endlich Hodgkinson diese Hebelkraft nicht auf die Mitte des an den Enden unterstützten Balkens wirken, sondern er unterstützte den Balken in seiner Mitte, ließ diese Kraft an dem einen Ende des Balkens angreifen und befestigte das andere Ende desselben durch einen starken Bolzen mit dem Fundamente.

Durch die unter sehr verschiedenen Umständen und Verhältnissen und mit verschiedenen Stoffen, namentlich aber mit sehr verschiedenen Holz- und Eisengattungen angestellten Versuche ist in der Hauptsache eine Uebereinstimmung der im Vorstehenden entwickelten theoretischen Regeln mit der Erfahrung nachgewiesen worden. Was insbesondere das Zerbrechen parallelepipedischer Balken anlangt, so hat sich hierbei herausgestellt, daß das Holz und das Schmiedeeisen unter gleichen Umständen nur durch das Zerdrücken, das Gußeisen hingegen entweder durch das Zerreißen der äußersten Fasern beginnt, oder dadurch erfolgt, daß an der am stärksten gebogenen Stelle (in der Mitte) und zwar auf der comprimirten Seite, ein Keil ausbricht.

Auch hat man sich an parallelepipedischen Holzstäben mit Hülfe von Sägeschnitten, welche auf der comprimirten Seite angebracht und durch feste

Blättchen wieder ausgefüllt wurden, ferner mittelst einer Reihe von Querlinien, welche an den Seitenflächen dieses Balkens rechtwinkelig zur Längenaxe desselben gezogen waren, und endlich durch ein Paar dünne Stäbchen, wovon das eine längs der ausgedehnten und das andere längs der zusammengedrückten Seite dieses Balkens hinlief, von der Richtigkeit des in §. 214 vorausgesetzten Verhaltens der Fasern der gebogenen Körper überzeugen können.

§. 240 **Trag- und Festigkeitsmodel.** In der folgenden Tabelle sind die mittleren Werthe für die Elasticitäts-, Trag- und Festigkeitsmodel, wie sie aus den Biegungs- und Brechungsversuchen hervorgegangen sind, aufgezeichnet. Die ersteren weichen von denjenigen, welche durch Ausdehnungs- und Compressionsversuchen bestimmt worden sind, nicht ansehnlich ab; anders ist es aber, aus den oben (§. 238) angegebenen Gründen, mit den Festigkeitsmodeln. Von den beiden Werthen innerhalb einer Klammer { } drückt der obere den Modul im preußischen Maß (Neupfund auf den Quadratzoll) und der untere denselben im französischen Maß (in Kilogramm pro Quadratcentimeter) aus.

Tabelle

der Trag- und Festigkeitsmodel verschiedener Körper in Hinsicht auf das Biegen und Brechen.

| Namen der Körper. | Elasticitätsmodul $E$. | Tragmodul $T$. | Festigkeitsmodul $K$ ($K_1$). |
|---|---|---|---|
| Laubholz . . . . . . . | 1'230000<br>90000 | 3000<br>220 | 9000<br>650 |
| Nadelholz . . . . . . . | 2'000000<br>150000 | 4100<br>300 | 12000<br>900 |
| Gußeisen . . . . . . | 16'400000<br>1'200000 | 10260<br>750 | 43800<br>3200 |
| Schmiedeeisen . . . . | 27'3000<br>2'000000 | 17000<br>1200 | 31500<br>2300 |
| Kalk- und Sandstein . . | — | — | 1700<br>124 |
| Thonschiefer . . . . . | — | — | 4800<br>350 |

Um mit Hülfe der Werthe in der vorstehenden Tabelle die Kräfte zu ermitteln, welche die Balken oder Träger mit Sicherheit auf die Dauer tragen

können, führt man in den oben gefundenen Formeln für die Tragkraft beim Holz:

statt $T$, entweder $\frac{1}{3}\,T$, oder statt $K$, $\frac{1}{10}\,K$,

ferner beim Gußeisen:

statt $T$, entweder $\frac{1}{2}\,T$, oder statt $K$, $\frac{1}{5}\,K$,

und beim Schmiedeeisen:

statt $T$, entweder $\frac{1}{2}\,T$, oder statt $K$, $\frac{1}{4}\,K$

als Sicherheitsmodel ein.

Hiernach möge in der Folge für Holz:

$$T = 73 \text{ Kilogramm} = 1000 \text{ Pfund},$$

für Gußeisen:

$$T = 510 \text{ Kilogramm} = 7000 \text{ Pfund},$$

und für Schmiedeeisen:

$$T = 660 \text{ Kilogramm} = 9000 \text{ Pfund}$$

gesetzt werden.

Diese Werthe gelten jedoch nicht für Wellen und andere Maschinentheile, welche wegen ihrer steten Bewegung und in Folge ihrer Abnutzung eine noch größere Sicherheit und daher die Annahme kleinerer Werthe für $T$ fordern.

Setzen wir diese Werthe in den Formeln

$$Pl = b h^2 \frac{T}{6} \text{ und } Pl = \pi r^3 \frac{T}{4} = \pi d^3 \frac{T}{32}$$

für die parallelepipedischen Balken und für die cylindrischen Träger ein, so erhalten wir folgende praktische Formeln.

Für Holz:

$$Pl = 167\, b h^2 = 785\, r^3 = 98\, d^3 \text{ Zollpfund}.$$

Für Gußeisen:

$$Pl = 1167\, b h^2 = 5500\, r^3 = 687\, d^3 \text{ Zollpfund},$$

und für Schmiedeeisen den größeren Werth:

$$Pl = 1500\, b h^2 = 7070\, r^3 = 884\, d^3 \text{ Zollpfund}.$$

Wenn man nach Morin, und englischen Constructionen entsprechend, beim Gußeisen

$$\text{statt } T,\ \frac{K}{4} \text{ bis } \frac{K}{5} = 750 \text{ Kilogramm}$$

und beim Schmiedeeisen

$$\text{statt } T,\ \frac{K}{5} = 600 \text{ Kilogramm}$$

einsetzt, so erhält man für Gußeisen:

$$Pl = 1710\, b h^2 = 8060\, r^3 = 1008\, d^3 \text{ Zollpfund},$$

und dagegen für Schmiedeeisen den kleineren Werth:

$$Pl = 1370\, b h^2 = 6500\, r^3 = 810\, d^3 \text{ Zollpfund}.$$

Hängt die Last $Q$ nicht am Ende des Balkens, sondern ist dieselbe gleichmäßig auf dem Balken vertheilt, so ist der Hebelarm derselben nicht $l$, sondern $\frac{l}{2}$, und folglich auch das Moment nur halb so groß, also:

$$\frac{Ql}{2} = \frac{WT}{e}, \text{ oder } Ql = 2 \cdot \frac{WT}{e} \text{ zu setzen.}$$

Ruht ferner der Balken an beiden Enden frei auf (s. Fig. 337) und wirkt die Last $P$ in der Mitte zwischen beiden Stützen, deren Entfernung von einander $= l$ ist, so ist die Kraft an jedem Ende $= \frac{P}{2}$ und der Hebelarm derselben $= \frac{l}{2}$, also ihr Moment:

$$\frac{Pl}{4} = \frac{WT}{e} \text{ und } Pl = 4 \frac{WT}{e}.$$

Es trägt also unter übrigens gleichen Verhältnissen der Balken im zweiten Falle doppelt, und im dritten vier Mal so viel als im ersten Falle.

Ist endlich der an den beiden Enden aufliegende Balken auf seiner ganzen Länge gleichmäßig belastet (Fig. 348), so wird er erstens von einer Kraft $\frac{Q}{2}$ von unten nach oben gebogen, welche den Hebelarm $\frac{l}{2}$, also das Moment $\frac{Ql}{4}$ hat, und zweitens von einer Kraft $\frac{Q}{2}$ von oben nach unten, deren Angriffspunkt der Schwerpunkt je einer Lasthälfte, deren Hebelarm folglich $= \frac{l}{4}$ und Moment $= \frac{Ql}{8}$ ist. Es resultirt daher das Moment, mit welchem jedes Ende des Balkens von unten nach oben gebogen wird:

$$= \frac{Ql}{4} - \frac{Ql}{8} = \frac{Ql}{8},$$

und es ist folglich $Ql = 8 \frac{WT}{e}$, also das Tragvermögen des Balkens unter diesen Umständen 8 Mal so groß als im ersten Falle.

Während bei einem parallelepipedischen Balken im ersten Falle

$Pl = bh^2 \frac{T}{6}$ ist, hat man im zweiten Falle:

$Ql = 2 . bh^2 \frac{T}{6}$, im dritten:

$Pl = 4 . bh^2 \frac{T}{6}$ und im vierten:

$Ql = 8 . bh^2 \frac{T}{6}$ zu setzen, wobei $b$ die Breite und $h$ die Höhe des rectangulären Balkenquerschnittes bezeichnen.

Beispiele. 1) Welche Last kann ein an seinen Enden unterstützter Balken aus Fichtenholz tragen, wenn derselbe die Breite $b = 7$ und die Höhe $h = 9$ Zoll hat, und wenn der Angriffspunkt dieser Last von jeder Stütze 10 Fuß absteht? Es ist hier $l = 20 . 12 = 240$ Zoll, daher nach der obigen Formel:

$$P l = 4 . 167 \; b h^2 = 4 . 167 . 7 . 81,$$

und die gesuchte Tragkraft:

$$P = \frac{4676 . 81}{240} = 58{,}45 . 27 = 1578 \text{ Pfund}.$$

2) Ein an einem Ende eingemauerter cylindrischer Stempel aus Holz soll auf seiner ganzen Länge $l = 5$ Fuß eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 10000$ Pfund tragen, welche Stärke muß derselbe besitzen?

Es ist hier:

$$Q l = 2 \cdot \frac{\pi r^3 T}{4} = 2 . 785 . r^3,$$

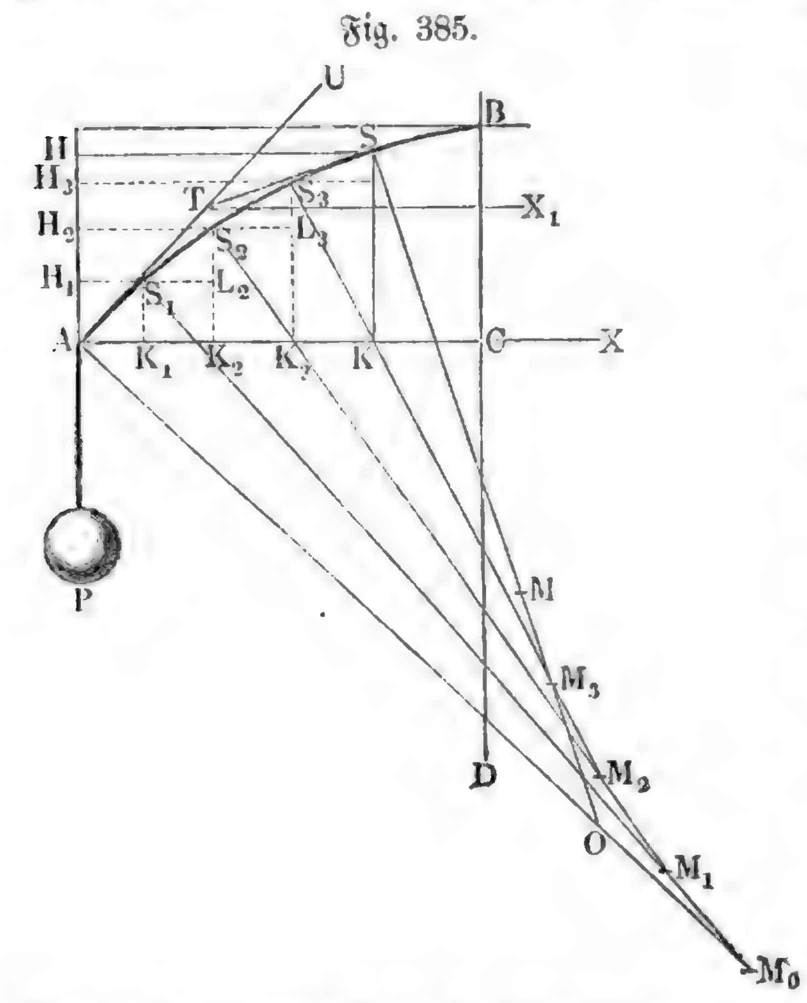
folglich umgekehrt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{Q l}{1570}} = \sqrt[3]{\frac{10000 . 60}{1570}} = \sqrt[3]{382} = 7{,}26 \text{ Zoll},$$

also die gesuchte Stempelstärke $= 2 r = 14{,}52$ Zoll.

**Relative Durchbiegung.** Bei beweglichen Maschinentheilen, wie §. 241 z. B. bei Wellen, Radaxen u. s. w., können Biegungen dadurch nachtheilig auf den Gang der Maschinen wirken, daß sie entweder zu Schwingungen und Erschütterungen der Mechanismen oder zu einem unvollkommenen Eingreifen der letzteren in einander Veranlassung geben, und deshalb bestimmt man in gewissen Fällen die Querdimensionen dieser Maschinentheile nicht nach dem Tragmodul, sondern nach der Durchbiegung, indem man festsetzt, daß diese ein bestimmter sehr kleiner Theil der ganzen Länge des Körpers oder Maschinentheiles sei.

Fig. 385.




Wir haben oben (§. 217) für einen an einem Ende $B$ festgehaltenen und am anderen Ende $A$ belasteten prismatischen Körper $A S B$, Fig. 385, die Durchbiegung

$$BC = a = \frac{Pl^3}{3\,W E}$$

gefunden, und können also ihr gegebenes Verhältniß zur Länge $AB$:

$$\theta = \frac{a}{l} = \frac{Pl^2}{3\,WE},$$

daher umgekehrt:

$$Pl^2 = 3\,\theta\,WE$$

setzen.

Für einen parallelepipedischen Balken hat man hiernach

$$Pl^2 = 3\,\theta\,\frac{b\,h^3}{12}\,E = \frac{\theta\,b\,h^3\,E}{4},$$

und für einen cylindrischen

$$Pl^2 = 3\,\theta\,\frac{\pi\,r^4}{4}\,E = \frac{3}{4}\,\pi\,\theta\,r^4\,E.$$

In der Regel ist das relative Biegungsverhältniß $\theta = \frac{a}{l} = {}^1/_{500}$ zulässig, und daher

$$1)\;Pl^2 = \frac{1}{2000}\,b\,h^3\,E = \frac{3\,\pi}{2000}\,r^4\,E$$

zu setzen.

Führt man nun für Holz den Elasticitätsmodul $E = 1'600000$ ein, so erhält man für dasselbe:

$$Pl^2 = 800\,b\,h^3 = 7540\,r^4.$$

Für Gußeisen hat man $E = 15'000000$ Pfund, und daher

$$Pl^2 = 7500\,b\,h^3 = 70700\,r^4,$$

und für Schmiedeeisen, $E = 22'000000$ Pfund, daher

$$Pl^2 = 11000\,b\,h^3 = 103700\,r^4.$$

Für die Biegung bis zur Elasticitätsgrenze ist dagegen (§. 235):

$$2)\;Pl = \frac{WT}{e},\text{ oder } Pl^2 = \frac{WTl}{e};$$

setzt man daher beide Ausdrücke für $Pl^2$ einander gleich, so erhält man:

$$\frac{WTl}{e} = 3\,\theta\,WE,$$

folglich das Verhältniß der Länge $l$ des Balkens zum Maximalabstande $e$, wobei die Durchbiegung und die Spannung die Grenzwerthe $\theta$ und $T$ zugleich erreichen:

$$\frac{l}{e} = \frac{3\,\theta\,E}{T} = \frac{3\,\theta}{\sigma},$$

also für parallelepipedische Körper

$$\frac{l}{h} = {}^3/_2\,\frac{\theta}{\sigma}$$

und für cylindrische Körper

$$\frac{l}{r} = \frac{3\,\theta}{\sigma} \text{ also } \frac{l}{d} \text{ ebenfalls} = {}^3/_2\,\frac{\theta}{\sigma},$$

wobei $\sigma$ die der Spannung $T$ entsprechende Ausdehnung oder Zusammendrückung bei der Elasticitätsgrenze bezeichnet.

Ist $\frac{l}{e} < \frac{3\,\theta}{\sigma}$, so findet man durch die erste Formel den größeren Werth für $P\,l$, und ist hingegen $\frac{l}{e} > \frac{3\,\theta}{\sigma}$, so erhält man durch die zweite Formel das größere Kraftmoment. Deshalb giebt bei einem gegebenen Kraftmomente $(P\,l)$ im ersteren Falle, wo also der Körper noch nicht die Länge $l = \left(\frac{3\,\theta}{\sigma}\right) e$ hat, die Formel

$$\frac{W\,T}{e} = P\,l,$$

und im zweiten Falle, wo $l > \left(\frac{3\,\theta}{\sigma}\right) e$ ist, die Formel

$$3\,\theta\,W\,E = P\,l^2$$

die größeren Querschnittsdimensionen.

Setzt man in dem Grenzverhältnisse $\frac{l}{e} = \frac{3\,\theta}{\sigma}$, $\theta = \frac{1}{500}$, so erhält man für alle Stoffe $\frac{l}{e} = \frac{3}{500\,\sigma} = \frac{0{,}006}{\sigma}$, daher für Holz, wo $\sigma = \frac{1}{600}$ zu setzen ist, $\frac{l}{e} = 0{,}006\,.\,600 = 3{,}6$, und insbesondere für einen prismatischen Balken aus Holz:

$$\frac{l}{h} \text{ sowie auch } \frac{l}{d} = \frac{18}{10} = 1{,}8.$$

Nimmt man für Guß- und Schmiedeeisen $\sigma = \frac{1}{1500}$ an, so ergiebt sich für diese Stoffe

$$\frac{l}{e} = \frac{3\,.\,1500}{500} = 9, \text{ und daher}$$

$$\frac{l}{h} \text{ sowie } \frac{l}{d} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Die Formel

$$P\,l^2 = \frac{b\,h^3}{2000}\,E = \frac{3\,\pi\,r^4\,E}{2000}$$

gilt natürlich nur für den Normalfall, wo der Körper an einem Ende belastet und am anderen Ende festgeklemmt ist. Bei einer gleichmäßigen Belastung

durch $Q$ hat man (nach §. 223) statt $P$, $^3/_8\,Q$ einzusetzen; ruht ferner der Körper an beiden Enden auf, und trägt er die Last in seiner Mitte, so ist ferner statt $P$, $\frac{P}{2}$, und statt $l$, $\frac{l}{2}$, also:

$$P l^2 = 8 \cdot \frac{b h^3}{2000} E = 8 \cdot \frac{3 \pi r^4 E}{2000}$$

zu setzen, und ist bei dieser Auflagerung die Last $Q$ gleichmäßig vertheilt, so hat man statt $P$, $\frac{5\,Q}{8}$ einzuführen.

Beispiele. 1) Welche Last trägt bei der Durchbiegung $\alpha = {}^1/_{500}$, ein hölzerner Balken in seiner Mitte, wenn er an beiden Enden aufliegt, und wenn seine Breite $b = 7$, seine Höhe $h = 9$ Zoll und der Abstand seiner Stützen von einander, $l = 20$ Fuß beträgt? Es ist hier:

$$P = 8 \cdot \frac{800\, b\, h^3}{l^2} = \frac{6400 \,.\, 7 \,.\, 9^3}{(20 \,.\, 12)^2} = 7 \,.\, 9^2 = 567 \text{ Pfund;}$$

während im vorigen Paragraphen, unter der Voraussetzung, daß der Balken bis zur Elasticitätsgrenze gebogen wird, $P = 1578$ Pfund gefunden wurde.

2) Wie hoch und breit ist ein an beiden Enden aufruhender gußeiserner Träger zu machen, welcher bei dem Dimensionsverhältnisse $\frac{h}{b} = 4$, auf eine Länge von 8 Fuß eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 4000$ Pfund trägt? Unter der letzten Voraussetzung ist hier:

$$^5/_8\; Q\, l^2 = 8 \,.\, 7500\; b\, h^3,$$

d. i.:

$$^5/_8 \,.\, 4000 \,.\, 8^2 \,.\, 12^2 = 8 \,.\, 7500\; \frac{h^4}{4}, \text{ oder } h^4 = 4^4 \,.\, 6,$$

folglich:

$$h = 4 \sqrt[4]{6} = 1{,}565 \,.\, 4 = 6{,}26 \text{ Zoll}$$

$$b = \frac{h}{4} = 1{,}565 \text{ Zoll.}$$

Nach der Formel des vorigen Paragraphen wäre

$$Q\, l = 8 \,.\, 1167\; b\, h^2, \text{ oder } 4000 \,.\, 8 \,.\, 12 = 8 \,.\, 1167 \cdot \frac{h^3}{4},$$

daher die erforderliche Höhe:

$$h = 4 \sqrt[3]{\frac{3000}{1167}} = 4 \,.\, 1{,}37 = 5{,}48 \text{ Zoll,}$$

und die Breite des Balkens:

$$b = \frac{h}{4} = 1{,}37 \text{ Zoll.}$$

§. 242 **Tragmomente.** Aus dem Ausdrucke

$$P l = b h^2 \frac{T}{6}$$

für das Tragmoment eines parallelepipedischen Balkens ersieht man, daß dieses Moment wie die einfache Breite $b$ und wie das Quadrat der Höhe $h$ und daß die Tragkraft

$$P = \frac{b\,h^2}{l}\,\frac{T}{6},$$

überdies noch umgekehrt wie die Länge ($l$) dieses Körpers wächst, daß also bei einem solchen Balken die Höhe einen größeren Einfluß auf die Haltbarkeit desselben hat als die Breite. Ein Balken, welcher doppelt so breit als ein anderer ist, trägt also hiernach nur doppelt so viel als dieser oder auch so viel als zwei solche Balken neben einander zusammen; ein Balken von der doppelten Höhe trägt hingegen $(2)^2 = 4$ mal so viel als ein Balken von der einfachen Breite und einfachen Höhe. Deshalb giebt man auch den parallelepipedischen Balken mehr Höhe als Breite, oder legt denselben stets auf die schmale Seite, oder giebt vielmehr dieser Seite eine rechtwinkelige und der breiten Seite eine parallele Richtung zur Kraft ($P$).

Da $b\,h$ den Querschnitt $F$ des Balkens ausdrückt, so hat man auch

$$P\,l = F\,h\,\frac{T}{6};$$

es ist hiernach das Tragmoment eines Körpers bei gleichem Querschnitte und also auch bei gleicher Masse oder gleichem Gewichte, der Höhe desselben einfach proportional. Sind z. B. $b$ und $h$ die Breite und Höhe des einen Körpers, und dagegen $\frac{b}{3}$ und $3\,h$ die des anderen Körpers, ist also $F = \frac{b}{3} \cdot 3\,h = b\,h$ der Inhalt ihres Querschnittes, und haben also auch beide Körper bei übrigens gleichen Verhältnissen einerlei Gewicht, so trägt dennoch der letztere 3 mal so viel als der erstere.

Ist $b = h$, hat also der Balken einen quadratischen Querschnitt, so kann man das Tragmoment desselben noch dadurch herabziehen, daß man der Diagonale desselben eine aufrechte Lage giebt. Es bleibt hierbei, wie wir aus §. 230 wissen, $W$ unverändert $= \frac{b\,h^3}{12} = \frac{b^4}{12}$, während dagegen $e$ gleich der halben Diagonale, d. i. $\frac{1}{2}\,b\,\sqrt{2} = b\,\sqrt{\frac{1}{2}}$ wird. Deshalb ist dann:

$$P\,l = \frac{b^4}{12\,b\,\sqrt{\frac{1}{2}}}\;T = b^3\,\frac{T}{6}\,\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707\,b^3\,\frac{T}{6},$$

während bei Auflagerung mittels der Seiten, $P\,l = b^3\,\frac{T}{6}$ ausfällt. S. §. 236.

Ganz gleiche Verhältnisse wie beim parallelepipedischen Balken kommen auch bei dem Balken mit elliptischem Querschnitte vor. Es ist hier (nach §. 231) $W = \frac{\pi\,b\,a^3}{4}$, und $e = a$, wobei vorausgesetzt wird, daß die Halbaxe $a$ parallel und die Halbaxe $b$ rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung, also, wie

gewöhnlich, horizontal zu liegen kommt. Hiernach hat man also für einen solchen Balken:

$$Pl = \frac{\pi b a^2}{4} T = Fa \frac{T}{4},$$

da der Inhalt des ellipti schen Querschnittes, $F = \pi a b$ zu setzen ist. Es wächst also auch bei diesem Balken unter übrigens gleichen Verhältnissen, das Tragmoment einfach wie der Inhalt und wie die Höhe $a$ des Querschnittes.

Ist $b = a = r$, hat man es also mit einem cylindrischen Träger vom Halbmesser $r$ zu thun, so geht

$$Pl \text{ in } = \frac{\pi r^3}{4} T = Fr \cdot \frac{T}{4}$$

über. Es wächst also das Tragmoment dieses Körpers wie das Product aus der Querschnittsfläche und aus dem Halbmesser desselben.

Bei gleichem Querschnitte oder bei gleichem Gewichte ist das Verhältniß des Tragmomentes des Körpers mit elliptischem Querschnitte zu dem mit kreisförmigen, $= \frac{a}{r}\cdot$ Es ist daher der Balken mit elliptischem Querschnitte (wo $a > r$) stets dem einfachen cylindrischen Balken vorzuziehen.

Dasselbe gilt auch bei allen anderen Querschnittsformen; die regelmäßige Form (das Quadrat, das regelmäßige Sechseck, der Kreis u. s. w.) giebt bei gleichem Inhalte stets ein kleineres Tragmoment als eine Form von größerer Höhe und kleinerer Breite.

Regelmäßige Querschnittsformen sind daher auch nur bei Wellen und anderen um ihre Längenaxe sich drehenden Körpern anzuwenden, wo während der Umdrehung eine Querschnittsdimension stets in die andere übergeht, oder nach je einer Viertelumdrehung die Höhe zur Breite und die Breite zur Höhe wird.

§. 243 **Querschnitt hölzerner Balken.** Wenn ein cylindrischer Balken mit einem parallelepipedischen Balken, dessen Breite und Höhe $= b$ ist, einen gleich großen Querschnitt $F = \pi r^2 = b^2$ hat, so ist das Verhältniß:

$$\frac{b}{r} = \sqrt{\pi} = 1{,}77245,$$

und dagegen das Verhältniß zwischen den Tragmomenten $M$ und $M_1$ ($M_2$), und zwar erstens, bei Auflagerung des letzteren Körpers auf einer Seitenfläche:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{r}{4} : \frac{b}{6} = \frac{3}{2} \frac{r}{b} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} = 1{,}5 \,.\, 0{,}5642 = 0{,}8462,$$

dagegen zweitens, bei aufrechter Stellung der Diagonalebene des letzteren Körpers:

$$\frac{M}{M_2} = \frac{r}{4} : \frac{b\sqrt{2}}{12} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} = 3 \,.\, 0{,}3989 = 1{,}1967.$$

Es ist also das Tragmoment des Cylinders (mit kreisförmiger Basis) im ersten Falle kleiner, und im zweiten Falle größer als das eines Parallelepipeds mit quadratischer Basis.

Da die hölzernen parallelepipedischen Balken aus runden Baumstämmen gehauen oder geschnitten werden, so ist die Frage, welches Dimensionsverhältniß ist dem Querschnitte eines solchen Balkens zu geben, damit er noch das möglichst größte Tragvermögen behalte?

Es sei $ABDE$, Fig. 386, der Querschnitt des Stammes, $AD = d$ der Durchmesser desselben, ferner



$$AB = DE = b$$

die Breite und

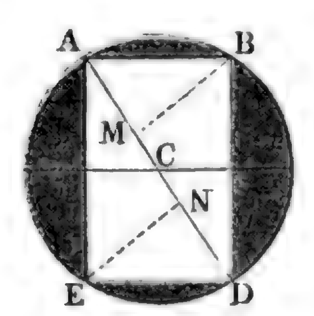
$$AE = BD = h$$

die Höhe des Balkens. Dann ist:

$$b^2 + h^2 = d^2, \text{ oder}$$
$$h^2 = d^2 - b^2,$$

und das Tragmoment:

Fig. 386.




$$Pl = \frac{T}{6} \cdot bh^2 = \frac{T}{6}\, b\,(d^2 - b^2).$$

Es kommt nun darauf an,

$$b\,(d^2 - b^2) = b\,d^2 - b^3$$

so groß wie möglich zu machen. Setzen wir statt $b$, $b \pm x$, wo $x$ sehr klein ist, so bekommen wir für den letzten Ausdruck:

$$(b \pm x)\, d^2 - (b \pm x)^3 = b\,d^2 - b^3 \pm (d^2 - 3\,b^2)\, x - 3\,b\,x^2,$$

insofern wir $x^3$ vernachlässigen, und daher die Differenz beider Ausdrücke

$$y = \mp (d^2 - 3\,b^2)\, x + 3\,b\,x^2.$$

Damit der erste Werth $b\,d^2 - b^3$ in jedem Falle größer ausfällt als der letzte, muß die Differenz

$$y = \mp (d^2 - 3\,b^2)\, x + 3\,b\,x^2$$

positiv sein, man mag $b$ um $x$ größer oder um $x$ kleiner nehmen. Dies ist aber nur möglich, wenn $d^2 - 3\,b^2 = 0$ wird, denn dann ist diese Differenz $= 3\,b\,x^2$, also positiv, wogegen, wenn $d^2 - 3\,b^2$ ein positiver oder negativer reeller Werth ist, $3\,b\,x^2$ vernachlässigt werden kann, und jene Differenz $= \mp (d^2 - 3\,b^2)\, x$, d. i. mit $x$ gleichbezeichnet, also bald negativ, bald positiv ausfällt. Setzen wir nun $d^2 - 3\,b^2 = 0$, so folgt die gesuchte Breite:

$$b = d\sqrt{1/3} \text{ und die entsprechende Höhe:}$$

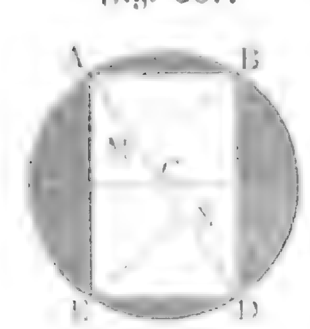
$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{2/3};$$

also das Verhältniß der Höhe zur Breite:

$$\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = 1{,}414 \text{ oder ungefähr wie } 7/5.$$

Man soll also den Baumstamm so zimmern, daß daraus ein Balken hervorgeht, dessen Höhe zur Breite sich wie 7 zu 5 verhält. Um den der größten Festigkeit entsprechenden Querschnitt zu finden, theilen wir den Durchmesser $AD$, Fig. 387, in drei gleiche Theile, errichten in den Theilpunkten $M$ und $N$ Perpendikel $MB$ und $NE$, und verbinden die sich ergebenden Durchschnittspunkte $B$ und $E$ im Kreise mit den Endpunkten $A$ und $D$ durch gerade Linien. Es ist dann $ABDE$ der Querschnitt des größten Widerstandes, denn da

Fig. 387.



$$AM : AB = AB : AD \text{ und } AN : AE = AE : AD,$$

so ist: $AB = b = \sqrt{AM \, . \, AD} = \sqrt{1/_3 \, d \, . \, d} = d\sqrt{1/_3}$

und $AE = h = \sqrt{AN \, . \, AD} = \sqrt{2/_3 \, d \, . \, d} = d\sqrt{2/_3}$,

also: $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, wie auch wirklich verlangt wird.

Anmerkung 1. Der Baumstamm hat das Tragmoment:

$$Pl = \frac{\pi T}{4} \cdot r^3,$$

für den daraus gezimmerten Balken vom größten Widerstande ist dagegen das Tragmoment:

$$Pl = \frac{T}{6} \, d\sqrt{1/_3} \, . \, 2/_3 \, d^2 = \frac{T}{\sqrt{243}} \cdot d^3 = \frac{8\,T}{\sqrt{243}} \, r^3;$$

es verliert folglich der Stamm durch das Beschlagen um

$$1 - \frac{8}{\sqrt{243}} \cdot \frac{4}{\pi} = 1 - 0{,}65 = 0{,}35,$$

d. i. 35 Procent von seiner Tragkraft. Um diesen Verlust zu mäßigen, behaut man den Stamm oft nicht ganz vierkantig, sondern läßt ihn noch mit abgestumpften Kanten.

Ein aus demselben Stamme gezimmerter Balken mit quadratischem Querschnitte hat das Tragmoment:

$$Pl = \frac{T}{6} \cdot d\sqrt{1/_2} \cdot \frac{d^2}{2},$$

weil hier Breite = Höhe = $d\sqrt{1/_2} = 0{,}707\,d$ ist; daher fällt hier jener Verlust gar

$$= 1 - \frac{8}{6 \, . \, 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\pi} = 1 - \frac{8}{3\,\pi\sqrt{2}} = 1 - 0{,}60 = 0{,}40,$$

d. i. 40 Procent aus.

(Anmerkung 2.) Um aus einem Baumstamme einen parallelepipedischen Balken zu erhalten, dessen Biegungsmoment ein Minimum, für welchen also auch $\alpha = \frac{a}{l}$ (vergl. §. 241) so klein wie möglich ist, kommt es darauf an

$$W = \frac{b h^3}{12}, \text{ oder } b h^3 = h^3 \sqrt{d^2 - h^2}, \text{ oder } (b h^3)^2 = h^6 (d^2 - h^2)$$
$$= d^2 h^6 - h^8$$

so groß wie möglich zu machen. Das Differenzialverhältniß des letzteren Ausdruckes in Hinsicht auf $h$ ist:

$$6\, d^2 h^5 - 8\, h^7,$$

und giebt Null für $h^2 = {}^3/_4\, d^2$, d. i.:

$$h = d \sqrt{{}^3/_4} = \frac{d \sqrt{3}}{2} \text{ und}$$

$$b = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{{}^1/_4\, d^2} = \frac{d}{2}.$$

Für diese Werthe (s. analyt. Hülfslehren Art 13) ist das Biegungsmoment des Balkens ein Minimum.

Es ist hier $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}7321$, also nahe $= {}^7/_4$, während oben für das Maximum des Tragmomentes $\frac{h}{b}$ annähernd $= {}^7/_5$ gefunden wurde.

Dieser Forderung entspricht die Construction in Fig. 387, wenn man $AM = DN = {}^1/_4\, AD$ macht.

**Ausgehöhlte und gerippte Balken.** Für einen hohlen parallelepipedischen Balken ist nach §. 228 §. 244

$$W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}, \text{ und daher das Tragmoment:}$$

$$P l = \frac{W T}{e} = \frac{W T}{{}^1/_2\, h} = \left(\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h}\right) \frac{T}{6}.$$

Setzen wir noch $\frac{h_1}{h} = \mu$ und $\frac{b_1}{b} = \nu$, so erhalten wir:

$$\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h} = b h^2 (1 - \mu^3 \nu),$$

und da nun dann der Querschnitt des Balkens,

$F = b h - b_1 h_1 = b h (1 - \mu \nu)$ ist, so ergiebt sich:

$$P l = \left(\frac{1 - \mu^3 \nu}{1 - \mu \nu}\right) \cdot F h \cdot \frac{T}{6}.$$

Da $\frac{1 - \mu^3 \nu}{1 - \mu \nu} = \frac{1 - \mu \nu + \mu \nu - \mu^3 \nu}{1 - \mu \nu} = 1 + \frac{(1 - \mu^2) \mu \nu}{1 - \mu \nu}$ um so größer ausfällt, je größer $\nu$ ist, so erhält man den Maximalwerth von $P l$, wenn man $\nu = 1$ einsetzt, und zwar:

$$1)\quad P l = \left[1 + \left(\frac{1 - \mu^2}{1 - \mu}\right) \mu\right] F h \frac{T}{6} = (1 + \mu + \mu^2)\, F h \frac{T}{6}.$$

Nimmt man dagegen $\nu = \mu$ an, so erhält man:

$$2)\quad P l = (1 + \mu^2)\, F h \frac{T}{6}.$$

In beiden Fällen ist $\mu$ so groß wie möglich und daher nahe = Eins zu nehmen, sind also die Wände des Balkens möglichst dünn zu machen, wenn der Balken die möglichst große Tragfähigkeit besitzen soll.

Hiernach hat man für $\mu = 1$, im ersteren Falle:

$$Pl = 3\, Fh \frac{T}{6} = Fh \frac{T}{2}, \text{ und im zweiten:}$$

$$Pl = 2\, Fh \frac{T}{6} = Fh \frac{T}{3}, \text{ wogegen}$$

$$Pl = Fh \frac{T}{6} \text{ ausfällt, wenn man } \mu = 0 \text{ annimmt.}$$

In allen drei Fällen wächst die Tragfähigkeit des Balkens bei gleichem Querschnitte ($F$) oder Gewichte mit der Höhe ($h$) gleichmäßig; sie ist aber im ersten Falle, wo der Balken aus zwei Querrippen besteht, am größten, im zweiten Falle, wo er eine parallelepipedische Röhre bildet, eine mittlere, und im dritten Falle, wo er aus einer oder zwei Tragwänden besteht, am kleinsten.

Wenn z. B. ein massiver Balken mit den Querschnittsdimensionen $b_1$ und $h_1$ denselben Querschnitt oder dasselbe Gewicht haben soll, wie der gedachte hohle Balken, so ist:

$$F = b_1 h_1 = b h - b_1 h_1, \text{ d. i. } 2\, b_1 h_1 = b h, \text{ oder } \frac{b_1 h_1}{b h} = \mu \nu = \tfrac{1}{2}.$$

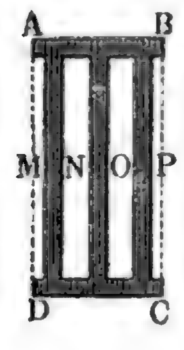
Nimmt man nun noch $\frac{b_1}{b} = \frac{h_1}{h}$ an, so erhält man $\mu = \nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und daher das Verhältniß zwischen den Tragkräften beider Balken:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{(1 - \mu^3 \nu)}{1 - \mu \nu} \cdot \frac{h}{h_1} = \left(\frac{1 - \tfrac{1}{4}}{1 - \tfrac{1}{2}}\right)\sqrt{2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2{,}12;$$

es besitzt also dann der hohle Balken mehr als doppelt so viel Tragfähigkeit als der gleich schwere massive Balken, welcher genau dieselbe Gestalt und Größe hat wie die Höhlung des ersteren.

Dieselben Verhältnisse finden natürlich auch statt bei den Iförmigen Trägern, da sie (nach §. 228) dasselbe Maß $W$ des Biegungsmomentes besitzen. Ebenso lassen sich diese Formeln auch auf Körper mit mehr als zwei Hauptrippen, wie z. B. mit einem Querschnitte, wie Fig. 388, anwenden, wo $b$ die Breite der Fuß- und Deckplatten $AB$ und $CD$, und $h$ die ganze Höhe $AD = BC$, sowie $b_1$ die Summe der Breiten und $h_1$ die Höhe der hohlen Räume $M, N, O, P$, bezeichnen.

Fig. 388.




Für eine Röhre oder für einen hohlen Cylinder hat man dieselben Verhältnisse wie für einen parallelepipedischen Balken. Ist $r$ der äußere und $r_1 = \mu r$ der innere Halbmesser, so ist das Tragmoment dieses Körpers:

$$Pl = \frac{\pi (r^4 - r_1^4)}{r} \frac{T}{4} = (1 - \mu^4) \pi r^3 \frac{T}{4} = \left(\frac{1-\mu^4}{1-\mu^2}\right) Fr \frac{T}{4}$$
$$= (1 + \mu^2) Fr \cdot \frac{T}{4} \cdot$$

Dieser Ausdruck wird um so größer, je mehr sich $\mu = \frac{r_1}{r}$ der Einheit nähert, je kleiner also die Wandstärke der Röhre ist.

Setzt man $\mu = 1$, so erhält man das entsprechende größte Tragmoment:

$$Pl = 2\, Fr \frac{T}{4} = Fr \frac{T}{2} \cdot$$

Vergleicht man die Tragkraft dieser Röhre mit der eines gleichschweren massiven Cylinders vom Halbmesser $r_1 = \mu r = r\sqrt{^1/_2}$, so hat man, da für diesen

$$P_1 l = F r_1 \cdot \frac{T}{4} = \mu F r \cdot \frac{T}{4} \text{ ist,}$$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{1 + \mu^2}{\mu} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = 2.12,$$

genau wie beim parallelepipedischen Balken unter denselben Voraussetzungen.

Es ist endlich aus der allgemeinen Gleichung:

$$Pl = \frac{WT}{e} = \frac{(F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdot\cdot)}{e} T = (F_1 \mu_1^2 + F_2 \mu_2^2 + \cdot\cdot)\, e\, T$$

unmittelbar zu ersehen, daß das Tragmoment eines Körpers um so größer ausfällt, je größer die Entfernungen $z_1 = \mu_1 e$, $z_2 = \mu_2 e$ u. s. w. der Querschnittstheile $F_1$, $F_2$ u. s. w. von der neutralen Axe sind. Da nun aber diese Entfernungen höchstens $= e$ sein können, so wird folglich derjenige Balken das größte Tragmoment besitzen, dessen Querschnittstheile einen und denselben und zwar möglichst großen Abstand von der neutralen Axe haben. Ein solcher Körper besteht folglich nur aus zwei Querrippen. Da die zur Verbindung der Querrippen dienenden hohen Rippen der Forderung eines größten Tragmomentes nicht entsprechen können, so ist es auch gar nicht möglich, mit der Tragkraft eines Balkens ein absolutes Maximum zu erreichen; und man muß sich daher nur damit begnügen, die Tragfähigkeit eines Balkens durch Aushöhlung oder Schwächung desselben in der Nähe der Axe und durch Anbringung von Rippen oder Federn in möglichst großem Abstande von der Axe zu erhöhen.

Die Dicke, welche die Mittelrippe eines solchen Körpers erhalten muß, um der Schubfestigkeit widerstehen zu können, wird im folgenden Kapitel bestimmt.

Anmerkung. Unter der Voraussetzung, daß die Tragmodel mit den Festigkeitsmodeln wachsen und abnehmen, geben die englischen Ingenieure den Trägern aus dem dem Zerdrücken mehr widerstehenden Gußeisen auf der Zugseite und dagegen den Trägern aus Schmiedeeisen, welches dem Zerreißen mehr widersteht, auf der

Druckseite eine besondere Verstärkung. Ruhen diese Träger an ihren Enden auf, so erhalten sie deshalb, z. B. je nachdem sie aus Guß- oder aus Schmiedeeisen bestehen, entweder eine breitere und dickere Fuß-, oder eine breitere und dickere Kopfplatte, oder statt derselben Doppelplatten mit verticalen Zwischenwänden, ähnlich wie Fig. 388 zeigt. Gußeiserne Träger erhalten in dieser Absicht die schon aus dem Obigen (§. 237) bekannten T und ⊥ förmigen Querschnitte.

Beispiel. Ein Tragbalken aus Eichenholz von 9 Zoll Breite und 11 Zoll Höhe, welcher seither hinreichende Tragkraft gewährt hat, soll durch einen hohlen gußeisernen Balken von 5 Zoll äußerer Breite und 10 Zoll Höhe ersetzt werden, von welcher Stärke wird man denselben gießen lassen müssen? Setzt man die doppelte Metallstärke desselben $= x$, so hat man die Breite der Höhlung $= 5 - x$, und die Höhe derselben $= 10 - x$, folglich ist für den hohlen Balken:
$b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 = 5 \,.\, 10^3 - (5 - x)(10 - x)^3 = 2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4$,
und das Tragmoment $P l = \frac{7000}{6 \,.\, 10} (2500 x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4)$. Wenn für den massiven hölzernen Balken das Tragmoment $P l = \frac{1000}{6} \cdot 9 \,.\, 11^2 = \frac{1}{6} \,.\, 1089000$ ist, so hat man zu setzen:

$$700 \,.\, (2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4) = 1089000 \text{ oder:}$$
$$2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4 = 1556.$$

Zunächst ist annähernd $x = \frac{1556}{2500} = 0{,}62$, wofür aber $x = 0{,}65$ gesetzt werden soll. Dann folgt $450\, x^2 = 450 \,.\, 0{,}4225 = 190{,}12$, $35\, x^3 = 9{,}61$, $x^4 = 0{,}18$, daher läßt sich setzen:

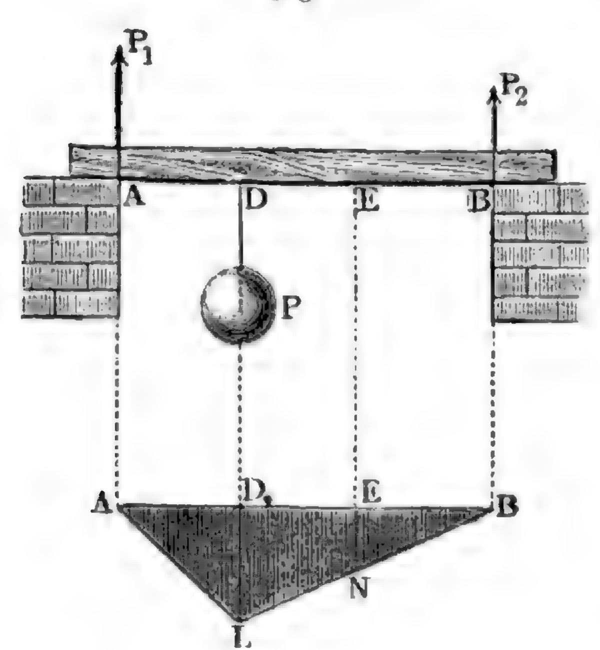
$$x = \frac{1556 + 190{,}12 - 7{,}56 + 0{,}18}{2500} = \frac{1738{,}7}{2500} = 0{,}695 \text{ Zoll},$$

und folglich die gesuchte Metallstärke:

$$\frac{x}{2} = 0{,}3475 \text{ Zoll}.$$

§. 245 **Excentrische Belastung.** Wirkt die Kraft eines an seinen Enden $A$ und $B$ aufliegenden Balken, Fig. 389, nicht in der Mitte, sondern steht der Angriffspunkt $D$ derselben um die ungleichen Abstände $DA = l_1$, und $DB = l_2$ von den Stützpunkten ab, so besitzt der Balken eine größere Tragkraft, als wenn diese Kraft in der Mitte des Balkens niederzieht. Bezeichnen wir die Kräfte, welche die Stützen $A$ und $B$ aufnehmen, durch $P_1$ und $P_2$, und die ganze Länge des Balkens $AB = l_1 + l_2$ wieder durch $l$. Setzen wir nun in Beziehung auf den Stützpunkt $B$, das Moment von $P_1$ gleich dem von $P$, und ebenso in Beziehung auf den Stütz-

Fig. 389.



punkt $A$, das Moment von $P_2$ gleich dem von $P$, also $P_1 l = P l_2$ und $P_2 l = P l_1$, so erhalten wir die Kräfte in den Stützpunkten:

$$P_1 = \frac{l_2}{l} P \text{ und } P_2 = \frac{l_1}{l} P,$$

und folglich ihre Momente in Hinsicht auf den Angriffspunkt $D$:

$$P_1 l_1 = P_2 l_2 = \frac{P l_1 l_2}{l}.$$

Für irgend einen anderen Punkt $E$, dessen Entfernung $B E$ vom Stützpunkte $B$, $= x$ ist, hat man dieses Moment:

$$P_2 . \overline{B E} = \frac{P l_1 x}{l}$$

kleiner als das gefundene; es ist folglich auch in $D$ die stärkste Biegung, und die Tragkraft nur in Hinsicht auf diesen Punkt zu finden, also:

$$\frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{W T}{e} \text{ zu setzen.}$$

Führen wir $l_1 = \frac{l}{2} - x$ und $l_2 = \frac{l}{2} + x$ ein, so erhalten wir das Kraftmoment auch:

$$\frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{P \left(\frac{l}{2} - x\right)\left(\frac{l}{2} + x\right)}{l} = \frac{P \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)}{l};$$

und es fällt also hiernach die Tragkraft:

$$P = \frac{l}{l_1 l_2} \cdot \frac{W T}{e} = \frac{l W T}{\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) e}$$

um so größer oder kleiner aus, je größer oder kleiner $x$ ist. Für $x = \frac{l}{2}$, d. i. für $l_1 = 0$, wenn also $P$ bis zur Stütze $A$ hingerückt ist, hat man:

$$P = \frac{l W T}{0 . e} = \infty,$$

dagegen für $x = 0$, d. i. wenn die Last $P$ in der Mitte hängt, ist die Tragkraft ein Minimum, und zwar:

$$P = 4 \frac{W T}{l e},$$

wie wir bereits aus §. 240 wissen. Es trägt also ein an den Enden aufliegender prismatischer Balken in der Mitte am wenigsten, und dagegen immer mehr und mehr, je näher die Last einem Stützpunkte gerückt wird.

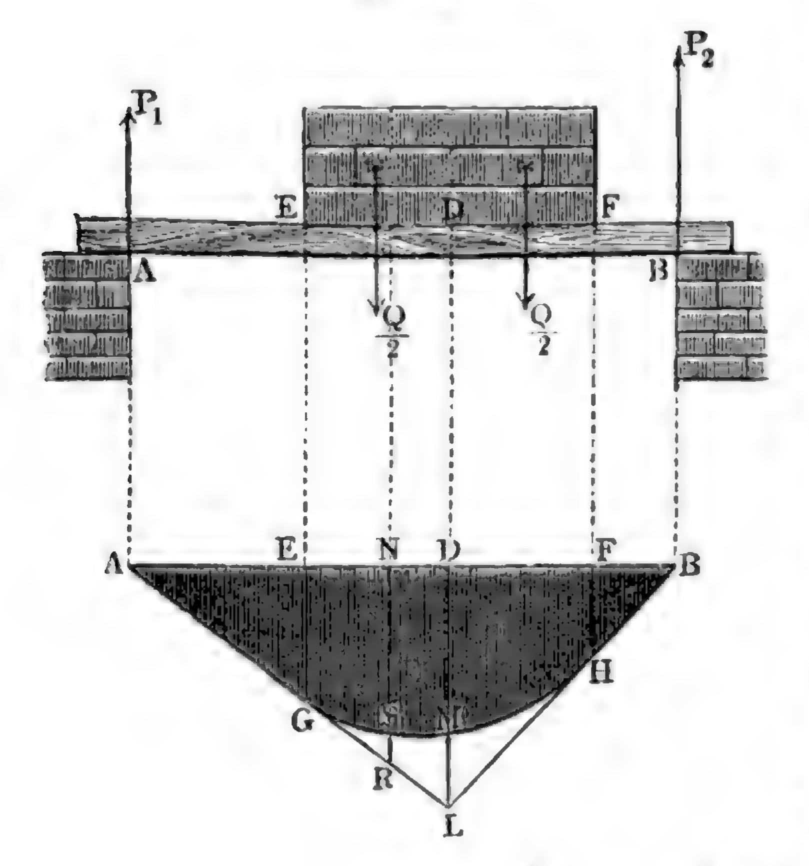
Wenn man den Krümmungshalbmesser umkehrt, und folglich die den Krümmungen selbst direct proportionalen Kraftmomente an den verschiedenen Stellen des Balkens als Ordinaten aufträgt, so erhält man ein anschauliches

Bild von der Verschiedenheit der Biegungen des Balkens an verschiedenen Stellen desselben. Wird in dem soeben behandelten Falle das Kraftmoment $\frac{P l_1 l_2}{l}$ in $D$, durch die Ordinate $\overline{DL}$ repräsentirt, und werden vom Endpunkte $L$ derselben aus nach den Endpunkten der Abscissen $DA = l_1$ und $DB = l_2$ gerade Linien $LA$ und $LB$ gezogen, so begrenzen dieselben die sämmtlichen Ordinaten, wie (z. B. $\overline{EN}$), welche die Biegungsmaße an den verschiedenen Stellen des Körpers angeben, denn da $\frac{EN}{EB} = \frac{DL}{DB}$ ist, so folgt:

$$\overline{EN} = \frac{EB}{DB} \cdot \overline{DL} = \frac{x}{l_2} \cdot \frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{P l_1 x}{l},$$

wie wir oben gefunden haben.

Fig. 390.




Ein anderer in der Praxis nicht selten vorkommender Fall ist der, daß eine Last $Q = cq$ gleichförmig vertheilt ist auf einen Theil $\overline{EF} = c$ der ganzen Länge $l$ des Balkens $AB$, Fig. 390. Bezeichnen wir wieder die Entfernungen der Mitte $D$ dieser Last von den Stützpunkten $A$ und $B$, durch $l_1$ und $l_2$, sowie die von diesen Punkten aufgenommenen Kräfte durch $P_1$ und $P_2$, so haben wir auch wieder

$$P_1 = \frac{l_2}{l} Q = \frac{l_2 c q}{l}$$

und

$$P_2 = \frac{l_1}{l} Q = \frac{l_1 c q}{l}.$$

Wäre $Q$ nicht vertheilt, sondern griffe diese Kraft nur in $D$ an, so würde das Moment für $D$, $= \frac{Q l_1 l_2}{l}$ sein, und wenn man dasselbe durch eine Ordinate $\overline{DL}$ repräsentirt, so ließen sich die Momente für die anderen

Punkte von $AB$ durch die geraden Linien $LA$ und $LB$ abschneiden. Da aber für die Punkte innerhalb $EF$ den Kräften $P_1$ und $P_2$ noch die darüber liegende Last entgegenwirkt, so erleiden die Ordinaten zwischen $EG$ und $FH$ noch eine Verminderung. Für den Mittelpunkt $D$ der belasteten Basis $EF$ kommt z. B. das Moment des halben Gewichtes, d. i.:

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{c}{4} = \overline{ML},$$

in Abzug, und es bleibt daher von der Ordinate $\overline{DL} = \frac{Q l_1 l_2}{l}$ nur noch das Stück:

$$\overline{DM} = \overline{DL} - \overline{ML} = Q\left(\frac{l_1 l_2}{l} - \frac{c}{8}\right)$$

übrig. Für einen anderen Punkt $N$, dessen Abscisse $AN = x$ sein möge, ist dagegen das Moment:

$$P_1 \,.\, \overline{NA} - \overline{NE} \cdot q \cdot \frac{\overline{NE}}{2} = P_1 x - \frac{(x - l_1 + {}^1\!/_2\, c)^2 q}{2},$$

und wenn nun $P_1 x$ durch die Ordinate $\overline{NR}$ und $\frac{(x - l_1 + {}^1\!/_2\, c)^2 q}{2}$ durch das Stück $\overline{SR}$ repräsentirt wird, giebt die Ordinate $\overline{NS}$ das ganze Moment:

$$P_1 x - \frac{(x - l_1 + {}^1\!/_2\, c)^2 q}{2}$$

an. Dasselbe fällt natürlich für verschiedene $x$, d. i. für verschiedene Punkte sehr verschieden aus, ist aber für $x - l_1 + {}^1\!/_2\, c = \frac{P_1}{q}$ ein Maximum, und zwar:

$$P_1\left(\frac{P_1}{q} + l_1 - {}^1\!/_2\, c\right) - \frac{P_1^2}{2q} = P_1\left(\frac{P_1}{2q} + l_1 - {}^1\!/_2\, c\right)$$

$$= P_1\left(l_1 - \frac{c}{2} + \frac{c l_2}{2l}\right) = P_1 l_1\left(1 - \frac{c}{2l}\right) = \frac{Q l_1 l_2}{l}\left(1 - \frac{c}{2l}\right).$$

Hiernach haben wir also für das **Tragvermögen** dieses Balkens zu setzen:

$$\frac{Q l_1 l_2}{l}\left(1 - \frac{c}{2l}\right) = \frac{WT}{e}.$$

**Beispiel.** Welche Last trägt ein hohler parallelepipedischer Träger aus $^1\!/_2$ Zoll dickem Eisenblech, dessen äußere Höhe 16 Zoll und äußere Breite 4 Zoll beträgt, wenn er auf 5 Fuß Länge gleichförmig belastet wird und die Mitte dieser Länge von den beiden Stützpunkten 8 und 4 Fuß absteht? Es ist hier

$$\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h} = \frac{4 \,.\, 16^3 - 3 \,.\, 15^3}{16} = 391{,}2,$$

ferner:

$$\frac{l_1 l_2}{l}\left(1-\frac{c}{2l}\right)=\frac{2}{3}\cdot 4\left(1-\frac{5}{24}\right)=\frac{32 \cdot 19}{24}=\frac{76}{3},$$

und daher die gesuchte Last:

$$Q = 391{,}2 \cdot \frac{3}{76} \cdot \frac{T}{6} = \frac{195{,}6}{76} \cdot 9000 = 23160 \text{ Pfund.}$$

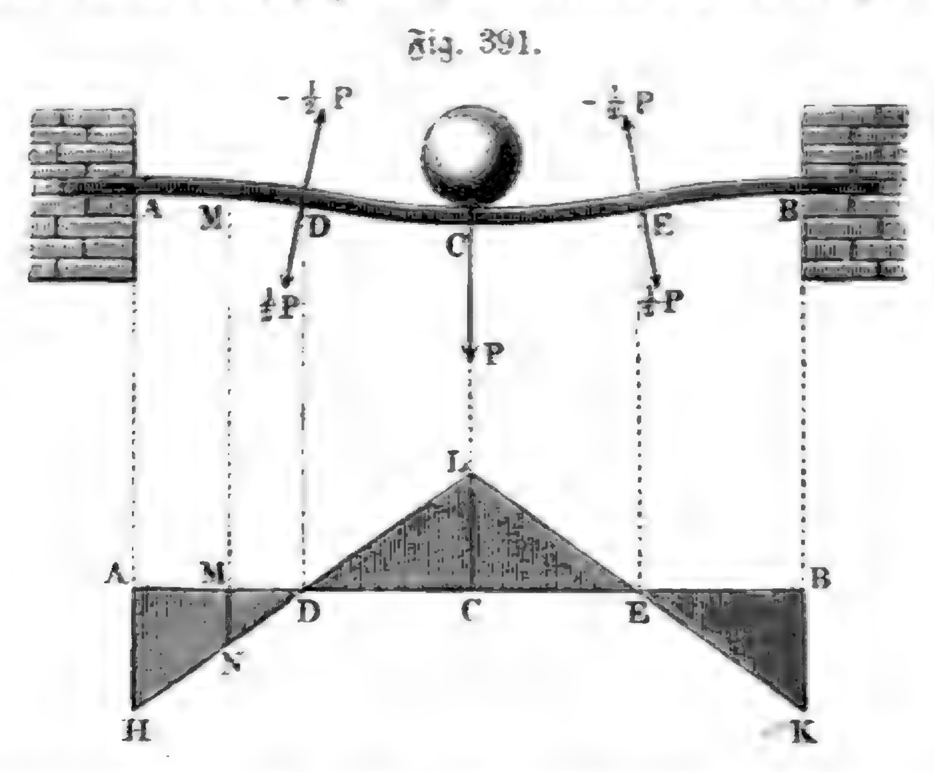
Anmerkung. Wenn die Last $Q$ nicht gleichförmig über $EF$ vertheilt ist, sondern je eine Hälfte derselben in den Endpunkten $E$ und $F$ angreift, so ist die Linie $GMH$ eine gerade, und das größte Moment die Ordinate $\overline{GE}$, also:

$$\frac{Q l_2}{l}\left(l_1 - \frac{c}{2}\right) = \frac{WT}{e}$$

zu setzen, wofern $l_1$ den größeren Abstand $DA$ und $l_2$ den kleineren Abstand $DB$ der Mitte $D$ von den Enden $A$ und $B$ bezeichnet.

§. 246 **An beiden Enden eingemauerte Balken.** Ist ein in der Mitte $C$ belasteter Balken $AB$, Fig. 391, an beiden Enden eingeklemmt, so

Fig. 391.




nimmt derselbe in der Mitte $C$ eine Biegung nach oben, und in jedem der beiden Auflagerungspunkte $A$ und $B$ eine Biegung nach unten an, und es bilden sich dabei in den Mittelpunkten $D$ und $E$ der Balkenhälften $CA$ und $CB$ Wendepunkte, wo die Biegung Null oder der Krümmungshalbmesser unendlich groß ist. Das Gewicht $P$ wird zur Hälfte von $AD$ und zur Hälfte von $BE$ getragen, und es ist daher anzunehmen, daß beide Balkenviertel $AD$ und $BE$ an ihren Enden $D$ und $E$ durch $\frac{P}{2}$ abwärts, und dagegen die Balkenhälfte $DE$ an jedem ihrer Enden $D$ und $E$ durch $\left(-\frac{P}{2}\right)$ aufwärts gebogen wird. Jede dieser Kräfte hat den Hebelarm $AD = CD$ u. s. w. $= \frac{AB}{4}$

$= \frac{l}{4}$, es ist folglich das Moment derselben:

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}, \text{ daher auch:}$$

$$\frac{Pl}{8} = \frac{WT}{e}, \text{ und die Tragkraft}$$

$$P = \frac{8\,WT}{le} = 2 \cdot \frac{4\,WT}{le} \text{ zu setzen.}$$

Es trägt also ein solcher Balken doppelt so viel, als wenn er an beiden Enden frei aufliegt.

Macht man die Ordinaten $\overline{AH} = \overline{BK} = \overline{CL} = \frac{Pl}{8}$, und zieht man die Geraden $HL$ und $KL$, so schneiden die letzteren die den Kraftmomenten und Biegungen proportionalen Ordinaten $(\overline{MN})$ für jede andere Stelle $(M)$ des Balkens ab.

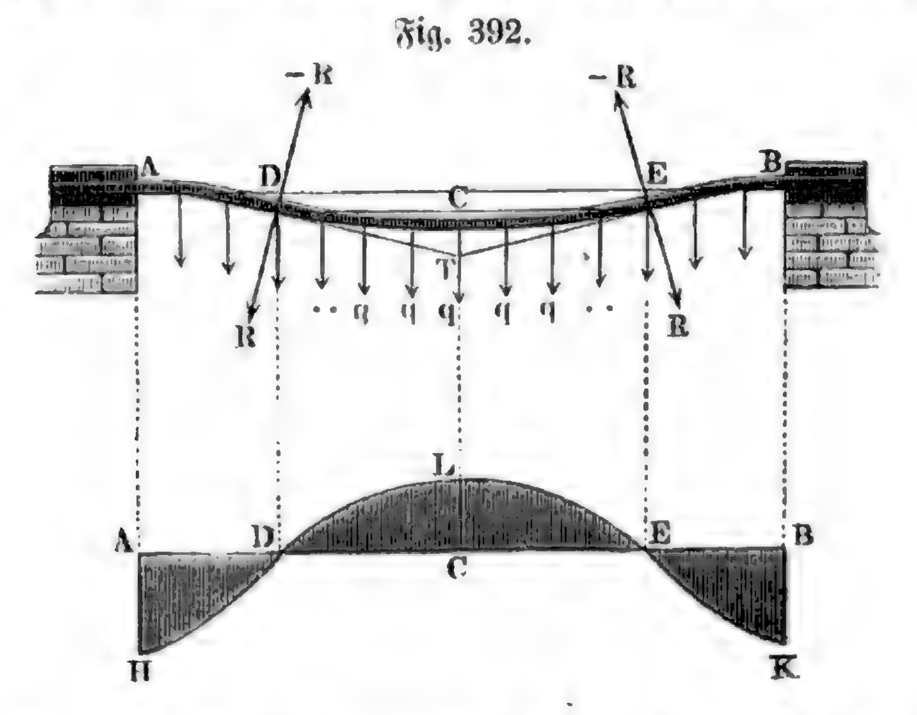
Setzt man in der gefundenen Formel den Festigkeitsmodul $K$ statt des Tragmoduls $T$ ein, so giebt sie natürlich die Kraft zum Zerbrechen des Balkens, also:

$$P = \frac{8\,WK}{le}.$$

Da die Krümmungen in $A$, $B$ und $C$ gleich groß sind, so erfolgt natürlich auch das Zerbrechen in $A$, $B$ und $C$ zugleich.

Wenn bei der vorigen Balkenlage die Last $Q = lq$ gleichmäßig vertheilt ist, so nimmt der Balken zwar auch zwei Biegungen nach unten und zwei Biegungen nach oben an, nur liegen die Wendepunkte $D$ und $E$, Fig. 392,

Fig. 392.




nicht in der Mitte der Balkenhälften, da die Biegungskräfte $R$, $R$ der Stücke $AD$ und $BE$ noch durch die darauf liegende Last unterstützt, und

dagegen die Wirkung der Biegungskräfte $- R$, $- R$ des Mittelstückes $DE$ von dieser Last geschwächt werden. Setzen wir die Länge $AD = BE = l_1$, und die Länge $CD = CE = l_2$, so haben wir die ganze Länge des Balkens: $l = 2(l_1 + l_2)$, ferner die Last auf $AD$ oder $BE$, $Q_1 = q l_1$, und dagegen die auf $DE$, $= Q_2 = 2R = 2 q l_2$. Da nun $AD$ durch $R$ und $Q_1$ niedergebogen wird, so ist nach §. 216 und §. 223 für den Neigungswinkel $EDT = DET = \alpha$ der Wendestelle $D$ gegen den Horizont:

$$\alpha = \frac{R l_1^2}{2 WE} + \frac{Q_1 l_1^2}{6 WE},$$

und da umgekehrt $CD$ von $(- R)$ aufwärts, und von $Q_2$ abwärts gebogen wird, so hat man für dieselbe Stelle $(D)$ auch:

$$\alpha = \frac{R l_2^2}{2 WE} - \frac{Q_2 l_2^2}{6 WE}.$$

Setzt man nun beide Werthe für $\alpha$ einander gleich, so ergiebt sich die Beziehung:

$$3 R (l_2^2 - l_1^2) = Q_1 l_1^2 + Q_2 l_2^2, \text{ oder}$$
$$3 q l_2 (l_2^2 - l_1^2) = q (l_1^3 + l_2^3), \text{ d. i.}$$
$$3 l_2 \left[l_2^2 - \left(\frac{l}{2} - l_2\right)^2\right] = l_2^3 + \left(\frac{l}{2} - l_2\right)^3.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man:

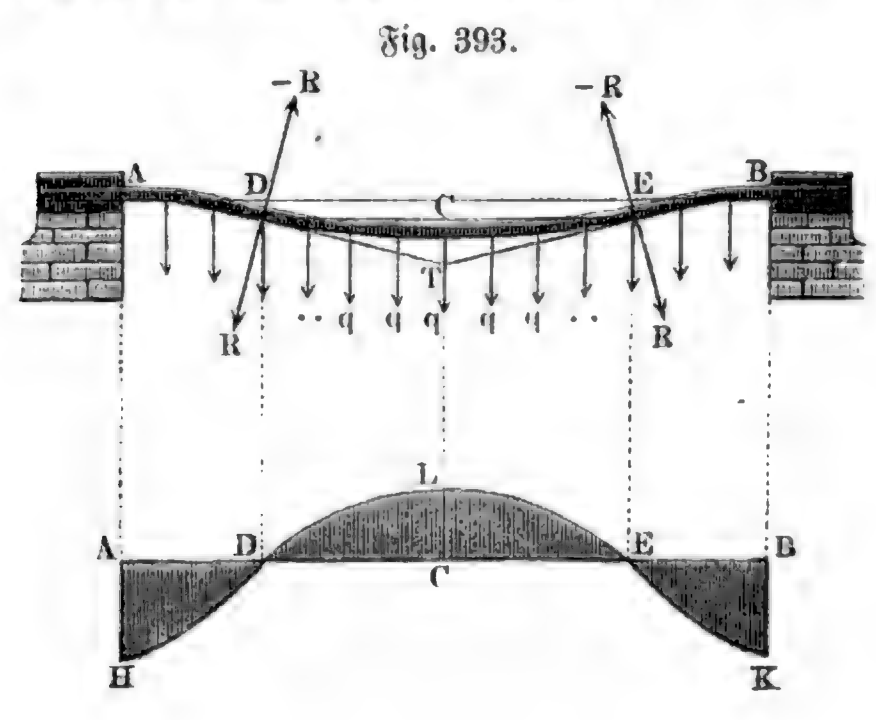
$$l_2 = \frac{l}{2}\sqrt{1/3} \text{ und } l_1 = \frac{l}{2}(1 - \sqrt{1/3}),$$

so daß sich nun das Kraftmoment in Hinsicht auf die Mitte $C$:

$$M = R l_2 - \frac{R l_2}{2} = \frac{R l_2}{2} = \frac{q l_2^2}{2} = \frac{q l^2}{24} = \frac{Q l}{24},$$

und das in Hinsicht auf einen Endpunkt $A$ oder $B$:

Fig. 393.



$$M_1 = R l_1 + \frac{Q_1 l_1}{2} = q l_1 l_2 + \frac{q l_1^2}{2} = q l_1 \left(l_2 + \frac{l_1}{2}\right)$$
$$= \frac{q l^2}{8} (1 - \sqrt{1/3}) (1 + \sqrt{1/3})$$
$$= \frac{q l_2 (1 - 1/3)}{8} = \frac{Q l}{12} = 2 \frac{Q l}{24} \text{ ergiebt.}$$

Es ist hiernach die Tragkraft dieses Balkens:

$$Q = 12 \cdot \frac{W T}{l e} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8 W T}{l e},$$

d. i. $^3/_2$ mal so groß als im vorigen Falle, wo die Last in der Mitte $C$ wirkt.

Trägt man $\frac{Q l}{12}$ als Ordinaten in $A$ und $B$, sowie $\frac{Q l}{24}$ als solche in $C$ auf, macht man also $\overline{AH} = \overline{BK} = \frac{Q l}{12}$ und $\overline{CL} = - \frac{Q l}{24}$, so erhält man drei Punkte $H$, $K$ und $L$ der Curve $HDLEK$, wodurch die Veränderlichkeit der Biegung des Balkens an verschiedenen Stellen veranschaulicht wird.

Beispiel. Wie hoch läßt sich in einem Getreidemagazine das Korn aufschütten, wenn der Boden auf Balken von 25 Fuß Länge, 10 Zoll Breite und 12 Zoll Höhe ruht, die Entfernung zwischen den Axen von je zwei Balken, = 3 Fuß beträgt und ein Cubikfuß Kornmasse 46,5 Pfund wiegt? Wenden wir die letzte Formel $Q l = 12 . 167 . b h^2$ an, so müssen wir setzen:

$$b = 10, h = 12, l = 25 . 12 = 300,$$

folglich:

$$Q = \frac{12 . 167 . 10 . 144}{300} = 9619 \text{ Pfund.}$$

Nun wiegt aber ein Parallelepiped Kornmasse von 25 Fuß Länge, 3 Fuß Breite und $x$ Fuß Höhe $= 25 . 3 . x . 46,5$ Pfund; setzen wir daher diesen Werth $= Q$, so folgt die fragliche Höhe der Aufschüttung:

$$x = \frac{9619}{75 . 46,5} = 2,76 \text{ Fuß.}$$

**Ungleich unterstützte Balken.** Wenn ein Balken $ABC$, Fig. 394 (a. f. S.), an einem Ende $A$ eingemauert ist, und am anderen Ende $B$ aufruht, und die Last $P$ in der Mitte zwischen $A$ und $B$ wirkt, so ist nach §. 221 der von der Stütze $B$ aufzunehmende Druck: §. 247

$$P_1 = \frac{5}{16} P;$$

daher das Kraftmoment in Hinsicht auf $C$:

$$\overline{CL} = \frac{P_1 l}{2} = \frac{5}{32} P l,$$

hingegen das Moment in Hinsicht auf $A$:

$$\overline{AH} = P\frac{l}{2} - P_1 l = Pl\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{16}\right) = \frac{3}{16}Pl = \frac{6}{32}Pl,$$

Fig. 394.

also größer, und hiernach die Tragkraft:

$$P = \frac{16}{3}\cdot\frac{WT}{le}$$

zu setzen.

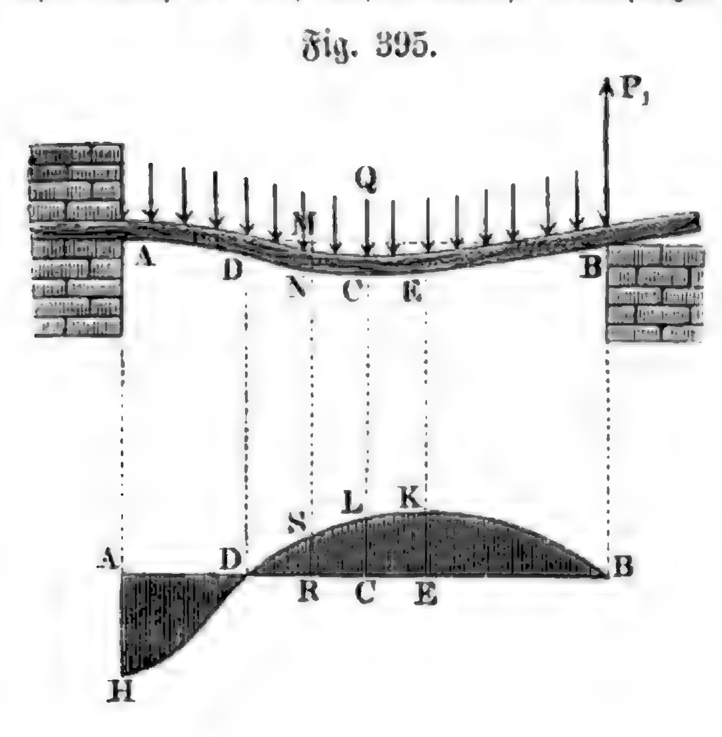
Für einen Zwischenpunkt $M$, welcher um $CM = x$ von der Mitte $C$ absteht, ist dieses Moment:

$$\overline{MN} = P_1\left(\frac{l}{2} + x\right) - Px = P_1\frac{l}{2} - (P - P_1)x.$$

Nimmt man $x = \frac{\frac{1}{2}P_1 l}{P - P_1} = \frac{5}{16 - 5}\cdot\frac{l}{2} = \frac{5}{22}l$ an, so erhält man denjenigen Punkt $D$, wo das Moment Null, also der Krümmungshalbmesser unendlich groß ist. Die Veränderlichkeit dieses Momentes und die der Biegung des Balkens wird durch die Ordinaten der Geraden $HL$ und $LB$ veranschaulicht, welche durch die Endpunkte von $\overline{AH} = \frac{6}{32}Pl$ und von $\overline{CL} = \frac{5}{32}Pl$ gehen.

Ist endlich der auf dieselbe Weise unterstützte und festgehaltene Balken $AB$, Fig. 395, gleichmäßig, und zwar wie wir seither gewöhnlich angenommen haben, auf den laufenden Fuß Balkenlänge mit $q$ belastet, so läßt sich zunächst die Stützkraft $P_1$ in $B$ wie folgt bestimmen. Bei der Balkenlänge $AB = l$ ist die ganze Last $Q = lq$ und das Kraftmoment in Hinsicht auf einen Punkt $M$ im Abstande $BM = x$ vom Stützpunkte $B$:

Fig. 395.



$$\overline{RS} = P_1 x - \frac{q x^2}{2},$$

folglich der entsprechende Neigungswinkel:

$$\alpha = \frac{P_1 (l^2 - x^2)}{2 WE} - \frac{q (l^3 - x^3)}{6 WE},$$

und (nach §. 217 und §. 223) die zugehörige Durchbiegung:

$$y = MN = \frac{P_1 (l^2 x - {}^1/_3 x^3)}{2 WE} - \frac{q (l^3 x - {}^1/_4 x^4)}{6 WE}.$$

Da nun aber $A$ so hoch wie $B$ liegt, so ist die Ordinate in $A$, d. i. für $x = l$, $y = 0$, und daher zu setzen:

$$3 P_1 \,.\, {}^2/_3 l^3 = q \,.\, {}^3/_4 l^4,$$

woraus nun der gesuchte Druck in $B$:

$$P_1 = {}^3/_8 q l = {}^3/_8 Q \text{ folgt.}$$

Setzt man diesen Werth für $P_1$ in den Ausdruck für das Moment, so erhält man dieses:

$$\overline{RS} = {}^3/_8 Q x - \frac{q x^2}{2} = \frac{q x}{2} ({}^3/_4 l - x); \text{ und daher für } x = l:$$

$$\overline{AH} = - \frac{q l^2}{8} = - \frac{Q l}{8}.$$

Für $x = BD = {}^3/_4 l$ ist ferner dieses Moment $=$ Null, und für $x = BE = {}^3/_8 l$ ist es ein Maximum:

$$\overline{EK} = \frac{9 q l^2}{128} = \frac{9}{128} Q l.$$

Da $\frac{Q l}{8} = \frac{16}{128} Q l > \frac{9}{128} Q l$ ist, so fällt das Moment $\overline{AH}$ in Hinsicht auf den festen Punkt $A$ größer aus als das Moment $\overline{KE}$ in Hinsicht auf die Mitte $E$ von $BD$, und es ist daher die Tragkraft dem Momente $\frac{Q l}{8}$ entsprechend zu bestimmen, d. i.

$$Q = 8 \frac{WT}{le}$$

zu setzen, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß der Tragmodul für Druck und Zug einer und derselbe ist.

Diese Tragkraft ist $8 \,.\, {}^3/_{16} = {}^3/_2$ mal so groß, als wenn bei derselben Auflagerung des Balkens die Last in der Mitte wirkte.

§. 248 **In Zwischenpunkten belastete Balken.** Wenn ein an beiden Enden mit gleichen Gewichten $P$, $P$ belasteter Balken $AB$, Fig. 396, in zwei Punkten $C$ und $D$ unterstützt ist, welche von den Enden $A$ und $B$ um $AC = BD = l_1$ abstehen, so nimmt jeder dieser Punkte die Kraft $P$ auf, und es ist für einen Punkt $M$ innerhalb $CD$ das Biegungsmoment

Fig. 396.

$$\overline{CL} = \overline{DO} = \overline{MN} = P(x_1 - l_1) - Px_1 = Pl_1$$

constant, also die neutrale Axe von $CD$ kreisförmig gebogen, wogegen für einen Punkt $U$ innerhalb $AC$ dieses Moment $\overline{UV} = Px$ veränderlich, jedoch kleiner als $Pl_1$ ausfällt.

Der Krümmungshalbmesser vom Mittelstück $CD$ ist $r = \frac{WE}{Pl_1}$, folglich der Neigungswinkel der Balkenaxe in $C$ und $D$, $\alpha_1 = \frac{l}{2r} = \frac{Pll_1}{2WE}$, wenn $l$ die Länge dieses Mittelstückes bezeichnet. Ferner folgt die Bogenhöhe $MS = a = \frac{(1/2\, l)^2}{2r} = \frac{l^2}{8r} = \frac{Pl^2 l_1}{8WE}$, sowie die Bogenhöhe von $CA$

$$a_1 = \alpha_1 l_1 + \frac{Pl_1^3}{3WE} = \frac{Pll_1^2}{2WE} + \frac{Pl_1^3}{3WE} = \frac{Pl_1^2}{WE}\left(\frac{l}{2} + \frac{l_1}{3}\right).$$

Das Tragvermögen dieses Balkens ist $Pl_1 = \frac{WT}{e}$.

Ist derselbe Balken $AB$, wie Fig. 397 darstellt, gleichmäßig, und zwar auf den laufenden Fuß mit $q$ belastet, so fällt bei gewissen Verhältnissen das Biegungsmoment theils positiv, theils negativ, und daher in zwei Punkten $U$ und $V$ Null aus.

Fig. 397.

Für einen Punkt innerhalb $AC$ und $BD$ ist dieser Moment $1/2\, qx^2$, für einen Punkt zwischen $C$ und der Mitte $M$ oder $D$ und $M$ dagegen, da der Druck in $C$ und $D$ den Werth $1/2\, Q = (1/2\, l + l_1)q$ hat:

$\overline{RS} = y = \frac{1}{2}(x + l_1)^2 q - (\frac{1}{2} l + l_1) x q = \frac{1}{2}(x^2 - lx + l_1^2) q$
und fällt daher Null aus für $x^2 - lx = - l_1^2$, d. i. für

$$\overline{CU} = x = \frac{l}{2} - \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2} \text{ und für}$$

$$CV = x = \frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2};$$

welches natürlich bedingt, daß $l_1 =< \frac{l}{2}$, d. i. $CA < CM$ ist. Außerdem bleibt das Biegungsmoment stets positiv, wie z. B. Fig. 398 darstellt.

Fig. 398.

Das Biegungsmoment ist ein Maximum oder Minimum für $x = \frac{l}{2}$, und zwar

$$\overline{MN} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2\right] q;$$

während das Biegungsmoment in $C$ und $D$, $\overline{CL} = \overline{DO} = \frac{1}{2} q l_1^2$ beträgt.

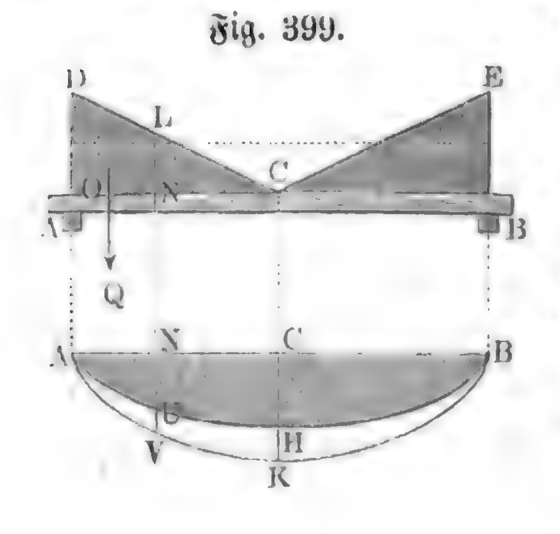
Ist hiernach im ersten Falle, Fig. 397, $\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2 > l_1^2$, oder $\left(\frac{l}{2}\right)^2 > 2 l_1^2$, d. i. $l > l_1 \sqrt{8}$, so fällt $\overline{MN} > \overline{CL}$ aus und man hat das Tragvermögen des Balkens, da sich $q = \frac{Q}{l + 2 l_1}$ setzen läßt:

$$\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2\right] \frac{Q}{2(l + 2 l_1)} = \frac{WT}{e}, \text{ wogegen}$$

$$\frac{Q l_1^2}{2(l + 2 l_1)} = \frac{WT}{e} \text{ zu setzen ist, wenn } l < l_1 \sqrt{8} \text{ ausfällt.}$$

**Ungleichförmig belastete Balken.** Wenn ein Balken $AB$, Fig. 399, ungleichförmig, jedoch so belastet ist, daß die Last auf den laufenden Fuß Balkenlänge mit der Entfernung von der Balkenmitte $C$ nach den Enden zu gleichmäßig wächst, so finden folgende statischen Verhältnisse statt. §. 249

Fig. 399.




Ist $l = AB = 2\,CA = 2\,CB$, die Länge des Balkens, zwischen den Stützpunkten $A$ und $B$ gemessen, $q$ das Gewicht der Last pro Flächeneinheit Querschnitt, und $\varrho$ der Neigungswinkel $ACD = BCE$ der Begrenzungsebenen $CD$ und $CE$ der Last, so hat man das Gewicht eines Lastprismas $ACD$

$= BCE$, welches von einem Stützpunkte getragen wird,

$$\frac{Q}{2} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}\,.\,\overline{AD}\,.\,q = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 tang.\,\varrho\,.\,q = \frac{1}{8}\,q\,l^2\,tang.\,\varrho,$$

und folglich das Moment dieser Kraft in Hinsicht auf einen Punkt $N$, welcher um $AN = x$ vom Stützpunkte $A$ absteht,

$$y_1 = \frac{Q}{2}\cdot x = \frac{1}{8}\,q\,l^2\,x\,tang.\,\varrho.$$

Das Gewicht des Lastprismas über $AN = x$ ist $q\left(\frac{AD + NL}{2}\right) AN$, und der Schwerpunkt desselben steht von $N$ um $NO = \frac{2\,AD + NL}{AD + NL}\cdot\frac{AN}{3}$ ab, folglich ist das Moment dieses Prismas in Hinsicht auf $N$:

$$y_2 = q\,(2\,AD + NL)\,\frac{\overline{AN}^2}{6} = q\left[l\;tang.\,\varrho + \left(\frac{l}{2} - x\right) tang.\,\varrho\right]\frac{x^2}{6}$$

$$= \frac{q\,x^2}{6}\;tang.\,\varrho\;(\tfrac{3}{2}\,l - x),$$

und das ganze Biegungsmoment des Balkens in $N$:

$$\overline{NU} = y = y_1 - y_2 = \frac{q\;tang.\,\varrho}{24}\,(3\,l^2 x - 6\,l\,x^2 + 4\,x^3)$$

$$= \frac{q\,x\;tang.\,\varrho}{24}\,(3\,l^2 - 6\,l\,x + 4\,x^2) = \frac{q}{6}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - x_1^3\right] tang.\,\varrho,$$

wenn man $CN = x_1 = \frac{l}{2} - x$ setzt, also die Abscisse $x_1$ von $C$ aus mißt.

Dasselbe ist für $x = \frac{l}{2}$ ein Maximum, und zwar $\frac{q\,l^3}{48}\,tang.\,\varrho$, daher ist auch das **Tragvermögen** dieses Balkens:

$$\frac{q\,l^3}{48}\;tang.\,\varrho\,,\ \text{d. i.}\ \frac{Q\,l}{12} = \frac{W\,T}{e},$$

während bei gleichmäßiger Belastung das Biegungsmoment

$$\overline{NV} = y_0 = \frac{q\,l\,x}{2} - \frac{q\,x^2}{2} = \frac{q\,x}{2}\,(l - x) = \frac{q}{2}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x_1^2\right]$$

$$= \frac{Q}{2\,l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x_1^2\right]\ \text{ist,}$$

und daher das Tragvermögen $\frac{Q\,l}{8} = \frac{W\,T}{e}$ folgt.

§. 250 **Zweifach belasteter Balken.** Wenn ein an beiden Enden frei aufliegender Balken $AB$, Fig. 400 und Fig. 401, in einem Punkte $C$, welcher von den Stützpunkten $A$ und $B$ um $CA = l_1$ und $CB = l_2$ absteht, eine Last $P$ und überdies noch eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = q\,l$ trägt, so nehmen die Stütz-

punkte $A$ und $B$ die Lasten $R_1 = \frac{l_2 P}{l} + \frac{Q}{2}$, und $R_2 = \frac{l_1 P}{l} + \frac{Q}{2}$ auf, und es ist das Biegungsmoment in einem Punkte $N$, welcher um $AN = x$ vom Stützpunkte $A$ absteht,

$$\overline{NV} = y = R_1 x - \frac{q x^2}{2} = \left(R_1 - \frac{q x}{2}\right) x = \frac{q}{2}\left(\frac{2 R_1}{q} - x\right) x.$$

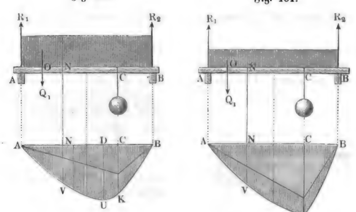



Fig. 400. Fig. 401.

Dieses Moment ist ein Maximum für $\frac{2 R_1}{q} - x = x$, d. i. für $x = \frac{R_1}{q}$, und zwar

$$y = \overline{DU} = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{R_1}{q}\right)^2 = \frac{R_1^2}{2 q} = \frac{1}{2 q}\left(\frac{l_2 P}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 = \frac{l}{2 Q}\left(\frac{l_2}{l} P + \frac{Q}{2}\right)^2.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß $CA > CB$, d. i. $l_1 > l_2$ ist, und $x < l_1$ ausfällt. Ist $x \geqq l_1$, so fällt das Maximum des Biegungsmomentes nach $C$ (Fig. 401) und es folgt

$$y = \overline{CK} = R_1 l_1 - \frac{q l_1^2}{2} = \frac{l_1 l_2}{l} P + \frac{Q l_1}{2} - \frac{Q l_1^2}{2 l} = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{l_1 l_2}{l}.$$

Wenn man

$$x = \frac{R_1}{q} = \left(\frac{l_2 P}{l} + \frac{Q}{2}\right) \frac{l}{Q} = l_1 \text{ setzt, so folgt}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{l_1 - \frac{1}{2} l}{l_2} = \frac{2 l_1 - l}{2 l_2} = \frac{l_1 - l_2}{2 l_2};$$

und es ist das Tragvermögen des Balkens in dem Falle, wenn

$$\frac{P}{Q} < \frac{l_1 - l_2}{2 l_2} \text{ ausfällt,}$$

$$\left(\frac{P l_2}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2\,Q} = \frac{W\,T}{e}$$, und dagegen dann, wenn sich

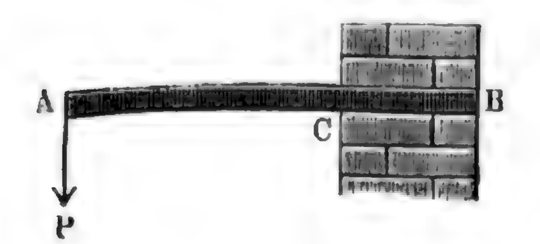
$$\frac{P}{Q} \overline{\gtrless} \frac{l_1 - l_2}{2\,l_2}$$ herausstellt, dasselbe

$$\left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{l_1\,l_2}{l} = \frac{W\,T}{e}$$ zu setzen.

Diese Formeln finden insbesondere ihre Anwendung, wenn man das Gewicht $G$ des Trägers mit in Rechnung bringen will, wo dann $G$ statt $Q$ einzusetzen ist.

§. 251 **Der Brechungsquerschnitt.** In den bisher behandelten Fällen der Biegung der Körper $A\,B$, Fig. 402, haben wir immer eine prismatische Form derselben, und folglich auch ein constantes Biegungsmoment $W\,E$ vorausgesetzt, weshalb wir mittels der Grundformel (aus §. 215)

Fig. 402.



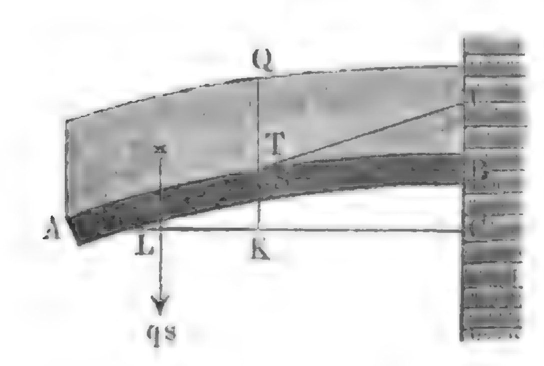

$$P\,x\,r = W\,E$$

schließen können, daß der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{W\,E}{P\,x}$$

umgekehrt, und daher die Biegung selbst direct dem Momente $(P\,x)$ der auf den Körper von außen wirkenden Kraft $P$ proportional ist und folglich auch die Biegung mit $P\,x$ zugleich ein Maximum und Minimum wird. Ist daher die Kraft $P$ constant, oder wächst dieselbe mit $x$ (wie z. B. $Q = q\,x$, in dem Fig. 403 abgebildeten Falle), so nimmt die Biegung mit $x$ ab und zu, und ist auch mit $x$ zugleich ein Maximum und Minimum. Wenn hingegen der Querschnitt $F$ des Körpers an verschiedenen Stellen seiner Axe verschieden ist, so fällt natürlich auch $W = \Sigma\,(F\,z^2)$ veränderlich aus, und dann ist der Krümmungshalbmesser $r$ dem Quotienten $\frac{W}{P\,x}$, und also die Krümmung selbst dem Ausdrucke $\frac{P\,x}{W}$ proportional. Kommt es

Fig. 403.




folglich darauf an, die Stellen der stärksten und schwächsten Biegungen zu finden, so hat man nur diejenigen Werthe für die Axenlänge $x$ zu bestimmen, bei welchen der Ausdruck $\frac{P\,x}{W}$ zum Maximum und zum Minimum wird.

Ebenso ist der Formel

$$S = \frac{Pxe}{W}$$

aus §. 235 zufolge die Spannung $S$ eines Körpers dem Ausdruck $\frac{Pxe}{W}$ proportional, und mit demselben ein Maximum oder Minimum.

Bei einem prismatischen Körper ist $\frac{W}{e}$ eine constante Zahl, und folglich diese Maximalspannung $S$ nur dem Kraftmomente $Px$ proportional; bei Körpern von veränderlichem Querschnitte, wo $\frac{W}{e}$ eine veränderliche Zahl ist, hängt dagegen diese Spannung auch noch mit von diesem Quotienten ab; im ersteren Falle ist diese Spannung mit $Px$ zugleich, also bei einer in einem Punkte angreifenden Kraft $P$ und bei einer auf $x$ gleichmäßig vertheilten Last $Q = qx$, für $x = l$, ein Maximum; im zweiten Falle läßt sich hingegen dieses Maximum von $S$ ohne nähere Kenntniß der Veränderlichkeit des Querschnittes im Voraus nicht angeben. Um diese Stelle oder den Querschnitt des Balkens zu finden, wo die Maximalspannung vorkommt, ist es nöthig, das Maximum von dem Ausdrucke $\frac{Pxe}{W}$ algebraisch zu bestimmen. Jedenfalls ist die Stelle im Körper, wo diese Maximalspannung vorkommt, auch diejenige, wo bei hinreichender Belastung die Spannung $S$ zuerst in $T$ oder gar in $K$ übergeht, und folglich zunächst die Elasticitätsgrenze erreicht wird oder das Zerbrechen eintritt. Man nennt deshalb auch den dieser Stelle des Maximalwerthes von $\left(\frac{Pxe}{W}\right)$ entsprechenden Querschnitt des Körpers den Brechungsquerschnitt (franz. section de rupture; engl. section of rupture) oder auch den gefährlichen (schwachen) Querschnitt.

Hat der Körper einen rectangulären Querschnitt mit der veränderlichen Breite $u$ und der veränderlichen Höhe $v$, so ist

$$\frac{W}{e} = \frac{u v^2}{6},$$

und daher der schwache Querschnitt durch das Maximum von $\frac{Px}{u v^2}$ oder das Minimum von $\frac{u v^2}{Px}$ bestimmt. Bei einem Körper mit elliptischem Querschnitte, dessen veränderliche Halbaxen $u$ und $v$ sind, hat man:

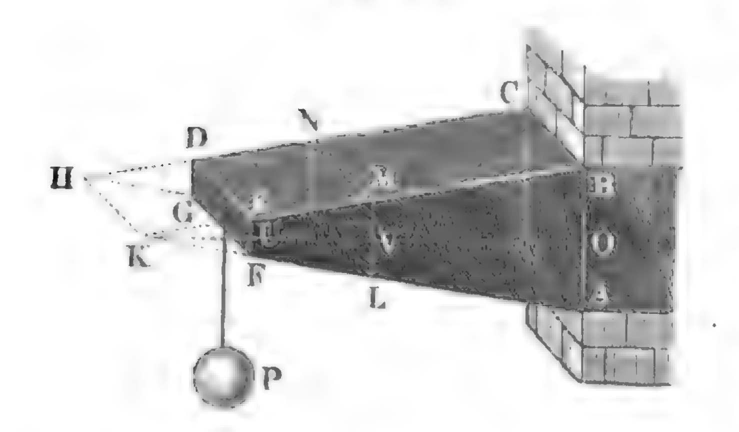
$$\frac{W}{e} = \frac{\pi u v^2}{4},$$

und daher wieder das Minimum von $\frac{u v^2}{P x}$ aufzusuchen, wenn es darauf ankommt, die schwache Stelle des Körpers zu bestimmen.

Bei constantem Gewichte kommt $P$ ganz außer Betracht, ist also bloß das Minimum von $\frac{u v^2}{x}$ zu ermitteln, ist dagegen das Gewicht $Q = q x$, also gleichmäßig auf den Balken vertheilt, so muß man das Minimum von $\frac{u v^2}{x^2}$ bestimmen, um den Brechungsquerschnitt zu finden.

§. 252 Bildet der Körper $ACDF$, Fig. 404, einen abgestumpften Keil, oder ein liegendes Prisma mit trapezoidaler Seitenfläche $ABEF$, dessen unveränderliche Breite $BC = DE = b$ ist, und wirkt die Kraft $P$ an dem Ende $DF$ desselben, so hat man nur das Minimum von $\frac{v^2}{x}$ zu ermitteln, um den schwachen Querschnitt desselben zu finden. Setzen wir die Höhe $DG = EF$ seiner Endfläche $= h$ und die Höhe $KU$ des Ergänzungsstückes $HKU$, $= c$, und nehmen wir unserer seitherigen Bezeichnung entsprechend an, daß der Brechungsquerschnitt $LMN$ um $UV = x$ von der Endfläche $DEF$ abstehe, so haben wir die Höhe desselben:

Fig. 404.




$$ML = v = h + \frac{x}{c} h = h \left(1 + \frac{x}{c}\right),$$

und daher nur das Minimum des Ausdruckes:

$$\frac{v^2}{x} = \frac{h^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)^2 = h^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{c} + \frac{x}{c^2}\right),$$

oder, da $h$ und $c$ bestimmt sind, nur von $\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}$ zu ermitteln.

Nimmt man $x = c$ an, so ergiebt sich der letzte Ausdruck $= \frac{2}{c}$, macht man aber $x$ wenig (um $x_1$) größer oder kleiner, so erhält man:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c \pm x_1} = \frac{1}{c\left(1 \pm \frac{x_1}{c}\right)} = \frac{1}{c}\left(1 \mp \frac{x_1}{c} + \frac{x_1^2}{c^2}\right) \text{ und}$$

$$\frac{x}{c^2} = \frac{c \pm x_1}{c^2} = \frac{1}{c} \pm \frac{x_1}{c^2},$$

folglich

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2} = \frac{2}{c} + \frac{x_1^2}{c^3},$$

also jedenfalls größer als $\frac{2}{c}$. Es giebt also $x = c$ das gesuchte Minimum, d. i. der schwache Querschnitt $LMN$ steht um die Höhe $KU = c$, nämlich eben so viel von der Endfläche $DEF$ ab, als die abgeschnittene Kante $HK$ auf der anderen Seite.

Die Höhe dieses schwachen Querschnittes ist

$$v = h + \frac{h}{c} \cdot c = 2h,$$

und folglich die Tragkraft dieses Körpers:

$$P = \frac{b\,(2\,h)^2}{c} \cdot \frac{T}{6} = \frac{4\,b\,h^2}{c} \cdot \frac{T}{6}.$$

Ein parallelepipedischer Balken hat bei gleicher Länge $l = c$, gleicher Breite $b$ und gleichem Volumen $V = b\,h_1\,l$ die Höhe:

$$h_1 = \frac{h + 2\,h}{2} = {}^3/_2\,h,$$

und folglich die Tragkraft:

$$P = \frac{b\,h_1^2}{c} \cdot \frac{T}{6} = \frac{9}{4}\,\frac{b\,h^2}{c} \cdot \frac{T}{6},$$

trägt also nur $^9/_{16}$ mal so viel als der behandelte keilförmige Körper.

Ist der Körper eine abgekürzte Pyramide, so schneiden sich die Ebenen $AE$, $BD$ u. s. w. gehörig erweitert, in einer Spitze, und wenn man die Höhe der abgeschnittenen oder Ergänzungspyramide wieder mit $c$ bezeichnet, so ist:

$$MN = u = b\left(1 + \frac{x}{c}\right) \text{ und } LM = v = h\left(1 + \frac{x}{c}\right);$$

und man hat daher das Minimum von

$$\frac{u\,v^2}{x} = \frac{b\,h^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)^3$$

oder von

$$\frac{1}{x} + \frac{3\,x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}$$

zu ermitteln, um den Brechungsquerschnitt zu finden. Durch Differenzialrechnung findet man

$$x = {}^1/_2\,c,$$

auch kann man sich leicht von der Richtigkeit dieses Werthes überzeugen, wenn man einmal $x = \frac{1}{2}c + x_1$ und ein anderes Mal $\frac{1}{2}c - x_1$ setzt. In jedem Falle erhält man einen größeren Werth als

$$\frac{2}{c} + \frac{3}{2c} + \frac{1}{4c} = \frac{15}{4c},$$ welchen der Ausdruck:

$$\frac{1}{x} + \frac{3x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}$$

für $x = \frac{1}{2}c$ annimmt. Es ist also der Abstand der Brechungsfläche $LN$ von der Endfläche $DF$ gleich der Hälfte der Höhe $c$ des Ergänzungsstückes der abgestumpften Pyramide. Die Dimensionen dieser Fläche sind:

$$u = b\,(1 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}b \text{ und } v = \tfrac{3}{2}h,$$

folglich ist die gesuchte Tragkraft des Balkens:

$$P = \frac{\frac{3}{2}b\,(\frac{3}{2}h)^2}{\frac{1}{2}c}\,\frac{T}{6} = \frac{27}{4}\,\frac{bh^2}{c}\,\frac{T}{6}.$$

Für einen Körper in Form eines abgekürzten Kegels hat man bei dem Halbmesser $r$ seiner Endfläche und der Höhe $c$ des abgeschnittenen Stückes, den Halbmesser der Brechungsfläche, $r_1 = \frac{3}{2}r$, und daher:

$$P = \frac{27}{4} \cdot \frac{\pi r^3}{c} \cdot \frac{T}{4}.$$

§. 253 **Körper von gleichem Widerstande.** Wenn ein Körper so gebogen wird, daß sowohl die Maximalspannung $S$ auf der Zugseite der neutralen Axe als auch die größte Spannung auf der Druckseite derselben an allen Stellen eine und dieselbe ist, so heißt er ein Körper von gleichem Widerstande (franz. corps d'égale résistance; engl. body of the strongest form). Ein solcher Körper erreicht bei einer gewissen Kraft in allen Querschnitten die Grenze der Elasticität zugleich, hat also an jeder Stelle den der Tragkraft entsprechenden Querschnitt, und erfordert deshalb unter allen Körpern, bei übrigens gleichen Verhältnissen, die kleinste Menge an Stoff. Wegen Ersparniß und zur Vermeidung unnöthiger Belastungen sind daher in dem Bauwesen vorzugsweise solche Körperformen in Anwendung zu bringen. Da die stärkste Spannung in einem Querschnitte durch den Ausdruck

$$S = \frac{Pxe}{W} \text{ (s. §. 251)}$$

bestimmt ist, so fordert ein Körper von gleichem Widerstande, daß die Größe $\frac{Pxe}{W}$ für alle Querschnitte des Körpers eine und dieselbe sei.

Ist die Kraft $P$ const. und greift dieselbe am Ende des Körpers an, so hat man folglich einfacher

$$\frac{e\,x}{W} \text{ oder } \frac{W}{e\,x}$$

constant zu setzen, wogegen dann, wenn die Kraft $Q = q\,x$, also gleichmäßig auf den Balken vertheilt ist,

$$\frac{e\,x^2}{W} \text{ oder } \frac{W}{e\,x^2}$$

constant gefordert werden muß. Bei einem Balken mit rectangulären Querschnitten (s. §. 251), deren Dimensionen $u$ und $v$ sind, ist im ersteren Falle:

$$\frac{u\,v^2}{x}, \text{ und im zweiten:}$$

$$\frac{u\,v^2}{x^2} \text{ constant zu setzen.}$$

Ist an einer anderen Stelle in dem Abstande $l$ von der Endfläche die Breite $b$ und die Höhe $h$, so hat man folglich im ersteren Falle:

$$\frac{u\,v^2}{x} = \frac{b\,h^2}{l},$$

und dagegen im letzteren:

$$\frac{u\,v^2}{x^2} = \frac{b\,h^2}{l^2}$$

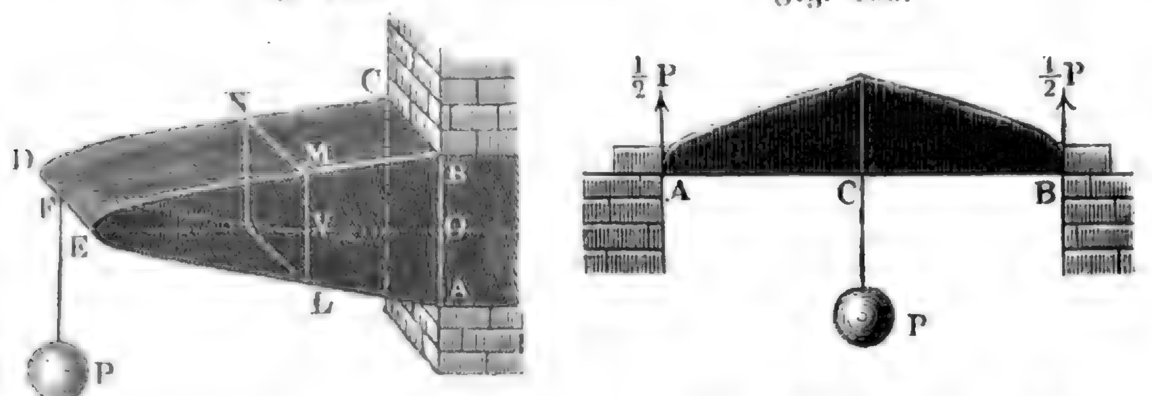
zu fordern. Bei constanter Breite $u = b$ ist daher im ersteren Falle:

$$\frac{v^2}{x} = \frac{h^2}{l}, \text{ d. i.:}$$

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l} \text{ oder } \frac{v}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}.$$

Da die Gleichung $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l}$ einer Parabel zukommt (s. §. 35, Anmerkung), so hat folglich das Längenprofil $A\,B\,E$, Fig. 405, eines solchen

Fig. 405. Fig. 406.

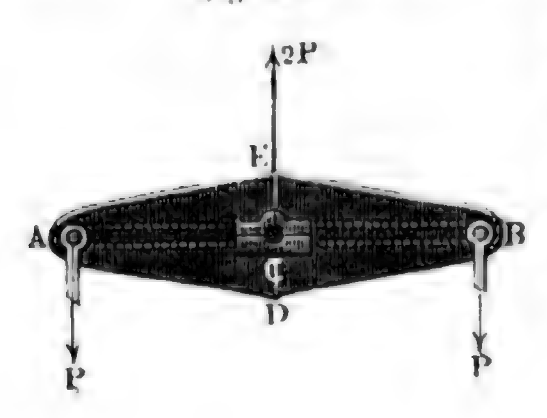



Körpers die Form einer Parabel, und zwar einer Parabel, deren Scheitel $E$ mit dem End- oder Aufhängepunkt der Last $P$ zusammenfällt.

Ruht der Balken $A\,B$, Fig. 406, von gleicher Breite, mit seinen Enden auf, und trägt er die Last $P$ in seiner Mitte, oder wird der Balken $A\,B$,

Fig. 407, in der Mitte $C$ unterstützt und an den Enden $A$ und $B$ durch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte ergriffen, so erhält das Längenprofil die Gestalt von zwei in der Mitte zusammenstoßenden Parabeln. Der letzte Fall kommt bei Balanciers und Wagbalken vor. Da dieselben durch die Zapfenlöcher $A$, $C$, $B$ geschwächt werden, so versieht man sie noch mit Rippen, oder giebt ihnen noch ein Mittelstück $AB$.

Fig. 407.




Ist die Höhe $v = h$ constant, so hat man:

$$\frac{u}{x} = \frac{b}{l} \text{ oder } \frac{u}{b} = \frac{x}{l},$$

dann ist also die Breite $u$ ihrer Entfernung von dem Ende proportional, es bildet deshalb die Horizontalprojection des Balkens $ACE$, Fig. 408, ein Dreieck $BCD$, und der ganze Balken einen Keil mit verticaler, in die Kraftrichtung fallender Schärfe $DE$.

Fig. 408.

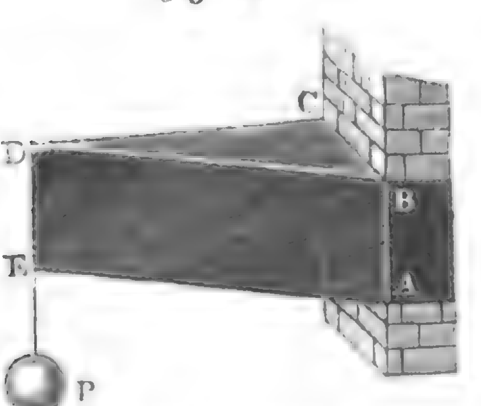
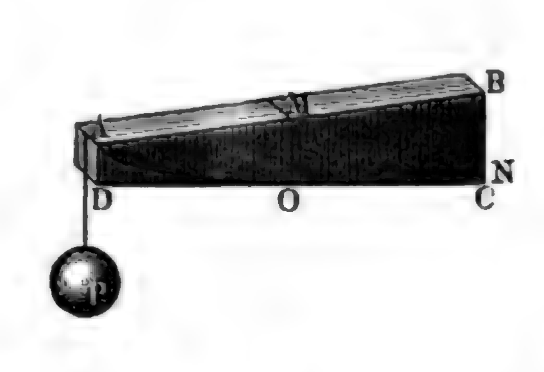



Fig. 409.




Man ersetzt gewöhnlich die parabolischen Träger in Fig. 405 durch ebenflächige Träger, wie $ACB$ in Fig. 409. Um hierbei so viel wie möglich Material zu ersparen, giebt man diesem Träger in der Mitte $M$ dieselbe Höhe $MO = h_m = h\sqrt{1/2}$, welche der parabolische Träger erhalten würde, und führt die ebene Begrenzungsfläche $CD$ tangential an die entsprechende Parabelfläche. Nun ist

$$\frac{BC}{MO} = \frac{3\,AM}{2\,AM} = 3/2, \text{ und } \frac{AD}{MO} = \frac{AM}{2\,AM} = 1/2;$$

daher folgt, wenn man die größere Höhe $BC$ des Körpers durch $h_1$ und die kleinere Höhe $AD$ desselben durch $h_2$ bezeichnet,

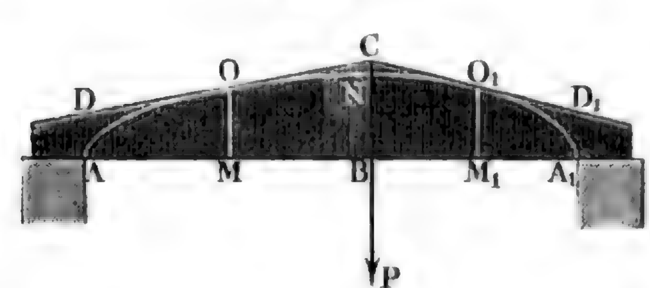
$$h_1 = 3/2\, h_m = 3/2\, h\sqrt{1/2} = 1{,}0607\, h \text{ und}$$

$$h_2 = 1/2\, h_m = 1/2\, h\sqrt{1/2} = 0{,}3536\, h,$$

wobei die Höhe $\overline{BN} = h$ mittels der bekannten Formel $Pl = bh^2 \frac{T}{6}$ zu bestimmen ist.

Das Volumen eines solchen ebenflächigen Trägers ist $\frac{bl\,(h_1 + h_2)}{2}$ $= 0,7071\, b\, l\, h$, wogegen das des parabolischen Trägers von gleichem Widerstande, $= {}^2/_3\, b\, l\, h = 0,667\, b\, l\, h$, d. i. 5,7 Procent kleiner ausfällt.

Fig. 410.

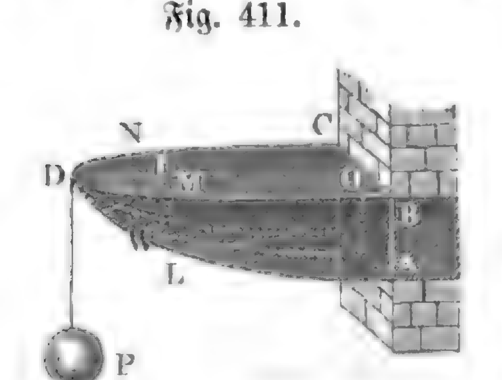



Ebenso kann man den an den Enden $A$ und $B$ unterstützten Träger $A N A_1$, Fig. 410, aus zwei ebenflächigen Stücken zusammensetzen, welche im Aufhängepunkte die gemeinschaftliche Höhe $\overline{BC} = h_1 = 1,0607\, h$ und an den Enden die Höhe $\overline{AD} = \overline{A_1 D_1} = h_0 = 0,3536\, h$ haben; nur ist hier die Höhe $\overline{BN} = h$ durch die Formel

$$\frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{b h^2 T}{6} \text{ zu bestimmen.}$$

§. 254 Soll der Körper $A B D$, Fig. 411, lauter ähnliche Querschnitte $L M N$, $A B C$ u. s. w. haben, so ist zu setzen:

Fig. 411.




$\frac{v}{h} = \frac{u}{b}$, daher:

$$\frac{u \,.\, u^2 h^2}{b^2 x} = \frac{b\, h^2}{l},$$

d. i.:

$$\frac{u^3}{b^3} = \frac{x}{l}, \text{ oder } \frac{u}{b} = \frac{v}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}};$$

dann wachsen also die Breiten und Höhen wie die Cubikwurzeln aus den entsprechenden Hebelarmen. In der achtfachen Entfernung vom Ende ist z. B. die Höhe und Breite nur doppelt so groß als in der einfachen Entfernung.

Man kann diesen Körper durch eine abgekürzte Pyramide $A C E G$, Fig. 412 (a. f. S.), ersetzen, welcher in der halben Länge die Höhe $\overline{MO} = h_m$ $= \sqrt[3]{1/_2} \,.\, h = 0,7937\, h$ und die Breite $\overline{MN} = b_m = \sqrt[3]{1/_2} \,.\, b = 0,7937\, b$ mit dem gefundenen Körper von genau gleichem Widerstande gemeinschaftlich hat. Für den Tangentenwinkel der Curve $\frac{v}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$, oder $v = \frac{h}{\sqrt[3]{l}}\, x^{1/3}$, ist nach analyt. Hülfslehren Art. 10, $tang.\, \alpha = \frac{h}{3\sqrt[3]{l}}\, x^{-2/3} = \frac{h}{3\sqrt[3]{l x^2}}$, daher

folgt für

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\, l\, tang.\alpha = \frac{1}{6}\, h \sqrt[3]{\left(\frac{l}{x}\right)^2} = \frac{1}{6}\, h \sqrt[3]{4} = \frac{h}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$= 0{,}2646\, h$, und ebenso folgt für die Curve

$$\frac{u}{b} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}},\ tang.\beta = \frac{b}{3\sqrt[3]{l^2 x^2}}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{2}\, l\, tang.\beta = \frac{b}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ergeben sich nun die Dimensionen der großen Grundfläche $ABC$:
$AB = h_1 = h_m + \frac{1}{2}\, l\, tang.\alpha = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,.\,h = 1{,}0583\, h$ und
$BC = b_1 = b_m + \frac{1}{2}\, l\, tang.\beta = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,.\,b = 1{,}0583\, b$,
sowie die der kleinen Grundfläche $EFG$:

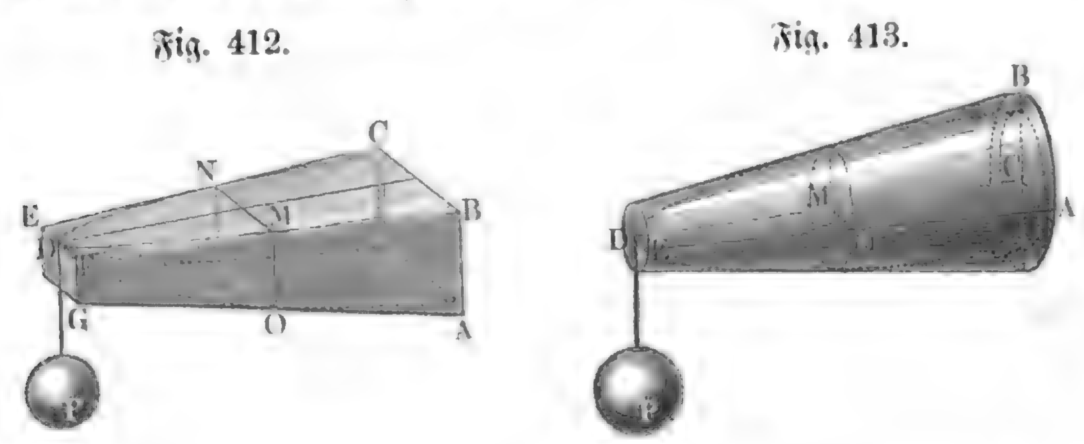



Fig. 412. Fig. 413.

$FG = h_2 = h_m - \frac{1}{2}\, l\, tang.\alpha = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,.\,h = 0{,}5291\, h$ und
$EF = b_2 = b_m - \frac{1}{2}\, l\, tang.\beta = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,.\,b = 0{,}5291\, b$.

Uebrigens ist natürlich $Pl = \frac{b h^2 T}{6}$ zu setzen.

Giebt man dem Körper von gleichem Widerstande **kreisförmige Querschnitte**, so gilt für den veränderlichen Querschnittshalbmesser die Gleichung

$$u = v = z = \sqrt[3]{\frac{x}{l}},$$

und wenn man diesen Körper durch einen **abgekürzten** Kegel $ABE$, Fig. 413, ersetzt, so sind die Halbmesser desselben:
$MO = r_m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,.\,r = 0{,}7937\, r,\ CA = r_1 = 1{,}0583\, r$ und
$DE = r_2 = 0{,}5291\, r$,
und es ist der Halbmesser $r$ der Grundfläche des Körpers von gleichem Widerstande nach der Formel

$$Pl = \frac{\pi r^3}{4} T \text{ zu berechnen.}$$

Ist ein Balken **gleichförmig belastet** und die **Breite unveränderlich**, also $u = b$, so hat man:

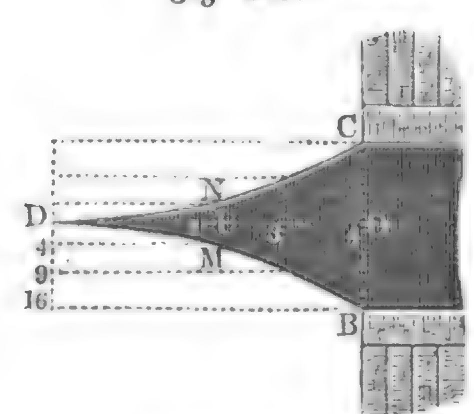
$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x^2}{l^2}, \text{ also auch:}$$

$$\frac{v}{h} = \frac{x}{l},$$

und es erhält deshalb derselbe die Gestalt eines Keiles mit triangulärem Längenprofil $ABD$, Fig. 414.

Fig. 414.

Fig. 415.

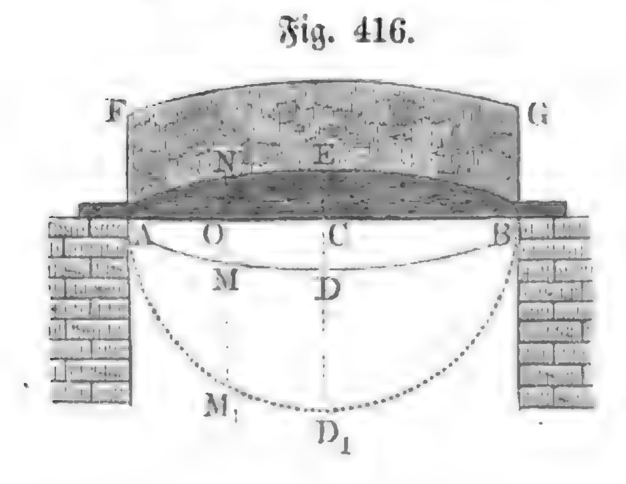



Bei constanter Höhe ist in diesem Falle $\frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2}$, und daher der Grundriß des Balkens eine von umgekehrten Parabelbögen $BD$ und $CD$ begrenzte Fläche $BDC$, wie Fig. 415.

Macht man wieder ähnliche Querschnitte, so ist $\frac{u^3}{b^3} = \frac{v^3}{h^3} = \frac{x^2}{l^2}$, dann hat man es also sowohl im Vertical- als auch im Horizontalprofile mit der cubischen Parabel, bei welcher die Cuben der Ordinaten wie die Quadrate der Abscissen wachsen, zu thun.

Wird ein in beiden Enden aufruhender Körper $AEB$, Fig. 416, gleichförmig und zwar auf den laufenden Fuß durch $q$, also auf die ganze Länge $AB = l$ durch $Q = ql$ belastet, so hat man das Kraftmoment für einen Punkt $O$ in der Entfernung $AO = x$ von einem Stützpunkte $A$:

Fig. 416.




$$\frac{Q}{2} \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2}\,(lx - x^2),$$

dagegen für die Mitte $C$:

$$= \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Ql}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

Nehmen wir einen Körper von unveränderlicher Breite $b$ an, so haben wir zu setzen:

$$b v^2 \cdot \frac{T}{6} = \frac{q}{2}\,(lx - x^2) \text{ und}$$

$$b h^2 \cdot \frac{T}{6} = \frac{q l^2}{8},$$

wenn $h$ die Höhe $CE$ des Körpers in der Mitte bezeichnet, und es folgt nun durch Division:

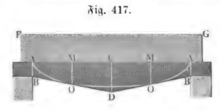
$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{l x - x^2}{\frac{1}{4} l^2}, \text{ oder}$$

$$v^2 = \left(\frac{h}{\frac{1}{2} l}\right)^2 (l x - x^2).$$

Wäre $h = \frac{1}{2} l$, so würde $v^2 = l x - x^2$, und deshalb das Längenprofil der mit $\frac{1}{2} l$ als Halbmesser construirte Kreis $A D_1 B$ sein; weil aber $l x - x^2$ noch durch $\left(\frac{h}{\frac{1}{2} l}\right)^2$ zu multipliciren ist, um das Quadrat $v^2$ der jedesmaligen Höhe $MO = NO$ zu erhalten, so geht dieser Kreis in eine Ellipse $ADB$ oder $AEB$ über, deren Halbaxen $CA = a_1 = \frac{1}{2} l$ und $CD = CE = b_1 = h$ sind.

Man kann diesen Körper durch einen ebenflächigen Träger $AABDB$, Fig. 417, ersetzen, welcher in dem Abstande $AM = \frac{1}{4} l$ von den Stützpunkten $B$ und $B$, die Höhe $MO = h_m = \frac{h}{\frac{1}{2} l} \sqrt{\frac{1}{4} l^2 - \frac{1}{16} l^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot h$ hat. Der Neigungswinkel $\alpha$ der Fläche $BD$ gegen die Axe $AC$ ist durch die Gleichung

Fig. 417.




$$tang. \alpha = \frac{h}{\frac{1}{2} l} \cdot \frac{\frac{1}{2} l - x}{\sqrt{l x - x^2}} = \frac{2 h}{l} \cdot \frac{\frac{1}{4} l}{\sqrt{\frac{3}{16} l^2}} = \frac{2 h}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot h$$

bestimmt; daher folgt $\frac{l}{4} \, tang. \alpha = \frac{1}{6} \sqrt{3} \cdot h$ und die Höhe des Körpers in der Mitte:

$$CD = MO + \frac{l}{4} \, tang. \alpha = \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot h = 1{,}1548 \, h,$$

dagegen die Höhe desselben an den Enden:

$$AB = MO - \frac{l}{4} \, tang. \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot h = 0{,}5774 \, h.$$

(§. 255) Die Biegung eines Körpers von gleichem Widerstande ist natürlich unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen eine größere als die eines prismatischen Balkens. Für den Fall, daß der Balken an einem

Ende festgeklemmt ist und am anderen Ende von einer Kraft $P$ ergriffen wird, bestimmt sich die Durchbiegung wie folgt.

Die bekannte Proportion $\frac{r}{e} = \frac{E}{T}$ führt auf die Formel $r = \frac{E}{T} e$, wodurch der Krümmungshalbmesser als Function des Abstandes $e$ ausgedrückt wird. Ist nun noch die Abhängigkeit zwischen $e$ und $x$ bekannt, so erhält man auf diese Weise einen Ausdruck zwischen $r$ und $x$, aus welchem sich auf die (aus §. 218) bekannte Weise die Coordinatengleichung der entsprechenden elastischen Linie entwickeln läßt. Setzen wir eine kleine Biegung voraus, so können wir wieder die Bogenlänge $s$ der Abscisse $x$, und folglich auch die Elemente $\partial s$ und $\partial x$ einander gleichsetzen und daher, wie oben,

$$r = -\frac{\partial x}{\partial \alpha} \text{ annehmen.}$$

Hiernach erhalten wir:

$$\partial x = -\frac{E}{T} e \, \partial \alpha,$$

und daher durch Integration den Tangentenwinkel:

$$\alpha = -\frac{T}{E} \int \frac{\partial x}{e}.$$

Bei einem Balken mit rectangulärem Querschnitt ist $e = {}^1/_2\, v$, und daher

$$\alpha = -\frac{2\,T}{E} \int \frac{\partial x}{v}.$$

Wäre nun noch die Breite des Balkens constant, also $v = b$, so hätte man:

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l} \text{ (s. §. 253), daher:}$$

$$v = h \sqrt{\frac{x}{l}} \text{ und}$$

$$\alpha = -\frac{2\,T}{E} \cdot \frac{\sqrt{l}}{h} \int x^{-1/2} \partial x = -\frac{2\,T}{E} \cdot \frac{\sqrt{l}}{h} \cdot 2 \sqrt{x} + Con.,$$

also, da für $x = l$, $\alpha =$ Null und folglich $Con. = \frac{2\,T}{E} \frac{\sqrt{l}}{h} \cdot 2 \sqrt{l}$ ist,

$$\alpha = \frac{4\,T}{E} \frac{\sqrt{l}}{h} (\sqrt{l} - \sqrt{x}).$$

Setzt man nun noch $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, so erhält man:

$$\partial y = \frac{4\,T}{E} \frac{\sqrt{l}}{h} (\sqrt{l} - \sqrt{x}) \partial x,$$

und daher die gesuchte Coordinatengleichung:

$$y = \frac{4\,T}{E} \frac{\sqrt{l}}{h} (x \sqrt{l} - {}^2/_3\, x \sqrt{x}) = 4 \frac{T}{E} \frac{\sqrt{l}}{h} (\sqrt{l} - {}^2/_3 \sqrt{x}) x$$

Für $x = l$ geht $y$ in $a$ über; es ist also für diesen Fall die Größe der Durchbiegung:

$$a = \frac{4}{3} \cdot \frac{T l^2}{E h}.$$

Noch ist $P l = b h^2 \cdot \frac{T}{6}$, oder $T = \frac{6 P l}{b h^2}$, daher ergiebt sich endlich die Durchbiegung:

$$a = \frac{8 P l^3}{E b h^3} = 2 \cdot \frac{4 P l^3}{E b h^3},$$

d. i. 2 mal so groß als bei dem parallelepipedischen Balken von der Breite $b$ und Höhe $h$ (vergl. §. 227).

Wirkt die Kraft in der Mitte des Körpers, während der Balken an den beiden Enden aufliegt, so ist natürlich statt $P$, $\frac{P}{2}$, und statt $l$, $\frac{l}{2}$ einzuführen, und es fällt natürlich

$$a = \frac{1}{16} \cdot \frac{8 P l^3}{E b h^3},$$

d. i. sechszehn Mal kleiner aus als bei einseitiger Wirkung der Kraft.

Bei einem Körper von gleichem Widerstande mit triangulärer Basis wie Fig. 408 darstellt, ist die veränderliche Breite $u = \frac{x}{l} b$, und

$$P r x = \frac{u h^3}{12} E = \frac{b h^3 x}{12 l} E,$$

daher der Krümmungshalbmesser $r = \frac{b h^3}{12 l} \frac{E}{P}$ constant, also die Biegungscurve ein Kreis, und die entsprechende Bogenhöhe

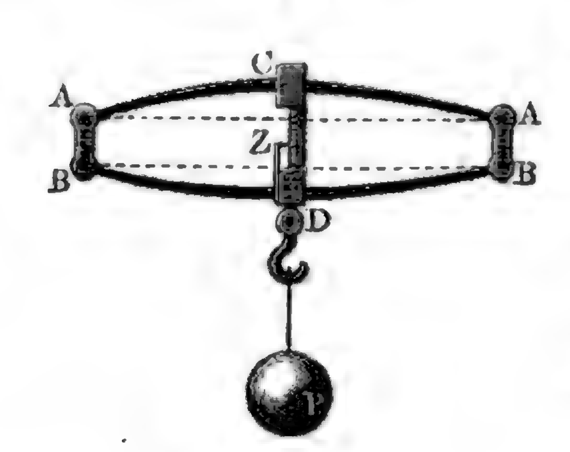
$$a = \frac{l^2}{2 r} = \frac{6 P l^3}{b h^3 E} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4 P l^3}{b h^3 E},$$

d. i. $^3/_2$ mal so groß als bei dem parallelepipedischen Balken.

§. 256 **Biegung der Metallfedern.** Körper von gleichem Widerstande, sowie auch solche, welche sich nach einem Kreise biegen, kommen vorzüglich bei den Stahl- und anderen Metallfedern in Anwendung. Die Federn, welche zu den sogenannten Federdynamometern verwendet werden, bestehen aus dem feinsten Stahl, haben bei einer Länge von $^1/_2$ bis 1 Meter eine Breite von 4 bis 5 Centimeter und in der Mitte eine Dicke von 8 bis 21 Millimeter. Sie bilden Körper von gleichem Widerstande, haben also ein aus zwei Parabeln zusammengesetztes Längenprofil (siehe §. 253). Um die Wirkung derselben zu erhöhen, wird jedes Federdynamometer aus zwei solchen parabolischen Federn, wie $AA$, $BB$, Fig. 418, zusammengesetzt, welche an den Enden durch

Gelenke $AB$, $AB$ verbunden werden. (S. Morin's Leçons de Mécaniques pratique, Résistance des matériaux, No. 198.) Diese Dynamometer messen die an der Fassung $D$ in der Mitte der einen Feder angreifende Kraft $P$ durch den Weg $s$ des Punktes $D$, welcher natürlich gleich ist der Größe der Durchbiegung beider Federn zusammen. Nun ist aber nach dem Obigen:

Fig. 418.




$$a = \frac{1}{16} \frac{8 P l^3}{b h^3 E},$$

daher hat man hier

$$s = 2a = \frac{P l^3}{b h^3 E},$$

und folglich

$$P = \left(\frac{b h^3 E}{l^3}\right) s,$$

die dem Zeigerwege $s$ entsprechende Spannkraft der Feder.

Bei einem Versuche an einem solchen Instrumente, dessen Federn folgende Dimensionen hatten: $b = 0{,}05$, $h = 0{,}0211$, $l = 1{,}0$ Meter, fiel bei der Last $P = 1000$ Kilogramm der Zeigerweg $s = 9{,}7$ Millimeter aus; daher ist für dieses Dynamometer der Coefficient

$$\frac{b h^3 E}{l^3} = \frac{P}{s} = \frac{1000}{9{,}7} = 103{,}09,$$

und für andere Fälle

$$P = 103{,}09\, s \text{ Kilogramm}$$

zu setzen, wenn $s$ in Millimetern angegeben, oder die Zeigerscala in Millimeter eingetheilt ist.

Wenn man statt der parabolischen Federn trianguläre Federn von gleichem Widerstande (s. Fig. 408) anwendet, so ist

$$\frac{s}{2} = a = \frac{1}{16} \cdot \frac{6 P l^3}{b h^3 E}, \text{ daher}$$

$$P = \frac{4}{3} \left(\frac{b h^3 E}{l^3}\right) s,$$

also um ein Drittel größer als bei dem Dynamometer mit parabolischen Federn.

Wagenfedern sollen mit einer großen Biegsamkeit ein großes Tragvermögen verbinden, wogegen die genaue Kenntniß der Beziehung zwischen $P$ und $a$ nicht nöthig ist. Aus diesem Grunde setzt man diese Federn oft aus über einander liegenden einfachen Federn zusammen. Besteht die zusammengesetzte Feder aus $n$ über einander liegenden parallelepipedischen Einzelfedern, so ist bei der Breite $b$, Dicke $h$ und Länge $l$ der-

selben die Höhe des Bogens, welche der Kraft $P$ am Ende $A$ der ganzen Feder entspricht: $a = \frac{4 P l^3}{n E b h^3}$, und die Tragkraft

$$P = n \frac{b h^2}{l} \frac{T}{6}, \text{ daher auch}$$

$$a = {}^2/_3 \frac{T}{E} \frac{l^2}{h}, \text{ oder } \frac{a}{l} = {}^2/_3 \frac{T}{E} \frac{l}{h}.$$

Besteht die ganze Feder $ACD$, Fig. 419, aus $n$ triangulären einfachen Federn, so hat man

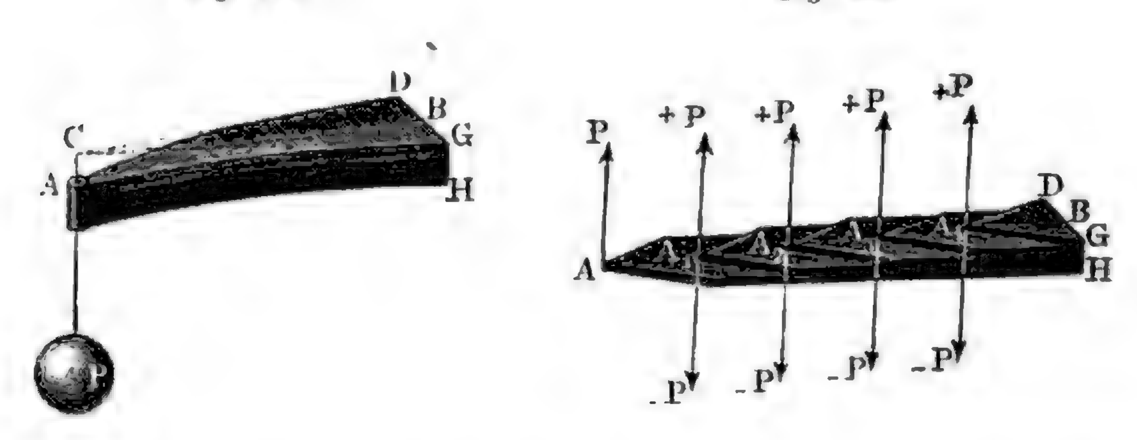
$$a = \frac{6 P l^3}{n E b h^3}, \quad \text{während} \quad P = n \frac{b h^2}{l} \frac{T}{6}$$

unverändert bleibt, daher

$$a = \frac{T}{E} \frac{l^2}{h}, \quad \text{oder} \quad \frac{a}{l} = \frac{T}{E} \frac{l}{h}.$$

Es wächst also in beiden Fällen das Maß $\frac{a}{l}$ der Biegsamkeit mit den Verhältnissen $\frac{T}{E}$ und $\frac{l}{h}$, und ist daher auch ebenso groß wie bei einer einfachen Feder von der $n$fachen Breite $(n b)$.

Fig. 419. Fig. 420.




Um an Material zu ersparen, legt man Federn von verschiedenen Längen über einander und formt sie so, daß sie sich bei Einwirkung der Kraft $P$ am Ende $A$ der ganzen Feder nach Kreisbögen von ganz oder nahe gleichen Halbmessern krümmen. Die Kraft $P$ biegt das unterste trianguläre Stück $A A_1$ der ganzen Feder $ABH$, Fig. 420, dessen Länge $= \frac{l}{n}$ ist, nach einem Kreisbogen vom Halbmesser $r = n \frac{b h^3}{12 l} \cdot \frac{E}{P}$, und damit das übrige parallelepipedische Stück der unteren Feder ebenso gebogen werde, ist nöthig, daß dieselbe in $A_1$ mit der Kraft $P$ auf die folgende Feder drücke, weil dann das

Biegungsmoment dieser Feder gleich ist dem Momente $\frac{Pl}{n}$ eines Kräftepaares $(P, -P)$ mit der Armlänge $\frac{l}{n}$. Bei der zweiten Feder, welche um $\frac{l}{n}$ kürzer ist als die obere, wiederholt sich das Biegungsverhältniß der ersteren Feder; dieselbe biegt sich ebenfalls nach dem Krümmungshalbmesser $r = \frac{n b h^3}{12 l} \cdot \frac{E}{P}$, wenn das Endstück $A_1 A_2$ desselben triangulär, und das übrige Stück parallelepipedisch geformt ist, und wenn es in $A_2$ mit der Kraft $P$ auf die dritte Feder drückt. Ebenso ist es mit der dritten Feder $A_3 G D$ u. s. w., bis zur letzten Feder, bei welcher das parallelepipedische Stück ganz fehlt, und welches in Folge der Kraft $P$ am Ende ebenfalls nach dem obigen Halbmesser $r$ gekrümmt ist. Die ganze Bogenhöhe dieser zusammengesetzten Feder ist $a = \frac{l^2}{2r} = \frac{6 P l^3}{n E b h^3}$, und die Tragkraft $P = n \frac{b h^2}{l} \frac{T}{6}$, daher bleibt

$$a = \frac{T}{E} \frac{l^2}{h}, \quad \text{oder} \quad \frac{a}{l} = \frac{T}{E} \frac{l}{h}.$$

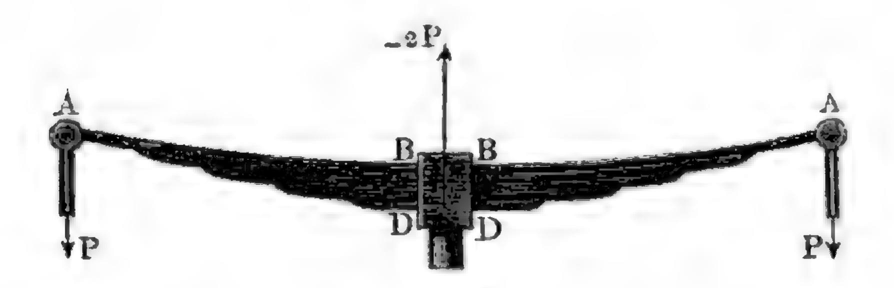
Es sind also hier die Biegungsverhältnisse genau dieselben wie bei dem Federwerke, welches aus lauter gleichen triangulären Einzelfedern zusammengesetzt ist; auch läßt sich leicht nachweisen, daß beide Federverbindungen eine gleiche Menge von Material erfordern.

Es ist übrigens nicht nöthig, die Federenden genau triangulär zu gestalten; man kann dafür auch jede andere Form von gleicher Krümmung anwenden, z. B. denselben eine constante Breite $b$ und im Abstande $x$ vom Ende $A$ die Höhe

$$y = h \sqrt[3]{\frac{n x}{l}} \text{ geben.}$$

Eine solche Doppelfeder stellt Fig. 421 dar. Hier ist natürlich die ganze

Fig. 421.




Tragkraft $2P$, übrigens aber die Länge $l$ nicht von der Mitte, sondern von den Enden $BD$, $BD$ der Fassung aus zu messen.

Anmerkung. Ueber die Wagenfedern ist nachzulesen: F. Reuleaux, die Construction und Berechnung der für den Maschinenbau wichtigsten Federarten. Winterthur 1857; ferner Redtenbacher: die Gesetze des Locomotivenbaues, Mannheim 1855, und Philips: Mémoire sur les ressorts en acier etc. in den Annales des Mines, Tome I, 1852.

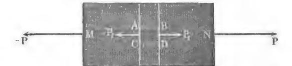
---

## Drittes Capitel.

# Die Wirkung der Schub-Elasticität bei der Biegung und der Drehung der Körper.

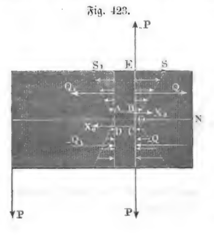
§. 257 **Die Schubkraft parallel zur neutralen Axe.** Bei einem Körper, welcher bloß der Zug- oder Druckkraft ausgesetzt ist, werden die Grundflächen $AC$ und $BD$ eines Körperelementes $ABCD$, Fig. 422, von entgegen-

Fig. 422.




gesetzten und sich das Gleichgewicht haltenden Kräften $P_1$ und $-P_1$ ergriffen, während die Seitenflächen $AB$ und $CD$ desselben frei von äußeren Kräften bleiben, da die benachbarten Körperelemente dieselbe Axenspannung erleiden wie das gedachte Element $ABCD$ selbst. Anders ist es aber bei einem der Biegung unterworfenen Körper, wo auf der einen Seite $AB$ des Elementes $ABCD$ eine Spannung statthat, welche der auf der anderen Seite $CD$ desselben entgegengesetzt ist, und in Folge der seitlichen Cohäsion in $AB$ und $CD$ das Element $ABCD$

Fig. 423.



von einem Kräftepaare ergriffen wird. Am stärksten tritt dieses Kräftepaar bei einem in der neutralen Axe befindlichen Elemente hervor; da hier das Stück des Körpers auf der Seite $AB$ bloß einer Ausdehnung, und dagegen das auf der Seite $CD$ nur einer Compression ausgesetzt ist.

Ist $S$ die Spannung einer Faser in der Entfernung $e$ von der neutralen Axe, bei dem Querschnitte Eins, so sind die Spannungen in den Theilen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ des ganzen Körperquerschnittes, welche um $z_1, z_2, z_3 \ldots$ von der neutralen Axe abstehen:

$$\frac{F_1 z_1}{e} S, \quad \frac{F_2 z_2}{e} S, \quad \frac{F_3 z_3}{e} S \text{ u. s. w.},$$

und es folgt die ganze Spannung im Querschnitte $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$,

$$Q = \frac{S}{e}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots) = \frac{S}{e} \Sigma (F z).$$

Ist nun $F_1 + F_2 + \cdots$ der Theil des Querschnittes auf der einen Seite der neutralen Axe, so giebt auch $Q$ die ganze Spannkraft auf dieser Seite der neutralen Axe an. Die Spannung auf der anderen Seite ist der Theorie des Schwerpunktes zufolge (vergl. §. 215), der ersteren der Größe nach zwar gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt.

Uebrigens hat man nach §. 235, $S = \frac{P x e}{W}$, also $\frac{S}{e} = \frac{P x}{W}$, daher folgt auch $Q = \frac{P x}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots)$.

In einem Querschnitte, welcher um $AB = x_1$ vom ersteren absteht, ist die Spannung

$$Q_1 = \frac{P(x - x_1)}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots);$$

daher ergiebt sich die ganze Kraft, mit welcher das Stück $ABE$ über $AB$ fortzugleiten sucht:

$$Q - Q_1 = \frac{P x_1}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots).$$

Ist nun $b_0$ die Breite des Querschnittes in der neutralen Axe, so folgt daher die Schubkraft längs einer Flächeneinheit in dieser Axe:

$$X_0 = \frac{Q - Q_1}{b_0 x_1} = \frac{P}{b_0 W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots) = \frac{P \Sigma (F z)}{b_0 W}.$$

Damit sich daher der Balken längs der neutralen Axe durch Abschieben nicht trenne, ist $X_0$ = dem Festigkeitsmodul $K$ zu setzen, und damit er dieselbe Sicherheit gegen dieses Abschieben besitze, wie gegen das Zerbrechen, ist nöthig, daß $X_0$ höchstens den Tragmodul $T$ erreiche, daß also

$$T = \frac{P}{b_0\,W}\,\Sigma(Fz), \text{ oder } P = \frac{b_0\,W\,T}{\Sigma(Fz)}, \text{ sowie}$$

$$b_0 = \frac{P}{T\,W}\,\Sigma(Fz) \text{ sei.}$$

Uebrigens ist $\Sigma(Fz)$ auch $= F_1 s_1 = F_2 s_2$, wenn $F_1$ und $F_2$ die Inhalte der zu beiden Seiten der neutralen Axe liegenden Theile des ganzen Querschnittes $F = F_1 + F_2$, und $s_1$, $s_2$ die Abstände der Schwerpunkte dieser Theile von der neutralen Axe bezeichnen.

Für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte $F = bh$ hat man $\Sigma(Fz) = F_1 s_1 = \frac{bh}{2}\cdot\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$, $W = \frac{bh^3}{12}$, und $b_0 = b$, daher

$P = {}^2/_3\, b h T$ und $b_0 = b = {}^3/_2\, \frac{P}{Th}$.

Für einen Träger mit kreisförmigem Querschnitte $F = \frac{\pi d^2}{4}$ ist, da der Schwerpunkt des Halbkreises um $\frac{2}{3\pi} d$ vom Mittelpunkte absteht,

$$\Sigma(Fz) = F_1 s_1 = \frac{\pi d^2}{8}\cdot\frac{2}{3\pi} d = \frac{d^3}{12}, \text{ ferner nach §. 232,}$$

$$W = \frac{\pi d^4}{64}, \text{ und } b_0 = d, \text{ daher}$$

$$P = \frac{\pi d^5}{64\,.\,{}^1/_{12}\,d^3}\,T = \frac{3\pi}{16} d^2 T, \text{ und}$$

$$d = 4\sqrt{\frac{P}{3\pi T}} = 1{,}303\sqrt{\frac{P}{T}}.$$

Ebenso ist für einen Träger mit elliptischem Querschnitte $F = \pi a b$, da hier $W = \frac{\pi a^3 b}{4}$, $F_1 s_1 = \frac{\pi a b}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot{}^2/_3\, a = {}^2/_3\, a^2 b$ und $b_0 = 2b$

ist, $P = {}^3/_4\, \pi a b T$, oder $b = \frac{4}{3\pi}\frac{P}{aT} = 0{,}4244\,\frac{P}{aT}$.

Endlich hat man einen hohlen parallelepipedischen Träger mit dem Querschnitte $F = bh - b_1 h_1$ (Fig. 354, §. 228)

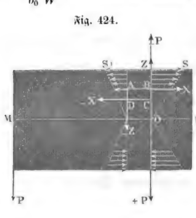
$F_1 s_1 = \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{8}$, $W = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}$ und $b_0 = b - b_1$, daher

$$P = {}^2/_3\,\frac{(b - b_1)\,(bh^3 - b_1 h_1^3)\,T}{bh^2 - b_1 h_1^2}.$$

Die Schubkraft $X$ nimmt ab, je mehr die Fläche derselben von der neutralen Axe absteht, und geht zuletzt am Umfang des Körpers in Null über, wo der Abstand von der neutralen Axe seinen größten Werth $e$ erreicht hat. Die Größe der Schubkraft $X$ in einem gegebenen Abstande $OB = h_1$ von der

neutralen Axe des Körpers $MN$, Fig. 424, giebt die oben gefundene Formel $X = \frac{P\Sigma(Fz)}{b_0 W}$ ebenfalls an, wenn man statt $\Sigma(Fz)$ die Summen der Producte $F_1 z_1$, $F_2 z_2 \dots$ für die auf der einen Seite von $ABCD$ liegenden Flächenelemente $F_1, F_2 \dots$, sowie statt $b_0$ die Breite $b_1$ der Fläche bei dem gegebenen Abstande $h_1$ einsetzt. Die Summe der Producte $F_n z_n$, $F_{n+1} z_{n+1}$ auf der anderen Seite ist übrigens gleich der Summe der Producte $F_1 z_1$, $F_2 z_2 \dots$, weil die Producte derjenigen Flächentheile zu beiden Seiten der neutralen Axe, welche bis zu $\pm h_1$ reichen, sich gegenseitig aufheben.

Fig. 424.




Z. B. für einen Träger mit rectangulärem Querschnitte ist für die Mitten zwischen der neutralen Axe und den Endflächen, also im Abstande $\frac{h}{4}$ von der neutralen Axe:

$$\Sigma(Fz) = F_1 s_1 = \frac{bh}{4} \cdot {}^3/_8\, h = {}^3/_{32}\, b h^2,$$

daher die Schubkraft:

$$X = \frac{P \cdot {}^3/_{32}\, b h^2}{b \cdot \frac{b h^3}{12}} = {}^9/_8 \frac{P}{bh},$$

während sie in der neutralen Axe die Größe $X_0 = {}^3/_2 \frac{P}{bh}$ hat.

§. 258ᵃ. **Die Schubkraft in der Querschnittsfläche.** So wie sich die Druck- oder Zugkräfte der Endflächen eines Balkenelementes $ABCD$, Fig. 424, das Gleichgewicht halten, ebenso sind die zwei Kräftepaare bildenden Schubkräfte desselben mit einander im Gleichgewichte. Ist nun $\xi$ die Länge $AB$, sowie $\zeta$ die Höhe $BC$ des Elementes, so hat man die Schubkräfte längs $AB$ und $CD$, $\xi X$ und $-\xi X$, sowie das Moment des von diesen Kräften gebildeten Paares: $\xi X . \zeta = \xi\zeta X$; und ebenso die Schubkräfte längs $BC$ und $DA$, $\zeta Z$ und $-\zeta Z$, sowie das Moment des von denselben Kräften gebildeten Paares $= \zeta Z . \xi = \xi\zeta Z$; und es ist folglich zur Erhaltung des Gleichgewichtes nöthig, daß $\xi\zeta X = \xi\zeta Z$, d. i. daß $X = Z$ sei.

Es ist also auch die Formel $X = \frac{P \Sigma (F z)}{b W}$ auf die Bestimmung der Schubkraft $Z$ längs der ganzen Querschnittsfläche anwendbar. Sie ist z. B. für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte, bei einem Querschnittselemente in der neutralen Axe, $= {}^4/_3 \frac{P}{b h}$, und in einem solchen, welches $\pm {}^1/_4 h$ von der neutralen Axe absteht, $= {}^9/_8 \frac{P}{b h}$ u. s. w.

Die Summe der Schubkräfte längs des ganzen Querschnittes muß natürlich gleich sein der Kraft $P$, oder wenn mehrere Kräfte rechtwinkelig gegen die Balkenaxe wirken, gleich der Summe $\Sigma(P)$ dieser Kräfte. Dies läßt sich auch wie folgt nachweisen. Theilt man den größten Abstand $e$ der Querschnittselemente von der neutralen Axe in $n$ gleiche Theile, so kann man sich den Querschnitt auf der entsprechenden Seite der neutralen Axe aus den Streifen $b_1 \frac{h}{n}$, $b_2 \frac{h}{n}$, $b_3 \frac{h}{n}$ u. s. w. bestehend denken, welche in Hinsicht auf die neutrale Axe die Momente

$$b_1 \left(\frac{h}{n}\right)^2, \; 2 b_2 \left(\frac{h}{n}\right)^2, \; 3 b_3 \left(\frac{h}{n}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

haben, deren Summe $= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (1 b_1 + 2 b_2 + 3 b_3 + 4 b_4 + \cdots)$ ist.

In Hinsicht auf die Axe, welche um $\frac{h}{n}$ von der neutralen Axe absteht, ist diese Summe der Momente von den Flächenelementen außerhalb dieser Axe

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (2 b_2 + 3 b_3 + 4 b_4 + \cdots),$$

ferner in Hinsicht auf die Axe im Abstande $2 \frac{h}{n}$ ist sie

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (3 b_3 + 4 b_4 + \cdots) \text{ u. s. w.,}$$

und daher ist die Summe aller dieser Summen, bis zum Abstande $e$ gegangen:

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 [b_1 + (2 + 2) b_2 + (3 + 3 + 3) b_3 + \cdots]$$

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 b_n).$$

Es folgt nun die Summe aller Schubkräfte längs des Querschnittes auf einer Seite der neutralen Axe:

$$R_1 = X_1 b^1 \left(\frac{h}{n}\right) + X_2 b_2 \left(\frac{h}{n}\right) + X_3 b_3 \left(\frac{h}{n}\right) + \cdots$$

$$= \frac{P}{W} \frac{h}{n} \cdot \text{ mal die zuletzt gefundene Summe}$$

$$= \frac{P}{W}\left(\frac{h}{n}\right)^3 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 . b_n).$$

Aber es ist auch das Maß des Biegungsmomentes für diese Querschnittshälfte:

$$W_1 = \Sigma(F z^2) = \frac{h}{n}\left[b_1 \left(\frac{h}{n}\right)^2 + b_2 \left(\frac{2\,h}{n}\right)^2 + b_3 \left(\frac{3\,h}{n}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^3 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 . b_n),$$

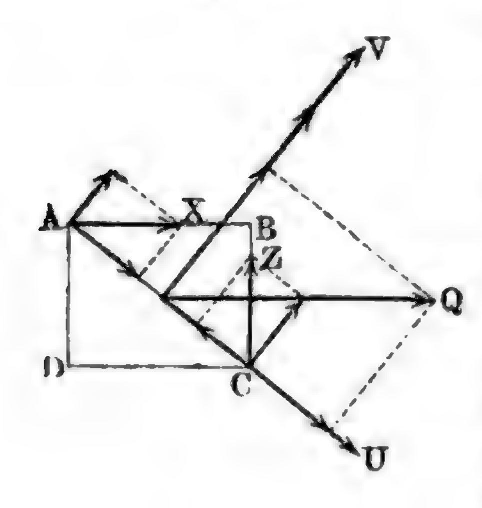
daher folgt die gesuchte Schubkraft längs dieser Fläche:

$$R_1 = \frac{P W_1}{W}.$$

Ebenso findet man auch für die Querschnittshälfte auf der anderen Seite von der neutralen Axe die Schubkraft $R_2 = \frac{P W_2}{W}$, und es folgt so schließlich die Schubkraft des ganzen Querschnitts, $R = \frac{P(W_1 + W_2)}{W} = P$, weil das Biegungsmoment $W$ des ganzen Querschnittes gleich ist der Summe $W_1 + W_2$ von den Biegungsmomenten $W_1$ und $W_2$ der beiden Theile desselben.

**Maximal- und Minimalspannungen.** Aus den verschiedenen Spannungen in einem Querschnitte des gebogenen Körpers lassen sich nun auch durch gewöhnliche Kraftzerlegung und -Zusammensetzung die Spannungen in jedem andern Schnitte desselben bestimmen. Um die Spannungen eines Flächenelementes $AC$, Fig. 425, zu finden, dessen Ebene um den veränderlichen Winkel $BAC = \psi$ von der Längenaxe des Körpers abweicht, zerlegen wir die Spannungen in den Projectionen $AB$ und $BC$ dieses Flächenelementes in je zwei Seitenkräfte, wovon die eine in der Ebene von $AC$ und die andere rechtwinkelig gegen $AC$ wirkt, und vereinigen dann die Seitenkräfte in $AC$ zu einer einzigen Schubkraft, sowie die Seitenkräfte, welche rechtwinkelig gegen $AC$ gerichtet sind, zu einer einzigen Zug- oder Druckkraft. Bei der Breite Eins der Flächenelemente $AB$, $BC$ §. 259

Fig. 425.



und $AC$, ist die Schubkraft längs $AB$, $= \overline{AB}.X$ zu setzen, und in die Seitenkräfte $\overline{AB}.X\cos.\psi$ und $\overline{AB}.X\sin.\psi$ zu zerlegen; und ebenso die Schubkraft längs $BC$, $= \overline{BC}.Z = \overline{BC}.X$ zu setzen, und in die Seitenkräfte

$$-\overline{BC}.X\sin.\psi \text{ und } \overline{BC}.X\cos.\psi \text{ zu zerlegen.}$$

Dagegen giebt die Zugkraft $\overline{BC}.Q = \overline{BC}\cdot\frac{Sz}{e}$, welche rechtwinkelig gegen $\overline{BC}$ gerichtet ist, die Seitenkräfte $\overline{BC}.Q\cos.\psi$ und $\overline{BC}.Q\sin.\psi$, und es folgt nun die ganze Schubkraft längs $AC$, bezogen auf die Einheit der Fläche:

$$U = (\overline{AB}.X.\cos.\psi + \overline{BC}.X\sin.\psi + \overline{BC}.Q\cos.\psi) : AC,$$

so wie die Zugkraft rechtwinkelig gegen $AC$, pro Flächeneinheit:

$$V = (\overline{AB}.X\sin.\psi + \overline{BC}.X\cos.\psi + \overline{BC}.Q\sin.\psi) : AC.$$

Nun ist aber $\frac{AB}{AC} = \cos.\psi$ und $\frac{BC}{AC} = \sin.\psi$, daher folgt auch

$$U = X(\cos.\psi)^2 - X(\sin.\psi)^2 + Q\sin.\psi\cos.\psi \text{ und}$$

$$V = 2X\sin.\psi\cos.\psi + Q(\sin.\psi)^2, \text{ oder, da}$$

$$(\cos.\psi)^2 - (\sin.\psi)^2 = \cos.2\psi \text{ und } 2\sin.\psi\cos.\psi = \sin.2\psi \text{ ist,}$$

$$U = X\cos.2\psi + \tfrac{1}{2}Q\sin.2\psi = X\cos.2\psi + \frac{Sz}{2e}\sin.2\psi,$$

und

$$V = X\sin.2\psi + Q(\sin.\psi)^2 = X\sin.2\psi + \frac{Sz}{2e}(1-\cos.2\psi).$$

Natürlich geben die Spannungen der Flächen $AD$ und $CD$, welche in Vereinigung mit den Flächen $AB$ und $BC$ das Körperelement $ABCD$ völlig begrenzen, gleiche und entgegengesetzte Schub- und Zugkräfte. Dagegen ist für ein solches Körperelement auf der Druckseite von der neutralen Axe, $Q$ negativ, und daher

$$U = X\cos.2\psi - \tfrac{1}{2}Q\sin.2\psi = X\cos.2\psi - \frac{Sz}{2e}\sin.2\psi, \text{ und}$$

$$V = X\sin.2\psi - \tfrac{1}{2}Q(1-\cos.2\psi) = X\sin.2\psi - \frac{Sz}{2e}(1-\cos.2\psi).$$

Um nun diejenigen Werthe des Neigungswinkels $\psi$ zu finden, bei welchem sowohl die Schubkraft $U$ als auch die Normalkraft $V$ zum Maximum oder Minimum wird, setzen wir statt $2\psi$, $2\psi + \mu$, wo $\mu$ einen sehr kleinen Zuwachs von $2\psi$ bezeichnet, und machen dann die Bedingung, daß dadurch der entsprechende Werth von $U$ oder $V$ nicht geändert werde. Für

$U = X\cos.2\psi + \tfrac{1}{2}Q\sin.2\psi$, erhält man so einen zweiten Werth

$$U_1 = X\cos.(2\psi+\mu) + \tfrac{1}{2}Q\sin.(2\psi+\mu)$$

$$= X(\cos.2\psi\cos.\mu - \sin.2\psi\sin.\mu) + \tfrac{1}{2}Q(\sin.2\psi\cos.\mu$$

$$+ \cos.2\psi\sin.\mu), \text{ oder, da } \cos.\mu = 1 \text{ gesetzt werden kann:}$$

$U_1 = X\,cos.\,2\,\psi + {}^1/_2\,Q\,sin.\,2\,\psi - (X\,sin.\,2\,\psi - {}^1/_2\,Q\,cos.\,2\,\psi)\,sin.\,\mu$
wenn man nun $U_1 = U$ setzt, so muß $X\,sin.\,2\,\psi - {}^1/_2\,Q\,cos.\,2\,\psi = 0$ und daher

$$sin.\,2\,\psi = \frac{Q}{2\,X}\,cos.\,2\,\psi, \text{ d. i.:}$$

$$tang.\,2\,\psi = \frac{Q}{2\,X} = \frac{S\,z}{2\,X\,e} \text{ sein.}$$

Auch folgt hiernach

$$sin.\,2\,\psi = \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4\,X^2}} = \frac{S\,z}{\sqrt{(S\,z)^2 + (2\,X\,e)^2}}, \text{ sowie}$$

$$cos.\,2\,\psi = \frac{2\,X}{\sqrt{Q^2 + 4\,X^2}} = \frac{2\,X\,e}{\sqrt{(S\,z)^2 + (2\,X\,e)^2}},$$

und endlich der gesuchte Maximalwerth der Schubkraft $U$:

$$U_m = \frac{2\,X^2 + {}^1/_2\,Q^2}{\sqrt{Q^2 + 4\,X^2}} = \sqrt{({}^1/_2\,Q)^2 + X^2} = \sqrt{\left(\frac{S\,z}{2\,e}\right)^2 + X^2}.$$

In der neutralen Axe ist $Q = 0$, daher $U_m = X_0$, und $tang.\,2\,\psi = 0$, d. i. $2\,\psi = 0$ und $180^0$, oder $\psi = 0$ und $90^0$; für die entfernteste Faser ist dagegen $X = 0$, und $z = e$, daher $U_m = \frac{Q}{2} = \frac{S}{2}$ und $tang.\,2\,\psi = \infty$, also $2\,\psi = 90^0$ und $\psi = 45$ Grad.

Von der neutralen Axe allmälig bis zur äußersten Faser gegangen, ändern sich folglich die Neigungswinkel für die Maximalspannungen allmälig von 0 und 90 Grad in solche von 45 Grad um, und geht die Maximalspannung allmälig aus $X_0$ in $\frac{S}{2}$ über.

Damit diese Spannung nicht größer als die nach der Formel $S = \frac{P\,x\,e}{W}$ zu berechnende und dem Tragmodul $T$ gleichzusetzende Axenspannung $S$ ausfalle, muß folglich $X_0$ höchstens $= S$, oder vielmehr

$$\frac{P\,\Sigma\,(F\,z)}{b_0\,W} < \frac{P\,x\,e}{W}, \text{ d. i. } \frac{\Sigma\,(F\,z)}{b_0} < x\,e \text{ sein.}$$

Setzt man ebenso in $V = X\,sin.\,2\,\psi + \frac{Q}{2}\,(1 - cos.\,2\,\psi)$, $\psi + \mu$ statt $\psi$ ein und nimmt auch wieder $cos.\,\mu = 1$ an, so erhält man:

$$V_1 = X\,(sin.\,2\,\psi\,cos.\,\mu + cos.\,2\,\psi\,sin.\,\mu) + \frac{Q}{2}(1 - cos.\,2\,\psi\,cos.\,\mu$$
$$+ sin.\,2\,\psi\,sin.\,\mu) = X\,sin.\,2\,\psi + \frac{Q}{2}(1 - cos.\,2\,\psi)$$
$$+ \left(X\,cos.\,2\,\psi + \frac{Q}{2}\,sin.\,2\,\psi\right) sin.\,\mu,$$

und damit nun $\psi$ auf ein Maximum oder Minimum von $V$ führe, muß $V_1 = V$, also $X \cos. 2\psi + \frac{Q}{2} \sin. 2\psi = 0$, d. i.:

$$tang. 2\psi = -\frac{2X}{Q} = -\frac{2Xe}{Sz}, \text{ sowie}$$

$$sin. 2\psi = \mp \frac{2X}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} \text{ und } cos. 2\psi = \pm \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} \text{ sein.}$$

Das entsprechende Minimum von $V$ ist

$$V_n = -\frac{2X^2}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} + \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}}\right) = \frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + X^2}$$

$$= \frac{Sz}{2e} - \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2},$$

und dagegen das des Maximum:

$$V_m = \frac{2X^2}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} + \frac{Q}{2}\left(1 + \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}}\right) = \frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + X^2}$$

$$= \frac{Sz}{2e} + \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2}.$$

Es ist zu fordern, daß $V_m$ höchstens gleich dem Tragmodul $T$ gleich also

$$\frac{Sz}{2e} + \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2} < T \text{ sei.}$$

In der neutralen Axe ist $Q = 0$, daher $tang. 2\psi = -\infty$, also $2\psi = 270^0$, und $\psi = 135$ oder 45 Grad, und $V_n = -X_0$, dagegen $V_m = +X_0$; in der entferntesten Faser ist dagegen $X = 0$, und $Q = S$, daher $tang. 2\psi = 0$, also $2\psi = 0$ oder $180^0$, und $\psi = 0$ oder $90^0$; und $V_n = 0$, dagegen $V_m = S$. Bei den gewöhnlichen Balken oder Trägern wächst also die Maximalspannung $V_m$ allmälig von $X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{bW}$ bis $S = \frac{Pxe}{W}$, während man von der neutralen Axe aus allmälig bis zur äußersten Faser fortschreitet.

Für einen parallelepipedischen Balken ist $\Sigma(Fz) = \frac{bh^2}{8}$, $W = \frac{bh^3}{12}$, $b_0 = b$ und $e = \frac{h}{2}$, daher sind die Grenzwerthe $X_0 = {}^3/_2 \frac{P}{bh}$ und $S = \frac{6Px}{bh^2}$; allgemein ist aber

$$X = \frac{P\left(\frac{h}{2} - z\right)\left(\frac{h}{2} + z\right)}{2\,W} = \frac{6\,P}{b\,h^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right] \text{ und } \frac{S\,z}{e} = \frac{12\,P\,x\,z}{b\,h^3},$$

daher:

$$V_m = \frac{6\,P\,x\,z}{b\,h^3} + \sqrt{\left(\frac{6\,P\,x\,z}{b\,h^3}\right)^2 + \left(\frac{6\,P}{b\,h^3}\right)^2\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]^2}$$

$$= \frac{6\,P}{b\,h^3}\left[x\,z + \sqrt{(x\,z)^2 + \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right)^2}\right], \text{ z. B. für } z = {}^1/_4\,h,$$

$$V_m = \frac{3\,P}{2\,b\,h^2}\left[x + \sqrt{x^2 + ({}^3/_4)^2 h^2}\right], \text{ und für } x = 0,$$

$$V_m = \frac{9\,P}{8\,b\,h}, \text{ u. s. w.}$$

Ist ein solcher Balken $A\,B$, Fig. 426, an einem Ende $B$ eingemauert, so lassen sich die Richtungen der größten und kleinsten Normalkräfte $V_m$ und $V_n$ durch zwei Liniensysteme darstellen, welche die neutrale Axe unter 45 Grad und die Endfasern sowie auch sich selbst unter 90 Grad schneiden. Die Curven, welche unten concav sind, entsprechen den Zug-, dagegen diejenigen, welche oben concav sind, den Druckkräften. Die steileren Enden einer jeden Curve entsprechen den Minimal-, dagegen die flacheren Enden den Maximalkräften. An den Enden bei $D$ und $D_1$ sind diese Spannkräfte zu Null geworden, wogegen sie an den Enden $C$ und $C_1$ den allergrößten Werth haben.

Fig. 426.

**Einfluss der Schubfestigkeit auf die Tragkraft der Balken.** §. 260
Die Tragfähigkeit eines Balkens fordert nicht allein, daß die Spannung $S = \frac{P\,x\,e}{W}$ in der äußersten Faser, sondern auch, daß die Schubkraft $X_0 = \frac{P\,\Sigma(F\,z)}{b_0\,W}$ in der neutralen Axe den Tragmodul $T$ nicht übertreffe. Welche Momente in den gewöhnlich vorkommenden Fällen statt $P\,x$ in dem Ausdrucke für $S$ einzusetzen sind, ist im vorigen Capitel vielfach gezeigt worden; es bleibt daher nur noch anzugeben übrig, welche Kraftwerthe man in den gewöhnlich vorkommenden Fällen statt $P$ im Ausdrucke für $X_0$ einzuführen hat.

Wenn der Balken an einem Ende festgehalten und am anderen Ende von einer Kraft $P$ ergriffen wird, so findet $P$ in der Formel $X_0 = \frac{P\,\Sigma(F\,z)}{b_0\,W}$ seine unmittelbare Anwendung; trägt aber der Balken außerdem eine gleichmäßig vertheilte Last, welche pro Längeneinheit die Größe $q$ hat, so ist in

diesem Ausdrucke statt $P$, $P + qx$, und insbesondere $P + ql$ einzusetzen, wenn es darauf ankommt, den größten Werth von $X_0$ zu bestimmen. Liegt dagegen der Balken an beiden Enden frei auf, und trägt in den Abständen $l_1$ und $l_2 = l - l_1$ von den Stützpunkten eine Last $P$, so ist für das eine Balkenstück $\frac{l_2}{l}P$, und für das andere $\frac{l_1}{l}P$ statt $P$ in die Formel für $X_0$ zu setzen, um die Schubkraft in der neutralen Axe zu finden. Ist dagegen dieser Balken mit $ql$ gleichmäßig belastet, so trägt jede Stütze $\frac{ql}{2}$ und es ist die Schubkraft $P$ des ganzen Balkenquerschnittes an einer Stelle, welche um $x$ von einem Stützpunkte abweicht, $P = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$. Dieselbe fällt in der Mitte, wo $x = \frac{l}{2}$ ist, Null aus, wird nach dem Ende immer größer und größer, und ist an den Stützpunkten, $P = \frac{ql}{2}$.

Trägt der an beiden Enden frei aufliegende Balken nur theilweise eine gleichmäßig vertheilte Last, welche den Theil $c$ seiner Länge einnimmt, während der zweite Theil $l - c$ unbelastet bleibt, so trägt der Stützpunkt des ersten Theiles von der ganzen Last $qc$ den Theil $qc\left(1 - \frac{c}{2l}\right)$ und der des zweiten den Theil $\frac{qc^2}{2l}$, und es ist die verticale Schubkraft in dem Abstande $x$ vom ersten Stützpunkte:

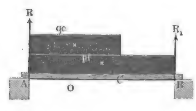
$$P = qc\left(1 - \frac{c}{2l}\right) - qx = q\left(c - \frac{c^2}{2l} - x\right).$$

Dieselbe hat für $x = c$, die Größe $-\frac{qc^2}{2l}$, welche sie auch in den Abständen $x > c$ behält. Bedeckt die Last gerade die eine Balkenhälfte, ist also $c = \frac{l}{2}$, so hat man

$$P = q\left(\frac{3l}{8} - x\right), \text{ also für } x = \frac{l}{2},\ P = -\frac{ql}{8}.$$

Wenn endlich der Balken $AB$, Fig. 427, eine auf die ganze Länge $l$ desselben gleichmäßig vertheilte Last $pl$ und eine auf die Länge $AC = c$ gleichmäßig vertheilte Last $qc$ gleichzeitig trägt, so sind die Drücke in den Stützpunkten:

Fig. 427.




$$R_1 = \frac{pl}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2l}\right)$$

und $R_2 = \frac{pl}{2} + \frac{qc^2}{2l}$, und es

folgt die verticale Schubkraft im Abstande $A\,O = x$ vom Stützpunkte $A$:

$$P = \frac{p\,l}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2\,l}\right) - (p + q)\,x.$$

Dieselbe nimmt für $x = c$ den Werth $p\left(\frac{l}{2} - c\right) - \frac{q\,c^2}{2\,l}$ an und fällt in Abständen $x > c$,

$$\frac{p\,l}{2} + \frac{q\,c^2}{2\,l} - p\,(l - x) = -\frac{p\,l}{2} + \frac{q\,c^2}{2\,l} + p\,x \text{ aus.}$$

Die verticale Schubkraft $P = p\left(\frac{l}{2} - c\right) - \frac{q\,c^2}{2\,l}$ in $C$ ist = Null für $c^2 + \frac{2\,p}{q}\,l\,c = \frac{p}{q}\,l^2$, d. i.

$$c = \left(-\frac{p}{q} + \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q}}\right)l.$$

Ist überhaupt an einer Stelle des Balkens die Schubkraft $P = R - q\,x$ so hat man das Biegungsmoment daselbst:

$$M = R\,x - \frac{q\,x^2}{2} = \frac{q\,x}{2}\left(\frac{2\,R}{q} - x\right).$$

Dasselbe ist aber für $x = \frac{2\,R}{q} - x$, d. i. für $x = \frac{R}{q}$, ein Maximum, wobei $P = 0$ ausfällt; es nimmt also das Biegungsmoment eines Trägers an derselben Stelle den Maximalwerth an, wo die verticale Schubkraft = Null ist, und es giebt daher im vorstehenden Falle $c$ diejenige Länge der Belastung $q\,c$ an, bei welcher das Moment $\left[\frac{p\,l}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2\,l}\right)\right]c - \frac{(p + q)\,c^2}{2}$ zum Maximum, und zwar $= \frac{(p + q)\,c^2}{2}$ wird.

Diese Formeln finden ihre Anwendung bei Brückenträgern, wo dann $q\,c$ die Größe der mobilen Last bezeichnet.

Die Schubkraft $X_0 = \frac{P\,\Sigma\,(F\,z)}{b_0\,W}$ ist besonders noch bei Körpern von gleichem Widerstande zu berücksichtigen, welche nach dem Obigen (§. 253) ohne Rücksicht auf diese Schubkraft an manchen Stellen einen unendlich kleinen Querschnitt erhalten könnten. Z. B. bei dem parabolischen Träger in Fig. 406, ist $X_0 = T = {}^3/_2 \cdot \frac{{}^1/_2\,P}{b_0\,h_0}$, und daher der nöthige Querschnitt an jedem Ende: $F_0 = b_0\,h_0 = {}^3/_4\,\frac{P}{T}$, wo $T$ den Tragmodul des Abschiebens bezeichnet.

§. 261 **Einfluss der Schub-Elasticität auf die Gestalt der elastischen Linie.** Es ist nun noch zu untersuchen, welchen Einfluß die Schub-Elasti-

cität auf die elastische Linie oder die Gestalt der neutralen Axe eines belasteten Balkens $AB$, Fig. 428, hat. Nach der Formel $P = \iota F C$, wo $C$ den Modul der Schub-Elasticität und $F$ den Querschnitt des Balkens bezeichnet, ist die durch die Schubkraft hervorgebrachte Neigung des Balkens $A_1 B$, $\iota = \frac{X_0}{C}$, und daher die entsprechende Senkung des Balkenendes $A_1$, bei der Länge $A_0 B = l$ des Balkens:

Fig. 428.

$$A_0 A_1 = a_1 = \iota l = \frac{X_0 l}{C} = \frac{P l \Sigma (F z)}{b_0 W C}.$$

Hierzu kommt nun noch die Senkung $A_1 A = a_2$, welche aus der Biegung des Balkens hervorgeht, und welche nach §. 217 die Größe $a_2 = \frac{P l^3}{3 W E}$ hat; es ist daher die ganze Senkung oder Durchbiegung des Balkens:

$$B C = A_0 A = a = a_1 + a_2 = \frac{P l}{W} \left( \frac{\Sigma (F z)}{b_0 C} + \frac{l^2}{3 E} \right).$$

Für den parallelepipedischen Balken ist $b_0 = b$, $\Sigma (F z) = \frac{b h^2}{8}$ und $W = \frac{b h^3}{12}$, daher

$$a = \frac{4 P l^3}{b h^3 E} \left[ 1 + {}^3/_8 \, \frac{E}{C} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right],$$

oder $\frac{E}{C} = 3$ angenommen:

$$a = \frac{4 P l^3}{b h^3 E} \left[ 1 + {}^9/_8 \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right].$$

Z. B. für $l = 10 h$, folgt $a = 1{,}01125 \cdot \frac{4 P l^3}{b h^3 E}$, wenn also der Balken nur 10 mal so lang als dick ist, so ist seine Senkung am belasteten Ende in Folge der Schubkraft im Vergleich zur Senkung durch die Biegung so klein, daß sie in gewöhnlichen Fällen außer Acht gelassen werden kann.

Um die Elasticitätsmodel eines Balkens $AB$ zu ermitteln, belastet man denselben ein Mal durch ein kleineres Gewicht $P$ im größeren Abstande $l$, und ein anderes Mal durch ein größeres Gewicht $P_1$ im kleineren Abstande $l_1$ vom Stützpunkte $B$, und beobachtet die entsprechenden Bogenhöhen $a$ und $a_1$ der Länge $l$ des Balkens. Es ist dann

$$a = \frac{P l \Sigma (F z)}{b_0 W C} + \frac{P l^3}{3 W E} \text{ und}$$

$$a_1 = \frac{P_1 \, l \, \Sigma(Fz)}{b_0 \, W C} + \frac{P_1 \, l_1^3}{3 \, W E} + \frac{P_1 \, l_1^2 \, (l - l_1)}{2 \, W E}.$$

Um $C$ zu eliminiren, dividiren wir die erste Gleichung durch $P$ und die zweite durch $P_1$, und subtrahiren dann beide Gleichungen von einander. Es folgt auf diese Weise

$$\frac{a}{P} - \frac{a_1}{P_1} = \frac{1}{WE}\left(\frac{l^3 - l_1^3}{3} - \frac{l_1^2 (l - l_1)}{2}\right) = \frac{1}{WE}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l \, l_1^2}{2} + \frac{l_1^3}{6}\right),$$

und daher der Elasticitätsmodul der Zug- und Druckkraft:

$$E = \frac{P \, P_1}{(a \, P_1 - a_1 \, P) \, W}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l \, l_1^2}{2} + \frac{l_1^3}{6}\right).$$

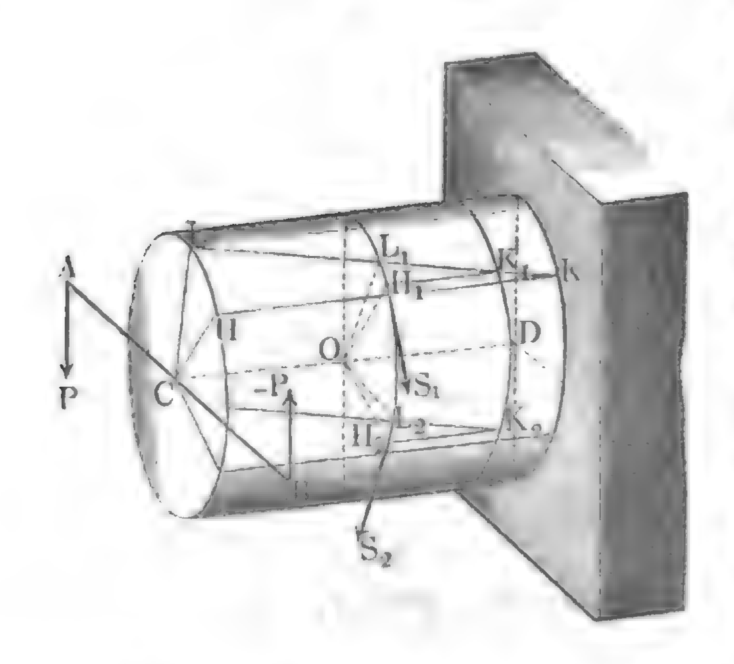
Mit Hülfe dieses Ausdruckes und der Formel für $a$ bestimmt sich nun der Elasticitätsmodul der Schubkraft durch die Formel:

$$C = \frac{P \, l}{b_0} \cdot \frac{3 \, \Sigma(Fz) \, E}{3 \, W E a - P l^3}.$$

**Drehungselasticität.** Bei der Theorie der Drehung oder Torsion eines Körpers (s. §. 202), können wir wieder den Fall, daß ein Körper $HCDL$, Fig. 429, an einem Ende festgeklemmt ist, zu Grunde legen, müssen aber, um keine zusammengesetzte Formveränderung zu erhalten, annehmen, daß er am freien Ende von einem Kräftepaare $(P, -P)$ ergriffen werde, dessen Ebene $AHB$ mit der Umdrehungsebene der Axe $CD$ zusammenfällt. Denken wir uns den Körper wieder aus lauter Längenfasern, wie z. B. $HK$ zusammengesetzt, und nehmen wir an, daß in Folge der Torsion diese Fasern eine schraubenförmige Lage annehmen, wobei z. B. $HK$ in die Lage $LK$ kommt, und die ganze Endfläche eine Drehung um den Winkel $HCL = \alpha$ erleidet. Wenn hierbei die Faserstücke $H_1 K_1$, $H_2 K_2$ u. s. w. von der Länge Eins und den Querschnitten $F_1$, $F_2$ u. s. w., die seitlichen Verschiebungen $H_1 L_1 = \sigma_1$, $H_2 L_2 = \sigma_2$ u. s. w. erleiden, so lassen sich bei dem Elasticitätsmodul $C$, die entsprechenden Schubkräfte $S_1 = \sigma_1 F_1 C$, $S_2 = \sigma_2 F_2 C$ u. s. w. setzen. Ist nun noch der ent-

§. 262

Fig. 429.



sprechende Torsionswinkel $H_1 O L_1 = H_2 O L_2 = \varphi$, und sind die Entfernungen dieser Fasern von der Axe $CD$ des Körpers, $O H_1 = z$, $O H_2 = z_2$, so hat man $\sigma_1 = \varphi z_1$, $\sigma_2 = \varphi z_2 \ldots$, daher die Kräfte $S_1 = \varphi C F_1 z_1$, $S_2 = \varphi C F_2 z_2 \ldots$, und deren Momente

$$S_1 z_1 = \varphi C F_1 z_1^2, \quad S_2 z_2 = \varphi C F_2 z_2^2 \ldots$$

Die sämmtlichen Kräfte $S_1, S_2 \ldots$ eines Querschnittes $H_1 O L_1$ halten jedenfalls dem Kräftepaare $(P, -P)$ das Gleichgewicht; ist folglich $a$ der Hebelarm $AB$ dieses Paares, also $Pa$ das Moment desselben, so hat man zu setzen:

$$Pa = S_1 z_1 + S_2 z_2 + \cdots = \varphi C F_1 z_1^2 + \varphi C F_2 z_2^2 + \cdots$$
$$= \varphi C (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots).$$

Bezeichnet man noch das geometrische Maß $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ des Torsionsmomentes durch $W$, so hat man folglich $Pa = \varphi C W$.

Nun ist aber der Torsionswinkel für die ganze Körperlänge $CD = l$, $\alpha = \varphi l$, daher läßt sich auch setzen:

$$1) \quad Pa = \frac{\alpha C W}{l}, \text{ oder } Pal = \alpha C W,$$

und der Torsionswinkel

$$2) \quad \alpha = \frac{Pal}{CW}.$$

Man kann in Uebereinstimmung mit dem Früheren (§. 215), $WC$ das Drehungsmoment, und folglich $W$ das Maß des Drehungsmomentes nennen, und hiernach behaupten, daß das Kraftmoment $Pa$ direct wie der Torsionswinkel und wie das Torsions- oder Drehungsmoment und umgekehrt wie die Länge des Körpers wächst.

Das Arbeitsquantum, welches die Torsion um den Winkel $\alpha$ erfordert, läßt sich, da der Weg der entsprechenden Kraft $P$, $\alpha a$ ist,

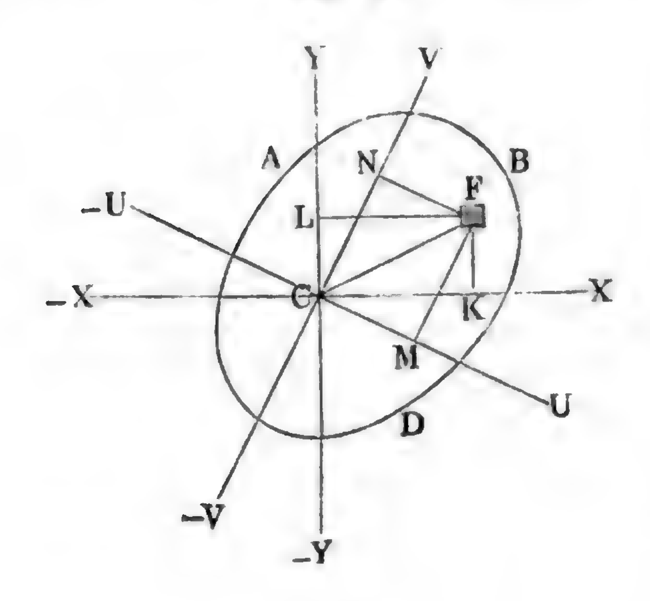
$$L = \frac{P}{2} \cdot \alpha a = \frac{\alpha^2 W C}{2 l} = \frac{P^2 a^2 l}{2 W C}$$

setzen. Diese Formeln gelten zunächst nur für prismatische Körper, bei Körpern von anderen Formeln muß man statt $\frac{l}{W}$ einen mittleren Werth in dieselben einsetzen.

§. 263 **Torsionsmomente.** Das Maß $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ des Drehungsmomentes läßt sich nach einer in §. 225 entwickelten Regel aus dem Maße des Biegungsmomentes für denselben Querschnitt leicht ermitteln. Ist nämlich

$W_1$ das Biegungsmaß einer Fläche $ABD$, Fig. 430, in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$, und $W_2$ das Biegungsmaß in Hinsicht auf eine Axe $\overline{Y}Y$, welche winkelrecht gegen die erste steht, so hat man das Maß des Drehungsmomentes in Hinsicht auf den Durchschnitt zwischen beiden Axen:

Fig. 430.




$$W = W_1 + W_2.$$

Für einen quadratischen Schaft oder eine Welle mit quadratischem Querschnitte $ABDE$, Fig. 431, ist, wenn $b$ die Seite

$$AB = DE$$

desselben bezeichnet, nach §. 226, das Maß des Biegungsmomentes in Hinsicht auf jede der Axen $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$:

$$W_1 = W_2 = \frac{b b^3}{12} = \frac{b^4}{12},$$

folglich das Maß des Torsionsmomentes:

$$W = W_1 + W_2 = 2\,\frac{b^4}{12} = \frac{b^4}{6},$$

und das Kraftmoment:

$$Pa = \frac{\alpha\, W C}{l} = \frac{\alpha\, b^4\, C}{6\, l} = 0{,}1667\,\frac{\alpha\, C b^4}{l}.$$

Für einen Schaft mit rectangulärem Querschnitt $(b\,h)$ wäre dagegen

$$Pa = \frac{\alpha\, b\, h\, (b^2 + h^2)}{12\, l}\, C = 0{,}0833\, \frac{\alpha\, b\, h\, (b^2 + h^2)\, C}{l}.$$

Fig. 431.

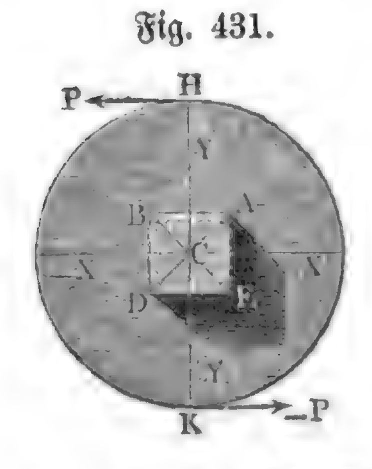
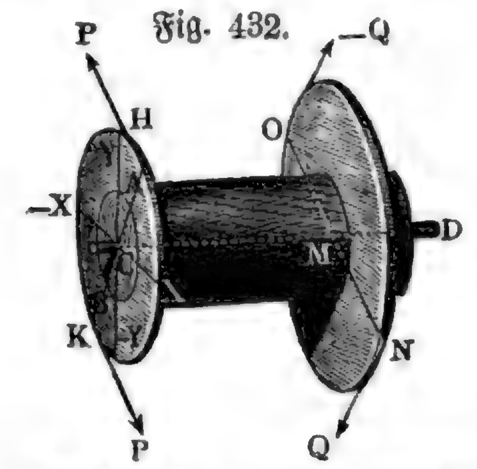



Fig. 432.




Für eine cylindrische Welle mit kreisförmigem Querschnitte $AB$, Fig. 432, ist, wenn der Halbmesser $CA$ desselben $= r$ mißt, das Maß des Biegungsmomentes in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$ oder $\overline{Y}Y$ (nach §. 231):

$$W_1 = W_2 = \frac{\pi r^4}{4},$$

daher das Maß des Drehungsmomentes in Hinsicht auf den Axpunkt $C$:

$$W = 2 W_1 = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Wirkt folglich das Umdrehungskräftepaar $(P, -P)$ an einem Arme $HK = a$, oder jeder der beiden Componenten desselben an einem Arme $CH = CK = \frac{a}{2}$, so ist:

$$P a = \frac{\alpha W C}{l} = \frac{\alpha \pi r^4 C}{2 l} = 1{,}5708 \frac{\alpha r^4 C}{l}.$$

Ist die Welle hohl, und sind ihre Halbmesser $r_1$ und $r_2$, so gilt natürlich die Formel:

$$P a = \frac{\alpha \pi (r_1^4 - r_2^4) C}{2 l} = 1{,}5708 \alpha \frac{(r_1^4 - r_2^4) C}{l}.$$

In der Regel wird die Torsion einer Welle $ABM$, Fig. 432, durch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräftepaare $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ hervorgebracht, und deshalb ist statt $l$ nicht die ganze Länge der Welle, sondern nur der Abstand $CM$ zwischen den Ebenen, in welchen beide Paare wirken, in die Formel einzuführen; es kann übrigens aber gleichgültig sein, ob man das Torsionsmoment dem Momente des Kräftepaares $(P, -P)$ oder dem Momente des Kräftepaares $(Q, -Q)$ gleichsetzt. Bezeichnet man den Hebelarm $HK$ des Paares $(P, -P)$ durch $a$, und den Hebelarm $NO$ des Paares $(Q, -Q)$ durch $b$, so hat man also

$$Pa = Qb = \frac{\alpha W C}{l}$$

zu setzen.

Die vorstehende Theorie giebt uns bei Körpern, welche von ebenen Flächen begrenzt werden, von der Wahrheit etwas abweichende Torsionsmomente, weil bei ihrer Entwickelung vorausgesetzt worden ist, daß die Endflächen des Prismas, welches eine Torsion erleidet, bei der Torsion eben bleiben, wogegen dieselben in Wirklichkeit windschief ausfallen. Nach den Untersuchungen von Saint-Venant, Wertheim u. s. w. (siehe Comptes rendus des séances de l'académie des sciences à Paris, T. 24 und T. 27, sowie l'Ingénieur, Nro. 1 und 2, 1858, deutsch im Civilingenieur, 4. Bd., 1858) ist für einen quadratischen Schaft:

$$P a = 0{,}841 \frac{\alpha b^4 C}{6 l} = 0{,}1402 \frac{\alpha b^4 C}{l},$$

wobei $b$ die Seitenlänge des quadratischen Querschnittes bezeichnet.

Bei Körpern, deren Querschnittsdimensionen sehr von einander abweichen, fallen die Abweichungen größer aus. Z. B. für ein Parallelepiped, dessen Höhe $h$ von seiner Breite $b$ vielfach übertroffen wird, sind die Abweichungen noch weit größer.

Für einen prismatischen Körper mit rectangulärem Querschnitte von der Breite $b$ und Höhe $h$ hat man

$$W = W_1 + W_1 = \frac{b h^3}{12} + \frac{h b^3}{12} = \frac{b h (b^2 + h^2)}{12}, \text{ daher}$$

$$P a = \frac{\alpha W C}{l} = \frac{\alpha b h (b^2 + h^2) C}{12 l}.$$

Wenn nun diese Formel für $h = b$, wo $P a = \frac{\alpha b^4 C}{6 l}$ ausfällt, schon einen Correctionscoefficienten erfordert, so ist zu erwarten, daß dann, wenn $h$ bedeutend von $b$ abweicht, wo jedenfalls die Seitenflächen eine noch größere windschiefe Verdrehung erleiden, dieselbe nicht mehr die erforderliche Genauigkeit gewährt. In der That findet man durch die höhere Analysis bei Berücksichtigung der windschiefen Verdrehung:

$$P a = \frac{\alpha h^3 b^3 C}{3 (b^2 + h^2) l},$$

und es ist nach den neueren Versuchen von Werthheim, der erforderliche Correctionscoefficient im Mittel $= 0{,}903$, also

$$P a = 0{,}903 \; \frac{\alpha h^3 b^3 C}{3 (b^2 + h^2) l} = 0{,}301 \; \frac{\alpha h^3 b^3 C}{(b^2 + h^2) l}$$

zu setzen.

Ist $b$ sehr klein gegen $h$, so folgt dann

$$P a = 0{,}301 \; \frac{\alpha h b^3 C}{l}.$$

Giebt man den Torsionswinkel in Graden an, setzt man also $\alpha = \frac{\alpha^0 \pi}{180^0}$, $= 0{,}017453\, \alpha^0$ so erhält man

1) für prismatische Balken oder Wellen mit kreisförmigem Querschnitte vom Durchmesser $d = 2 r$,

$$P a l = \frac{\alpha \pi r^4}{2} C = \frac{\alpha \pi d^4}{32} C = \frac{\alpha^0 \pi^2 r^4}{180^0 . 2} C = \frac{\alpha_0 \pi^2}{180^0} \frac{d^4}{32} C$$
$$= 1{,}571\, \alpha r^4 C = 0{,}0982\, \alpha d^4 C = 0{,}02742\, \alpha^0 r^4 C$$
$$= 0{,}001714\, \alpha^0 d^4 C, \text{ und}$$

2) für prismatische Balken, Wellen oder Schäfte mit quadratischem Querschnitte von der Seitenlänge $b$, ohne Rücksicht auf den Correctionscoefficienten:

$$P a l = \frac{\alpha b^4 C}{6} = 0{,}1667\, \alpha b^4 C = \frac{\alpha^0 \pi b^4 C}{1080^0} = 0{,}00291\, \alpha^0 b^4 C.$$

Umgekehrt ist

$$\alpha = 0{,}637\, \frac{P a l}{r^4 C} = 10{,}18\, \frac{P a l}{d^4 C} = 6\, \frac{P a l}{d^4 C}, \text{ sowie}$$

$$\alpha^0 = 36{,}4\, \frac{P a l}{r^4 C} = 583\, \frac{P a l}{d^4 C} = 344\, \frac{P a l}{b^4 C}.$$

Die Werthe für $C$ sind aus der Tabelle III. in §. 213 zu entnehmen. Hiernach ist z. B.:

1) Für Gußeisen: $C = 2'700000$ Pfund, daher
$P a l = 74000\, \alpha^0 r^4 = 4630\, \alpha^0 d^4 = 7860\, \alpha^0 b^4$ und

$$\alpha^0 = 0{,}00001348^0\, \frac{P a l}{r^4} = 0{,}0002161^0\, \frac{P a l}{d^4}$$

$$= 0{,}0001274^0\, \frac{P a l}{b^4}.$$

2) Für Schmiedeeisen: $C = 8'600000$ Pfund, daher
$P a l = 235800\, \alpha^0 r^4 = 14740\, \alpha^0 d^4 = 25000\, \alpha^0 b^4$ und

$$\alpha^0 = 0{,}00000424\, \frac{P a l}{r^4} = 0{,}0000678\, \frac{P a l}{d^4} = 0{,}00004\, \frac{P a l}{b^4}.$$

3) Für Holz: $C = 570000$ Pfund, daher
$P a l = 15630\, \alpha^0 r^4 = 977\, \alpha^0 d^4 = 1654\, \alpha^0 b^4$ und

$$\alpha^0 = 0{,}0000639^0\, \frac{P a l}{r^4} = 0{,}001023^0\, \frac{P a l}{d^4} = 0{,}000604\, \frac{P a l}{b^4}.$$

Beispiele. 1) Welches Umdrehungsmoment kann ein quadratischer Schaft aus Schmiedeeisen von 10 Fuß Länge und 5 Zoll Stärke aufnehmen, ohne eine Torsion über $\frac{1}{4}$ Grad zu erleiden? Es ist nach dieser Tabelle:

$$P a = 25000 \,.\, \tfrac{1}{4} \cdot \frac{5^4}{10\,.\,12} = 2500 \,.\, \frac{25^2}{48} = 32550 \text{ Zollpfund} = 2713 \text{ Fußpfund}.$$

2) Welche Torsion erleidet eine hohle gußeiserne Welle von der Länge $l = 100$ Zoll und den Halbmessern $r_1 = 6$ Zoll und $r_2 = 4$ Zoll, durch ein Kraftmoment $P a = 10000$ Fußpfund? Es ist hier:

$$P a = 74000\, \frac{\alpha^0 (r_1^4 - r_2^4)}{l},$$

folglich:

$$\alpha^0 = \frac{P a l}{74000\, (r_1^4 - r_2^4)} = \frac{10000\,.\,12\,.\,100}{74000\, (6^2 + 4^2)\, (6^2 - 4^2)}$$

$$= \frac{12000}{74\,.\,52\,.\,20} = \frac{75}{481} \text{ Grad} = 9{,}35 \text{ Min.} = 9 \text{ Min. } 21 \text{ Sec.}$$

**§. 264 Drehungsfestigkeit.** Ist bei einem durch ein Kräftepaar ($P, -P$) verdrehten Prisma $CKL$, Fig. 433, die Schubkraft pro Flächeneinheit in einem bestimmten Abstande $c$ von der Axe $CD$, $= S$, so hat man die

Schubkraft in einem anderen Abstande $z_1$, $\frac{z_1}{e} S$, sowie deren Moment $= \frac{z_1^2}{e} S$, und bei dem Querschnitte $F_1$,

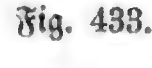
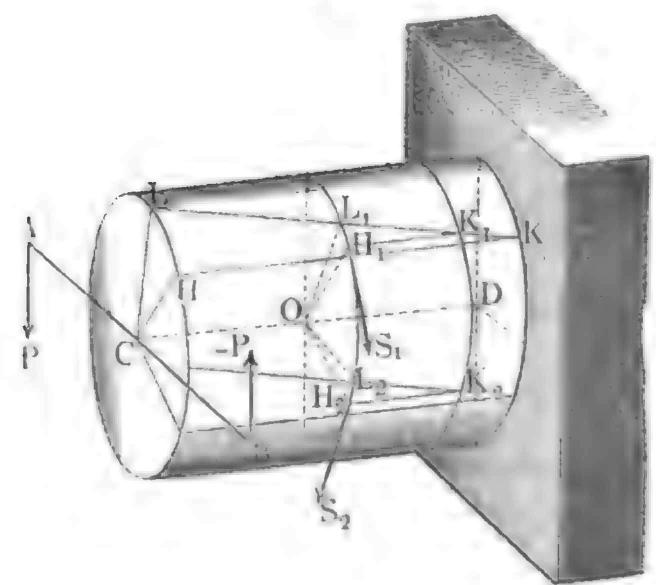


Fig. 433.




$$\frac{F_1 z_1^2}{e} S = \frac{S}{e} F_1 z_1^2,$$

und ebenso sind die Momente der Schubkräfte für andere Querschnittselemente $F_2, F_3 \ldots$, welche um $z_2, z_3 \ldots$ von der Axe $CD$ abstehen, $\frac{S}{e} F_2 z_2^2$, $\frac{S}{e} F_3 z_3^2$ u. s. w., und es folgt das ganze Drehungsmoment des Körpers:

$$Pa = \frac{S}{e} F_1 z_1^2 + \frac{S}{e} F_2 z_2^2 + \frac{S}{e} F_3 z_3^2 + \cdots$$

$$= \frac{S}{e} (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \ldots), \text{ d. i.}$$

1) $Pa = \frac{SW}{e}$, oder $Pae = SW$, sowie $\frac{W}{e} = \frac{Pa}{S}$.

Führt man nun für $S$ den Tragmodul $T$ der Schubfestigkeit und für $e$ den größten Abstand der Querschnittselemente von der neutralen Axe ein, so erhält man in der Formel

2) $Pae = TW$ eine Gleichung zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen, bei welchen der Körper nirgends bis über die Elasticitätsgrenze hinaus gespannt oder verschoben wird. Und ebenso erhält durch diese Formel das Kraftmoment $P_1 a$, bei welchem der Körper abgewürgt wird, wenn man statt $S$ den Festigkeitsmodul $K$ der Schubkraft einsetzt; es ist

3) $P_1 a = \frac{KW}{e}$.

Für eine massive cylindrische Welle vom Durchmesser $d = 2r$ ist

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2}, \text{ daher}$$

$$Pa = \frac{\pi r^3 T}{2} = \frac{\pi d^3 T}{16} = 0{,}1963\, d^3 T, \text{ sowie}$$

$$P_1 a = \frac{\pi r^3 K}{2} = \frac{\pi d^3 K}{16} = 0{,}1963\, d^3 K.$$

Ist eine hohle cylindrische Welle von den Durchmessern $d_1 = 2\,r_1$ und $d_2 = 2\,r_2$, wo

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi\,(r_1^4 - r_2^4)}{2\,r_1} \text{ ist, hat man dagegen}$$

$$P\,a = \frac{\pi\,(r_1^4 - r_2^4)}{2\,r_1}\,T = \frac{\pi\,(d_1^4 - d_2^4)}{16\,d_1}\,T = \frac{F(d_1^2 + d_2^2)}{4\,d_1}\,T.$$

wobei $F = \frac{\pi\,(d_1^2 - d_2^2)}{4}$, den Querschnitt des Körpers bezeichnet.

Für einen prismatischen Körper mit quadratischem Querschnitte, dessen Seitenlänge $= b$ ist, hat man

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e = \tfrac{1}{2}\,b\sqrt{2} = b\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ daher}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{b^3}{6\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}}, \text{ und } P\,a = \frac{b^3\,T}{3\sqrt{2}} = 0{,}2357\,b^3\,T.$$

Wenn man in der Grundformel $P\,a = \varphi\,C\,W$ aus §. 262, $\varphi = \frac{\sigma}{e}$ $= \frac{tang.\,\delta}{e}$ einsetzt, wobei $e$ die Entfernung der entferntesten Faser von der Umdrehungsaxe $C\,D$, so wie $\delta$ den Winkel $H\,K\,L$ bezeichnet, um welchen diese Faser bei der Torsion aus ihrer ursprünglichen Lage verrückt wird, so erhält man

$P\,a\,e = C\,W\,tang.\,\delta$; nun ist aber auch
$P\,a\,e = S\,W$, daher folgt
$S = C\,tang.\,\delta$, und es ergiebt sich
$T = C\,tang.\,\delta$, sowie $tang.\,\delta = \frac{T}{C}$,

wenn $\delta$ den Verschiebungswinkel bezeichnet, wobei die Spannung des Körpers die Grenze der Elasticität erreicht hat.

Die mechanische Arbeit, welche erfordert wird, um die Welle nach und nach bis um den Winkel $\alpha$ zu verdrehen, ist nach §. 262,

$L = \frac{P^2\,a^2\,l}{2\,W\,C}$, und läßt sich daher, wenn man $P\,a = \frac{S\,W}{e}$ einführt, auch $L = \frac{S^2}{C}\,\frac{W\,l}{2\,e^2}$ setzen, wobei natürlich $S$ die Maximalspannung bezeichnet.

Bei der Elasticitätsgrenze ist $S = T$, und es folgt daher auch die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um den Körper bis zur Grenze der Elasticität zu spannen:

$$L = \frac{T^2}{C} \cdot \frac{W\,l}{2\,e^2}.$$

Für einen prismatischen Körper mit kreisrundem Querschnitt ist $W = \frac{\pi r^4}{2}$, und $e = r$, daher:

$$L = \frac{T^2}{2\,C} \cdot \frac{\pi r^2 l}{2} = \frac{T^2}{4\,C} V,$$

dagegen für einen solchen mit quadratischem Querschnitte:

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e^2 = \frac{b^2}{2}, \text{ daher:}$$

$$L = \frac{T^2}{2\,C} \cdot \frac{b^4 l}{3\,b^2} = \frac{T^2}{6\,C} \cdot b^2 l = \frac{T^2}{6\,C} V.$$

Nun ist aber $\frac{T^2}{2\,C} = \frac{\sigma\,C\,T}{2\,C} = \frac{\sigma\,T}{2}$ der Arbeitsmodul $A$ der Elasticitätsgrenze, daher hat man für den Cylinder: $L = \frac{1}{2} A\,V$, und für das Parallelepiped: $L = \frac{1}{3} A\,V$.

Es ist also in beiden Fällen dieser Arbeitsaufwand nur dem Volumen $V$ des Körpers proportional (vergl. §. 206 und §. 235).

Jedenfalls läßt sich auch die Arbeit zum Abdrehen oder Abwürgen $L = \frac{1}{2} B\,V$ und $\frac{1}{3} B\,V$ setzen, wenn $B$ den Arbeitsmodul des Abwürgens bezeichnet.

Nimmt man mit Herrn General Morin für alle Stoffe

$$\frac{T}{C} = tang.\,\delta = 0{,}000667,$$

also den Verschiebungswinkel $\delta = 2$ Min. 18 Sec. an, so erhält man für Gußeisen:

$$T = 200000 \,.\, 0{,}000667 = 134 \text{ Kilogr.} = 1833 \text{ Pfund},$$

daher bei Anwendung des französischen Maßes:

$$P\,a = 26{,}3\; d^3 = 31{,}6\, b^3 \text{ Kilogr.-Centimeter},$$

dagegen bei Anwendung des preuß. Maßes:

$$P\,a = 360\, d^3 = 432\, b^3 \text{ Zollpfund}.$$

Unter derselben Bedingung erhält man für Schmiedeeisen:

$$T = 630000 \,.\, 0{,}000667 = 420 \text{ Kilogr.} = 5746 \text{ Pfund};$$

daher bei Anwendung des französischen Maßes:

$$P\,a = 82{,}4\, d^3 = 99{,}2\, b^3 \text{ Kilogr.-Centimeter},$$

und bei Anwendung des preuß. Maßes:

$$P\,a = 1128\, d^3 = 1357\, b^3 \text{ Zollpfund}.$$

Für Holz erhält man unter denselben Bedingungen im Mittel:

$$T = 41650 \,.\, 0{,}000667 = 27{,}8 \text{ Kilogr.} = 380 \text{ Pfund},$$

daher bei Anwendung des franz. Maßes:

$$P\,a = 5{,}46\, d^3 = 6{,}55\, b^3 \text{ Kilogr.-Centimeter},$$

und beim Gebrauch des preuß. Maßes:

$$P\,a = 74{,}6\, d^3 = 89{,}6\, b^3 \text{ Zollpfund}.$$

Die Coefficienten dieser Formeln gelten nur für ruhende Körper und ganz langsam und sanft umlaufende Wellen: bei gewöhnlichen Wellen giebt man doppelte Sicherheit, nimmt also die Coefficienten nur halb so groß an; für schnell umlaufende Wellen nimmt man wohl vierfache, und bei sehr raschen und mit Stößen verbundenen Bewegungen ist man sogar genöthigt, eine achtmal größere Sicherheit zu geben.

Beispiele. 1) Die gußeiserne Welle einer Turbine übt am Umfange eines auf ihr sitzenden Zahnrades von 6 Zoll Halbmesser eine Kraft von 4000 Pfund aus, welche Dicke muß man derselben geben? Es ist hier das Kraftmoment $Pa = 4000 . 6 = 24000$ Zollpfund, und folglich der Durchmesser der Welle, wenn wir $Pa = \frac{360}{2} d^3$ setzen,

$$d = \sqrt[3]{\frac{2 . 24000}{360}} = \sqrt{{}^{400}/_3} = 5{,}11 \text{ Zoll.}$$

Ist der Abstand des gedachten Zahnrades von dem Wasserrade, $l = 48$ Zoll, so hat man nach dem vorigen Paragraphen, den Torsionswinkel:

$$0{,}0002161^0 \cdot \frac{24000 . 48}{5{,}11^4} = 0{,}365^0 = 21{,}9 \text{ Minuten.}$$

2) Bei einer vierkantigen Welle aus Fichtenholz wirkt die Kraft $P = 600$ Pfund an einem Hebelarme $a = 15$ Fuß $= 180$ Zoll, während die Last $Q$ an einem Hebelarme von 2 Fuß in einer nach der Axenrichtung gemessenen Entfernung $l = 6$ Fuß $= 72$ Zoll zieht, wie dick ist diese Welle zu machen und wie groß ist die Verdrehung derselben?

Es ist, wenn man 4fache Sicherheit giebt,

$$Pa = 600 . 180 = 108000 = \frac{89{,}6\, b^3}{4},$$

daher die gesuchte Seite:

$$b = \sqrt[3]{\frac{4 . 108000}{89{,}6}} = 16{,}9 \text{ Zoll,}$$

und die Verdrehung:

$$\alpha^0 = 0{,}000604 \cdot \frac{108000 . 72}{(16{,}9)^4} = 0{,}0576 \text{ Grad} = 3^1/_2 \text{ Min.}$$

---

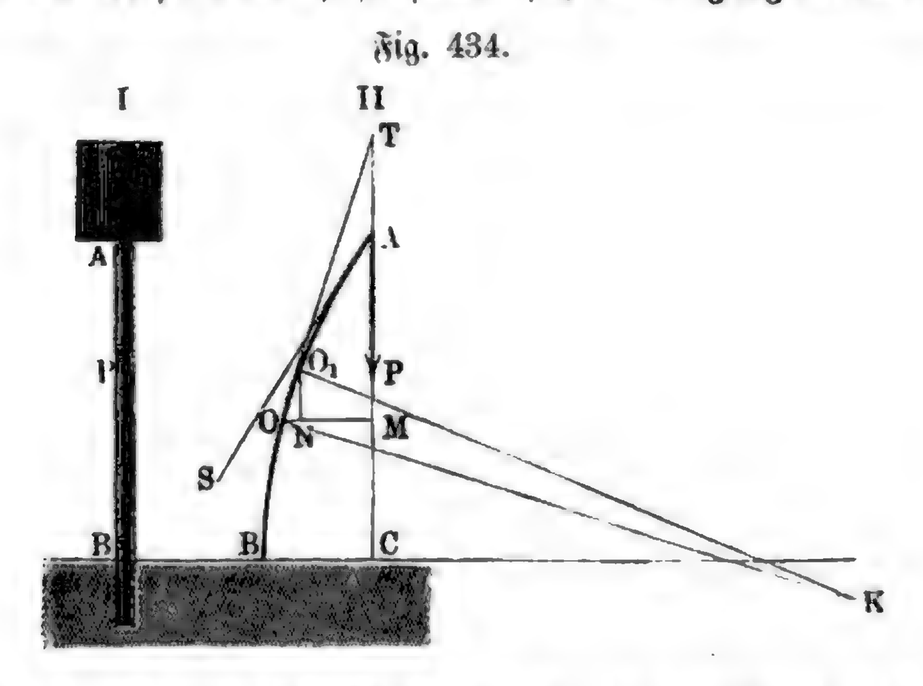
## Viertes Capitel.

# Die Tragkraft langer Säulen oder die Festigkeit des Zerknickens.

§. 265 **Tragkraft einer an einem Ende festgehaltenen Säule.** Wird ein prismatischer Körper $AB$ (I.), Fig. 434, an einem Ende $B$ festgehalten, und am

anderen Ende $A$ von einer Kraft $P$ ergriffen, welche in der Richtung der Längenaxe des Körpers wirkt, so stellen sich die Biegungsverhältnisse ganz

Fig. 434.




anders heraus, als wenn diese Kraft, wie wir im Obigen (§. 214 u. s. w.) gefunden haben, winkelrecht zu dieser Axe wirkt. Die neutrale Axe $AB$ (II.) nimmt in diesem Falle eine andere Gestalt an, weil der Hebelarm der Kraft $P$ nicht durch die Absciſſe $AM = x$, sondern durch die Ordinate $MO = y$ gebildet wird, also das Moment $M$ derselben nicht $Px$, sondern $Py$ ist. Man hat folglich hier den Krümmungshalbmesser $\overline{OK} = r$, durch den Ausdruck

$$r = \frac{WE}{Py}$$

zu bestimmen, während er nach §. 215, für eine rechtwinkelige Biegungskraft:

$$r = \frac{WE}{Px} \text{ zu setzen ist.}$$

Im Befestigungspunkte $B$ geht $y$ in die Bogenhöhe $BC = a$ über, und ist der Krümmungshalbmesser $r = \dfrac{WE}{Pa}$ am kleinsten, also die Krümmung selbst am größten, wogegen im Angriffspunkte $A$, wo $y = 0$ ist, der Krümmungshalbmesser unendlich groß, also die Krümmung Null ausfällt.

Bezeichnet man das Bogenmaß des Krümmungswinkels $OKO_1$ vom Bogenelemente $OO_1 = \sigma$, durch $\delta$, so hat man für dasselbe $r = \dfrac{\sigma}{\delta}$ und daher $Py\sigma = WE\delta$; und ist $\beta^0$ der Neigungswinkel $OO_1N$ desselben gegen die Axe $AC$, so läßt sich das Ordinatenelement $NO = v = \sigma\beta$, daher

$$Pyv = WE\beta\delta, \text{ und ebenso}$$
$$P\Sigma(yv) = WE\Sigma(\beta\delta) \text{ setzen.}$$

Um für den Bogen $A\,O$ die Summe $\Sigma(y\,v)$ zu bestimmen, setze man für $y$ nach und nach $v$, $2v$, $3v \ldots n\,v$ in derselben ein. Es folgt dann

$$\Sigma(y\,v) = v\,\Sigma(y) = v(v + 2v + 3v + \cdots + n\,v) = v\,\frac{n^2 v}{2} = \frac{n^2 v^2}{2},$$

oder da $n\,v = M\,O = y$ ist,

$$\Sigma(y\,v) = \frac{y^2}{2}, \text{ und } P\Sigma(\mathfrak{y}v) = \tfrac{1}{2}\,P\,y^2.$$

Um ebenso $\Sigma(\beta\,\delta)$ zu finden, setzen wir für $\beta$ nach und nach die Werthe $\beta$, $\beta + \delta$, $\beta + 2\,\delta \ldots \beta + n\delta$, und vollziehen die Summation wie folgt:

$$\Sigma(\beta\,\delta) = \delta\,\Sigma(\beta) = \delta(\beta + \beta + \delta + \beta + 2\delta + \cdots + \beta + n\,\delta)$$
$$= \delta\,[n\,\beta + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\,\delta]$$
$$= \delta\left(n\,\beta + \frac{n^2\,\delta}{2}\right) = n\,\delta\left(\beta + \frac{n\,\delta}{2}\right).$$

Ist der Neigungswinkel in $A$, $= \alpha$, so läßt sich auch $\beta + n\,\delta = \alpha$ setzen, und es folgt:

$$\Sigma(\beta\,\delta) = (\alpha - \beta)\left(\beta + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2),$$

sowie

$$W\,E\,\Sigma(\beta\,\delta) = \tfrac{1}{2}\,W\,E\,(\alpha^2 - \beta^2), \text{ und endlich}$$
$$P\,y^2 = W\,E\,(\alpha^2 - \beta^2).$$

Für den Endpunkt $B$ ist $y = a$ und $\beta = 0$, daher

$$P\,a^2 = W\,E\,\alpha^2, \text{ und}$$
$$P\,(a^2 - y^2) = W\,E\,\beta^2, \text{ woraus der Tangentenwinkel}$$
$$1)\quad \beta = \sqrt{\frac{P\,(a^2 - y^2)}{W\,E}} \text{ folgt.}$$

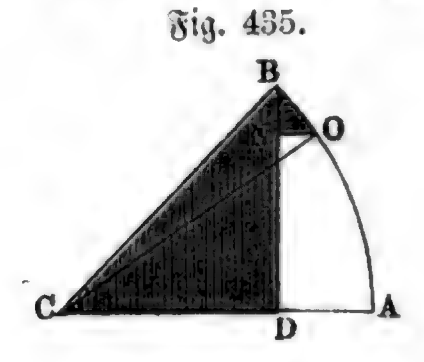
Aus $\beta$ und dem Ordinatenelemente $N\,O = v$ folgt das Abscissenelement

$$N\,Q = \xi = \frac{v}{\beta} = v\sqrt{\frac{W\,E}{P(a^2 - y^2)}} = \frac{v}{\sqrt{a^2 - y^2}}\sqrt{\frac{W\,E}{P}}, \text{ oder}$$

$$\xi\sqrt{\frac{P}{W\,E}} = \frac{v}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Wenn man mit der Hypotenuse $C\,B = a$ des rechtwinkeligen Dreieckes $B\,C\,D$, Fig. 435, dessen Katheten $B\,D = y$ und $C\,D = \sqrt{a^2 - y^2}$ sind, den Bogen $A\,B$ beschreibt, so gilt für das Element $B\,O = \psi$ desselben die Proportion:

Fig. 435.




$$\frac{B\,O}{B\,N} = \frac{C\,B}{C\,D}, \text{ d. i. } \frac{\psi}{v} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}};$$

es folgt daher

$$\frac{v}{\sqrt{a^2 - y}} = \frac{\psi}{a} \text{ und}$$

$$\xi \sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\psi}{a}, \text{ sowie auch}$$

$$\sqrt{\frac{P}{WE}}\, \Sigma(\xi) = \frac{1}{a}\, \Sigma(\psi).$$

Nun ist aber $\Sigma(\xi)$, d. i. die Summe aller Elemente von der Abscisse $AM$, $= x$, und $\Sigma(\psi)$, d. i. die Summe aller Elemente des Bogens $AB$, der Bogen $AB$ selbst; daher hat man auch

$$x \sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\text{Bog.} AB}{a} = arc.\left(sin. = \frac{y}{a}\right).$$

Es ist also die Abscisse der elastischen Linie $AB$, in Fig. 434, II.,

$$2)\ x = \sqrt{\frac{WE}{P}} \cdot arc.\left(sin. = \frac{y}{a}\right),$$

sowie die Ordinate derselben

$$3)\ y = a\ sin.\left(x \sqrt{\frac{P}{WE}}\right).$$

Ist $x = AB = AC = l$, die Länge der Säule, so hat man $y =$ der Durchbiegung $BC = a$, daher

$$a = a\ sin.\left(l \sqrt{\frac{P}{WE}}\right), \text{ d. i. } sin.\left(l \sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = 1,$$

wonach

$$l \sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\pi}{2}, \text{ und die Biegungskraft}$$

$$4)\ P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE \text{ folgt.}$$

Da diese Formel die Bogenhöhe $a$ nicht enthält, so ist anzunehmen, daß die durch sie bestimmte Kraft $P$ bei jeder Biegung den Körper im Gleichgewicht zu halten vermag. Dieses eigenthümliche Verhältniß hat seinen Grund darin, daß mit der Zunahme der Biegung nicht allein ein Wachsen des Widerstandes, sondern auch ein Wachsen des Hebelarmes $a$ und folglich auch des Kraftmomentes $Pa$ verbunden ist. Hiernach ist also auch die Kraft zum Abbrechen oder **Zerknicken**:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE = 2,4674\ \frac{WE}{l^2} \text{ zu setzen.}$$

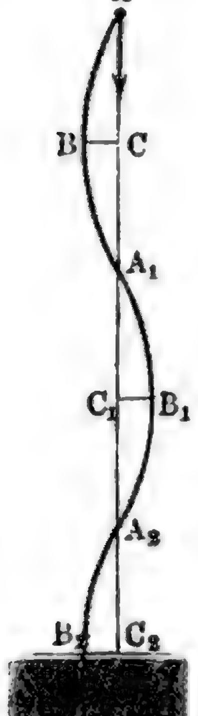
**Anmerkung.** Führt man in der Formel $y = a\ sin.\left(x \sqrt{\frac{P}{WE}}\right)$, $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$ ein, so erhält man folgende Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall der Kraftwirkung:

$$y = a \sin. \left(\frac{\pi x}{2 l}\right).$$

| Setzt man hierin $x =$ | $0$ | $l$ | $2l$ | $3l$ | $4l$ | $5l$ | $6l$ u. s. w., |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| so erhält man $y =$ | $0$ | $a$ | $0$ | $a$ | $0$ | $a$ | $0$ u. s. w. |

Wenn man also die Säule von der einfachen Länge $l$ beliebig verlängert, so wird sie von der Kraft $P = \left(\frac{\pi}{2 l}\right)^2 W E$ nach einer Rankenlinie $A B A_1 B_1 A_2 \ldots$, Fig. 436, gebogen, welche aus einer vielfachen Zusammensetzung eines und desselben Bogens $A B$ besteht, in den Abständen $A A_1$, $A A_2 \ldots$ die Axe $A X$ durchschneidet, und in den Abständen $A C$; $A C_1$, $A C_2 \ldots$ die größten Abstände $C B = + a$, $C_1 B_1 = - a$, $C B_2 = + a \ldots$ von derselben hat.

Fig. 436.




§. 266 **Parallelepipedische und cylindrische Säulen.** Für eine parallelepipedische Säule, wo $b$ die größere und $h$ die kleinere Querschnittsdimension ist, hat man $W = \frac{b h^3}{12}$ (s. §. 226), daher ist die Kraft zum Zerknicken derselben:

$$P = \left(\frac{\pi}{2 l}\right)^2 \frac{b h^3 E}{12} = 0{,}2056 \frac{b h^3 E}{l^2}.$$

Es wächst also die Festigkeit des Zerknickens eines Parallelepipedes direct wie die Breite $b$ oder größere, und wie der Cubus ($h^3$) der Dicke oder kleinere Querschnittsdimension $h$, sowie umgekehrt wie das Quadrat ($l^2$) der Länge desselben.

Für eine cylindrische Säule vom Halbmesser $r$ oder Durchmesser $d$ ist

$$W = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \text{ (s. §. 231), daher hat man hier}$$

$$P = \left(\frac{\pi}{2 l}\right)^2 \cdot \frac{\pi r^4}{4} E = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{r^4 E}{l^2} = \frac{\pi^3}{256} \cdot \frac{d^4 E}{l^2} = 1{,}9381 \cdot \frac{r^4 E}{l^2}$$
$$= 0{,}1211 \frac{d^4 E}{l^2}.$$

Es wächst also die (rückwirkende) Festigkeit des Zerknickens einer cylindrischen Säule direct wie das Biquadrat ihres Durchmessers, und umgekehrt wie das Quadrat ihrer Länge.

Für eine hohle Säule mit den Halbmessern $r$ und $r_1$, oder den Durchmessern $d$ und $d_1 = \mu d$ hat man

$$P = \frac{\pi^3}{16} \frac{(r^4 - r_1^4)\, E}{l^2} = \frac{\pi^3}{256} \frac{(d^4 - d_1^4)\, E}{l^2}$$

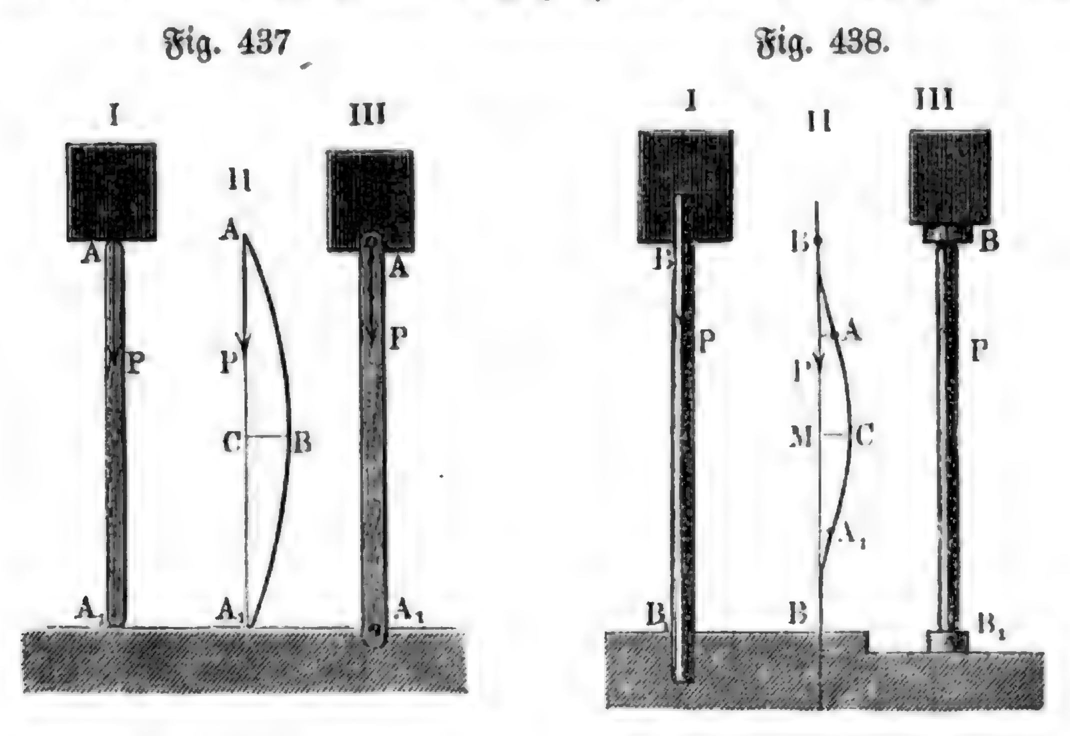
$$= \frac{\pi^3}{256} (1 - \mu^4) \frac{d^4 E}{l^2} = 0{,}1211\, (1 - \mu^4) \frac{d^4 F}{l^2}.$$

Wird die Säule $ABA$, Fig. 437, am unteren Ende $A_1$ nicht festgehalten, sondern nur aufgestämmt, so biegt sich ihre Axe nach einer symmetrischen Curve, wovon jede Hälfte $BA$ und $BA_1$ die Gestalt der Axe einer an einem Ende festgehaltenen Säule (Fig. 434) hat. Es findet deshalb auch hier die oben gefundene Formel ihre unmittelbare Anwendung, wenn man darin $\frac{l}{2}$ statt $l$ einführt, wofern natürlich $l$ die ganze Länge $AA_1$ der Säule bezeichnet. Es ist folglich hier die Tragkraft vier Mal so groß als im ersten Falle, und zwar

$$P = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 WE = \frac{\pi^2}{12} \frac{b h^3}{l^2} E = \frac{\pi^3}{64} \frac{d^4}{l^3} E.$$

Dieser Fall der Biegung tritt vorzüglich ein, wenn, wie Fig. 437 I. und

Fig. 437 Fig. 438.




III. darstellt, die Säule an den Enden abgerundet oder um Bolzen drehbar ist. In dem letzteren Zustande der Biegung befindet sich z. B. die **Kurbelstange** einer Dampfmaschine u. s. w.

Wird ferner eine Säule an beiden Enden festgehalten, wie z. B. $BAB_1$, Fig. 438 I. und III. darstellt, so wird die Axe derselben nach einer Curve $BACA_1B_1$, Fig. 438 II., mit zwei Wendepunkten $A$ und $A_1$ gebogen, worin die Biegung des ersten oder Normalfalles vier Mal wiederholt ist. Setzt man deshalb in der Formel für den Normalfall $\frac{l}{4}$, statt $l$, so erhält

man die Tragkraft einer solchen an beiden Enden festgehaltenen Säule, d. i.

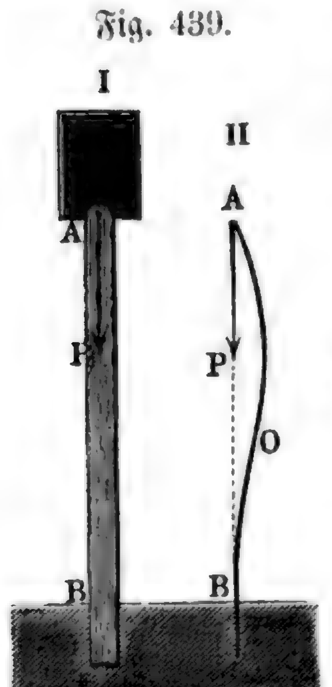
$$P = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 WE = \frac{\pi^2}{3}\frac{bh^3}{l^2}E = \frac{\pi^3}{16}\frac{d^4}{l^2}E.$$

Versuchen von Hodgkinson zufolge ist die Tragkraft der Säule in diesem Falle nur zwölfmal so groß als im Normalfalle (Fig. 434), während sie den letzten Formeln zufolge sechszehnmal so groß wäre.

Dieser Fall der Biegung kommt vorzüglich auch noch bei der Kolbenstange einer Dampfmaschine u. s. w. vor.

Wenn endlich eine Säule $ABC$, Fig. 439, an einem Ende $B$ festgehalten und am Ende verhindert wird, auszugleiten, so ist die Tragkraft $P$ achtmal so groß als im Normalfalle, also

Fig. 439.




$$P = 8\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE = \frac{\pi^2}{6}\frac{bh^3E}{l^2} = \frac{\pi^3}{32}\frac{d^4E}{l^2}.$$

Die Kraft, welche nöthig ist, um eine Säule vom Querschnitte $F$ und dem Festigkeitsmodul $K$ zu zerdrücken, giebt nach §. 205 die einfache Formel $P = FK$ an.

Setzt man diese Kraft gleich der Kraft

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$$

für das Zerknicken beim Normalfall, so erhält man die Gleichung

$$\frac{Fl^2}{W} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{E}{K}, \text{ oder } l\sqrt{\frac{F}{W}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{K}}.$$

Für eine cylindrische Säule von der Dicke $d$, wo $\frac{F}{W} = \frac{16}{d^2}$ ist, folgt hiernach

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{E}{K}} = 0{,}3927\sqrt{\frac{E}{K}}.$$

Für Gußeisen ist $E = 16'400000$ und $K = 100000$ Pfund, daher

$$\sqrt{\frac{E}{K}} = \sqrt{164} = 12{,}8, \text{ und } \frac{l}{d} = 5.$$

Für Schmiedeeisen ist dagegen $E = 27'800000$ und $K = 30000$, daher

$$\sqrt{\frac{E}{K}} = \sqrt{927} = 30{,}5 \text{ und } \frac{l}{d} = 12.$$

Endlich ist für Holz im Mittel

$E = 1'600000$ und $K = 6500$, daher

$$\sqrt{\frac{E}{K}} = \sqrt{246} = 15,7 \text{ und } \frac{l}{d} = 6.$$

Ist die Säule an beiden Enden frei, so fallen die Werthe von $\frac{l}{d}$ doppelt so groß aus, als im Vorstehenden gefunden worden ist.

Bei diesen Längenverhältnissen ist also, wenn man in beiden Fällen einerlei Sicherheitsmaß voraussetzt, die Tragkraft des Zerknickens gleich der des Zerdrückens, und nur erst bei längeren Säulen wird der Widerstand des Zerknickens von dem des Zerdrückens übertroffen, sind also die Querschnittsdimensionen nach den im Obigen gefundenen Formeln für die Zerknickungsfestigkeit zu berechnen.

Beispiele. 1) Für eine 12 Fuß lange und 11 Zoll dicke cylindrische Säule aus Fichtenholz, welche an beiden Enden frei aufsteht, ist bei 10facher Sicherheit, die Tragkraft

$$P = \frac{\pi^3}{64} \frac{d^4}{l^2} \frac{E}{10} = 0,4845 \left(\frac{11}{12}\right)^4 . 160000 = 77520 . 0,7061 = 54800 \text{ Pfund.}$$

2) Welche Stärke muß eine solche Säule aus Gußeisen erhalten, damit sie bei einer Länge von 20 Fuß eine Last von 100 Centner tragen könne? Hier ist, wenn man statt $E$, $\frac{E}{10} = 1'640000$ Pfund in Rechnung bringt,

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\, P l^2}{\pi^3 . 1'640000}} = \sqrt[4]{\frac{640000 . 240^2}{31 . 1'640000}} = \sqrt[4]{\frac{240^2}{79,5}}$$
$$= \sqrt{\frac{240}{8,92}} = 5,20 \text{ Zoll.}$$

Nach der Zerdrückungsformel ist

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\,K}},$$

also, wenn man statt $\frac{K}{10} = 10000$ Pfund in Rechnung bringt,

$$d = \sqrt{\frac{4 . 10000}{\pi . 10000}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{2}{1,77} = 1,13 \text{ Zoll.}$$

Wäre die Länge der Säule noch nicht 10 . 1,13 = 11,3 Zoll, so würde die erforderliche Stärke derselben auch nur 1,13 Zoll betragen.

**Körper von gleicher Zerknickungsfestigkeit.** Wenn eine Säule (§. 267) $A\,B$, Fig. 440 (a. f. S.), welche an einem Ende $B$ festgehalten wird, so geformt ist, daß sie in allen Querschnitten eine und dieselbe Spannung erleidet, so bildet sie einen Körper von gleichem Widerstande, wobei sie die möglich kleinste Menge an Material in Anspruch nimmt (s. §. 208 und §. 253). Jedenfalls ist der Querschnitt einer solchen Säule an der Befestigungsstelle $B$ am größten und nimmt nach dem Ende $A$ zu allmälig ab. Das Gesetz dieser Abnahme wird aus Folgendem hervorgehen. Bezeichnen wieder $x$ und $y$ die Coordinaten eines Punktes $O$ in der Axe der Säule,

ferner sei $\alpha$ der Tangentenwinkel $MAO$ für diesen Punkt, $W$ das Maß des Biegungsmomentes, $z$ der Halbmesser $OO_1$ der Säule an dieser Stelle, endlich drücke $S$ die constante Spannung an dem äußersten Umfang $AO_1B_1$, also auch im Punkte $O_1$ des Querschnittes durch $O$ aus. Es ist

Fig. 140.

$$S = \frac{Mz}{W} = \frac{Pyz}{W} \text{ (s. §. 235), und}$$

$$M = Py = \frac{WE}{r} = -WE\frac{\partial tang.\alpha}{\partial x}$$

(s. §. 218), daher folgt

$$S = -Ez\frac{\partial tang.\alpha}{\partial x}, \text{ oder da } tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \text{ ist,}$$

$$S\partial y = -Ez\, tang.\alpha\, \partial\, tang.\alpha.$$

Da man aber für einen kreisförmigen Querschnitt $\frac{W}{z} = \frac{\pi z^3}{4}$ hat (s. §. 236), so folgt

$$S = Py\frac{z}{W} = \frac{4Py}{\pi z^3}, \text{ oder } \frac{\pi}{4}Sz^3 = Py, \text{ daher}$$

$$\partial y = \frac{\pi}{4}\frac{S}{P}\partial(z^3) = \frac{3\pi}{4}\frac{S}{P}z^2\partial z, \text{ und } S\partial y = \frac{3\pi}{4}\frac{S^2}{P}z^2\partial z,$$

so daß sich nun

$$\frac{3\pi}{4}\frac{S^2}{PE}z\partial z = -tang.\alpha\,\partial\,tang.\alpha \text{ ergiebt.}$$

Durch Integration erhält man nun

$$\tfrac{3}{4}\pi\frac{S^2}{PE}z^2 = Const. - tang.\alpha^2,$$

und daher, wenn man den Querschnittshalbmesser in $B$, wo $\alpha = 0$ ist, mit $r$ bezeichnet,

$$\tfrac{3}{4}\pi\frac{S^2}{PE}(r^2 - z^2) = tang.\alpha^2, \text{ oder}$$

$$tang.\alpha = S\sqrt{\frac{3\pi}{4PE}}\cdot\sqrt{r^2 - z^2}.$$

Setzt man nun $tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{3}{4}\pi\frac{S}{P}\cdot\frac{z^2\partial z}{\partial x}$, so folgt

$$\sqrt{\frac{3\pi E}{4P}}\cdot\frac{z^2\partial z}{\partial x} = \sqrt{r^2 - z^2}, \text{ und}$$

$$\partial x = \sqrt{\frac{3\pi E}{4P}}\cdot\frac{z^2\partial z}{\sqrt{r^2 - z^2}} = r^2\sqrt{\frac{3\pi E}{4P}}\cdot\frac{u^2\partial u}{\sqrt{1 - u^2}},$$

wenn man $\frac{z}{r}$ mit $u$ bezeichnet.

Nun ist aber

$$\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$ daher folgt

$$\int \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{1-u^2}} = -\int \sqrt{1-u^2} . \partial u + \int \frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} u \sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} u \sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\, arc. (sin. = u)$$

(s. analyt. Hülfslehren, Art. 27 und 26).

Hiernach ergiebt sich

$$x = \sqrt{\frac{3 \pi E}{16 P}} \left[ r^2 arc. \left( sin. = \frac{z}{r} \right) - z \sqrt{r^2 - z^2} \right].$$

Für $x = l$ ist $z = r$, der Halbmesser des Querschnittes an der Basis, wobei $arc. \left( sin. = \frac{z}{r} \right) = arc. (sin. = 1) = \frac{\pi}{2}$, und

$z \sqrt{r^2 - z^2} = 0$, ausfällt. Daher folgt

$$l = \frac{\pi}{2} r^2 \sqrt{\frac{3 \pi E}{16 P}}$$ und es ergiebt sich die Tragkraft

$$P = \left(\frac{\pi}{2 l}\right)^2 \frac{3 \pi r^4}{16} E = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2 l}\right)^2 \frac{\pi r^4}{4} E,$$

d. i. drei Viertel der Tragkraft einer cylindrischen Säule vom Halbmesser $r$ (vergl. §. 265). Es ist folglich der Basishalbmesser der Säule von gleichem Widerstande $= \sqrt{4/3} = 1{,}075$mal so groß als der Halbmesser einer cylindrischen Säule von gleicher Länge und gleicher Tragkraft.

Vergleicht man die Abscisse $x$ mit der ganzen Säulenlänge $l$, so erhält man

$$\frac{x}{l} = \frac{\pi}{2} \left[ arc. (sin. = r) - \frac{z}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2} \right] = \frac{\pi}{2}$$ mal

Inhalt eines Kreissegmentes vom Halbmesser $= 1$ und der Sehne $= \frac{2 z}{r}$.

Wenn man daher $\frac{2}{\pi} \frac{x}{l}$ als den Inhalt eines Kreissegmentes ansieht, so kann man mittels der Segmententafel (s. den Ingenieur, Seite 152) den entsprechenden Centriwinkel $\varphi$ bestimmen, und hiernach den einer gegebenen Abscisse $x$ entsprechenden Querschnittshalbmesser $z = r\, sin. \frac{\varphi}{2}$ berechnen. Z. B.

für $x = \frac{1}{2} l$, ist $\frac{2x}{\pi l} = \frac{1}{\pi} = 0,3183$, wonach mittels der Segmententafel, $\varphi = 93^0 49'$ folgt, und sich der Querschnittshalbmesser in der Mitte der Säule:

$$z = r \sin. 46^0 50' = 0,729 r \text{ ergiebt.}$$

Wegen der Druckfestigkeit ist der Halbmesser des Querschnitts am Säulenkopfe, $r_0 = \sqrt{\frac{P}{\pi T}}$ zu machen; auch ist dieser Halbmesser noch an denjenigen Stellen beizubehalten, wo die Zerknickungsformel noch kleinere Werthe für $z$ giebt.

Steht die Säule am Fuße wie Fig. 437 darstellt, frei auf, so ist natürlich diese Berechnung für eine Hälfte $\left(\frac{l}{2}\right)$ derselben durchzuführen. Der größte Querschnittshalbmesser $r$ fällt dann in die Mitte und entspricht der Formel $P = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 . \frac{\pi r^4 E}{4}$.

§. 268 **Hodgkinson's Versuche.** — Die Versuche, welche in neueren Zeiten Hodgkinson über die (rückwirkende) Festigkeit des Zerknickens angestellt hat (s. Barlow's Bericht in den Philosophical Transactions, 1840) bestätigen wenigstens eine angenäherte Richtigkeit der im Vorstehenden entwickelten Formeln. Nach diesem Experimentator ist die Formel

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{\pi d^4 E}{64} = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 . \frac{b^4 E}{12}$$

für prismatische Säulen mit kreisförmigen und quadratischen Querschnitten, wenn man darin für $E$ einen besonderen Erfahrungswerth einsetzt, für Holz unbedingt richtig, dagegen für Schmiedeeisen nur dann genügend, wenn man statt $d^4$, die Potenz $d^{3,55}$, und für Gußeisen ausreichend genau, wenn man statt $d^4$ und $l^2$ die Potenzen $d^{3,55}$ und $l^{1,7}$ einführt.

Die Hauptergebnisse der Hodgkinson'schen Versuche mit prismatischen Säulen an kreisförmigen und quadratischen Querschnitten enthält folgende Tabelle. Die in derselben angegebenen Coefficienten beziehen sich auf den Fall, daß die Säulen an beiden Enden rechtwinkelig gegen ihre Axen abgeschnitten sind, und mit diesen Endflächen platt aufliegen. Bei abgerundeten Endflächen, wo sich Säulenenden ungehindert neigen können, sind diese Coefficienten nahe drei Mal so klein ausgefallen. Wenn dagegen die Säule an einem Ende festgehalten wird, und am anderen Ende drehbar ist, so hat sich dieser Coefficient halb so groß herausgestellt als im ersten Falle. Wenn endlich das eine Ende der Säule festgehalten wird, und das andere dreh- und verschiebbar ist, so beträgt die Tragkraft ein Zehntel von der im ersten Falle, wo beide Enden festgehalten werden.

## Tabelle
### der Kräfte zum Zerknicken langer Säulen.

| Namen der prismatischen Säulen | Kraft zum Zerknicken. | | |
|---|---|---|---|
| | In engl. Maße (Tonnen) | In franz. Maße (Kilogramm) | In Neupfund. |
| Gußeiserne Säulen mit kreisförmigen Querschnitten . . . . . | $44{,}16 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$ | $10900 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$ | $94700 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$ |
| Schmiedeeiserne Säulen mit kreisförmigen Querschnitten . . . . | $133{,}75 \frac{d^{3,55}}{l^2}$ | $46140 \frac{d^{3,55}}{l^2}$ | $284400 \frac{d^{3,55}}{l^2}$ |
| Quadratische Säulen aus trockenem Danziger Eichenholz . . . . . | $10{,}95 \frac{b^4}{l^2}$ | $2480 \frac{b^4}{l^2}$ | $23570 \frac{b^4}{l^2}$ |
| Quadratische Säulen aus trockenem Fichtenholz . . . . . . . . . . | $7{,}81 \frac{b^4}{l^4}$ | $1770 \frac{b^4}{l^2}$ | $16840 \frac{b^4}{l^2}$ |

In der Columne für das englische Maß sind $d$ und $b$ in Zollen, $l$ in Fußen und $P$ in Tonnen zu je $20 . 112 = 2240$ engl. Pfund; in der für das französische Maß sind dagegen $d$ und $b$ in Centimetern, $l$ in Decimetern und $P$ in Kilogramm, und in der letzten Columne hat man $d$ und $b$ in Zollen, $l$ in Fußen und $P$ in Neupfunden zu geben.

Noch hat Hodgkinson gefunden, daß gußeiserne Säulen eher zerdrückt als zerknickt werden, bei abgerundeten Enden, wenn $l < 15\,d$, und bei flachen Enden, wenn $l < 30\,d$ ist. Auch soll das trockene Holz doppelt so viel Tragkraft besitzen als das frisch gefällte.

In Fällen der Anwendung dieser Formeln bei Berechnung der Tragkraft von Säulen, giebt man 4= bis 12fache Sicherheit, nimmt also die Coefficienten dieser Formeln 4 bis 12 Mal kleiner an.

Bei sechsfacher Sicherheit ist hiernach für gußeiserne Säulen, wenn $d$ und $l$ in Zollen gegeben wird,

$$P = \frac{94700}{6} \cdot \frac{12^{1,7}}{100} \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}} = \frac{947}{6} \cdot 68{,}3 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}} = 10800 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}} \text{ Centner,}$$

und $d = 0{,}0731\ (P l^{1,7})^{0,2817}$ Zoll zu setzen.

Für schmiedeeiserne Säulen hat man bei derselben Sicherheit

$$P = 68300 \frac{d^{3,55}}{l^2} \text{ Centner, und}$$

$$d = 0{,}0435\ (P l^2)^{0,2817} \text{ Zoll.}$$

Für Säulen aus Eichenholz, bei zehnfacher Sicherheit ist ferner

$$P = 3394 \left(\frac{b}{l}\right)^2 F = 3394 \frac{b^4}{l^2} = 5762 \frac{d^4}{l^2} \text{ Centner, und}$$

$$b = 0{,}131\ (Pl^2)^{1/4}, \text{ sowie } d = 0{,}115\ (Pl^2)^{1/4} \text{ Zoll.}$$

Endlich ist für Säulen aus Fichtenholz:

$$P = 2425 \frac{b^4}{l^2} = 4117 \frac{d^4}{l^2} \text{ Centner, und}$$

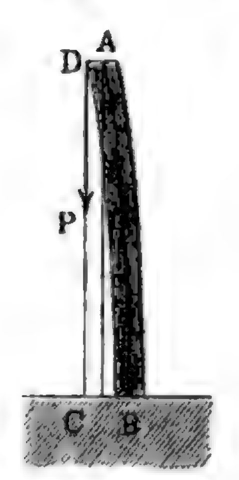
$$b = 0{,}1425\ (Pl^2)^{1/4}, \text{ sowie } d = 0{,}125\ (Pl^2)^{1/4} \text{ Zoll.}$$

Beispiel. Für eine cylindrische Säule aus Fichtenholz, von 11 Zoll Stärke und 12 . 12 = 144 Zoll Länge, welche an beiden Enden festgehalten wird, ist die Tragkraft $P = 411700 \cdot \left(\frac{121}{144}\right)^2 = 290700$ Pfund. Wenn die Enden einer solchen Säule frei drehbar sind, so ist dagegen die Tragkraft $P_1 = \frac{1}{3} P = 96900$ Pfund, während nach der theoretischen Formel, $P_1 = 54800$ Pfund ist (s. Beispiel 1 zu §. 266).

§. 269 **Einfachere Bestimmung der Tragkraft der Säulen.** Die vorstehenden Formeln für das Biegen und Zerknicken der Säulen sind unter der Voraussetzung entwickelt worden, daß die Kraft $P$ genau im Endpunkte $A$ der Längenaxe der Säule angreift; da aber dieser Forderung in der Praxis nie genau Genüge geschehen kann, und dieses centrische Angreifen auch aufhört, sowie die Biegung des Körpers eintritt, so ist es rathsam, bei Bestimmung der Tragkraft einer Säule gleich von vornherein mit auf den excentrischen Angriff Rücksicht zu nehmen.

Setzen wir bei dieser Bestimmung voraus, daß der Angriffspunkt $D$ der Kraft $P$, um $DA = c$ von dem Ende $A$ der Axe der Säule $AB$, Fig. 441, abstehe, und nehmen wir an, daß die Durchbiegung $BC = a$ der Säule klein sei gegen $c$. Dann können wir die von der Säulenaxe gebildete elastische Linie als einen Kreis vom Halbmesser $r = \frac{l^2}{2a}$ ansehen. Nun ist aber

Fig. 441.




$P(a + c)r = WE$, daher folgt

$P(a + c)l^2 = 2WEa$, sowie

$$a = \frac{Pl^2 c}{2WE - Pl^2}, \text{ und}$$

$$a + c = \frac{2WEc}{2WE - Pl^2}.$$

Bezeichnet nun $F$ den Querschnitt der Säule, und $e$ die halbe Dicke derselben, gemessen in der Ebene $ABD$, so ist die durch den Druck $P$ hervorgebrachte gleichmäßige Spannung in jedem Querschnitte der Säule:

$$S_1 = \frac{P}{F},$$

und die durch das Kraftmoment $P(a + c)$ hervorgebrachte Spannung, am äußern Umfang derselben:

$$S_2 = \frac{P(a + c)e}{W} = \frac{2\,P E c e}{2\,W E - P l^2},$$

und es folgt daher die Maximalspannung der Säule:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{P}{F} + \frac{2\,P E c e}{2\,W E - P l^2} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{2\,E F c e}{2\,W E - P l^2}\right).$$

Setzt man nun $S$ = dem Tragmodul $T$, so folgt

$$P\left(1 + \frac{2\,E F c e}{2\,W E - P l^2}\right) = F T, \text{ oder}$$

$$P(2\,W E - P l^2 + 2\,E F c e) = (2\,W E - P l^2)\,F T.$$

Ist nun $P l^2$ gegen $(W + F c e)\,E$ klein, so läßt sich setzen

$$P = \frac{2\,W E F T}{2\,E(W + F c e) + F T l^2} = \frac{F T}{1 + \frac{F c e}{W} + \frac{F T}{2\,W E}\,l^2}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{F T}{\varphi + \psi\,\frac{l^2}{d^2}},$$ wenn $\varphi$ und $\psi$ besondere Erfahrungszahlen bezeichnen.

Der Civilingenieur Love (s. Mémoire sur la Résistance du fer et de la fonte etc., Paris 1852) folgert aus den Versuchen von Hodgkinson die Werthe $\varphi = 0{,}45$ und $\psi = 0{,}00337$; es ist also hiernach:

$$P = \chi F T = \frac{F T}{1{,}45 + 0{,}00337\left(\frac{l}{d}\right)^2},$$

woraus sich dann folgende Tabelle für den Coefficienten

$$\chi = \frac{1}{1{,}45 + 0{,}00337\left(\frac{l}{d}\right)^2}$$ berechnen läßt.

| $\frac{l}{d} =$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi =$ | 0,559 | 0,357 | 0,223 | 0,146 | 0,101 | 0,0735 | 0,0556 | 0,0435 | 0,0347 | 0,0285 |

Diese Werthe für $\chi$ sind also mit dem oben (§. 211 und 212) angegebenen Tragmodul $T$ des Zerdrückens zu multipliciren, um bei einem gegebenen Längenverhältnisse die Tragmodel langer Säulen zu bestimmen.

Der General Morin theilt nach Rondelet folgende Tabelle mit, welche jedoch für Säulen von mittlerer Länge zu große Werthe für $\chi$ giebt.

| $\frac{l}{d} =$ | 1 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi =$ | 1 | $^5/_6$ | $^1/_2$ | $^1/_3$ | $^1/_6$ | $^1/_{12}$ | $^1/_{24}$ |

Beispiele. 1) Welche Last kann eine Säule aus Fichtenholz tragen, deren Länge 15 Fuß und Stärke 12 Zoll beträgt? Für eine kurze Säule wäre nach Tabelle auf Seite 370, der Tragmodul $T = 2500$ Pfund, da aber hier das Verhältniß der Länge zur Stärke, $\frac{l}{d} = {}^{15}/_1$ ist, so hat man:

$$\chi = \frac{1}{1,45 + 0,00337 \cdot 15^2} = \frac{1}{2,208} = 0,453,$$

daher den Tragmodul nur $\chi T = 0,453 \cdot 2500 = 1132$ Pfund und endlich die gesuchte Tragkraft:

$$P = 1132 \frac{\pi d^2}{4} = 1132 \cdot 0,7854 \cdot 144 = 128000 \text{ Pfund zu setzen.}$$

Der Sicherheit wegen ist jedoch nur ein Drittel dieses Werthes als Belastung anzunehmen, also

$$P = \frac{128000}{3} = 42700 \text{ Pfund}$$

zu setzen.

2) Wie stark ist eine frei aufstehende hohle cylindrische Säule aus Gußeisen zu machen, welche bei einer Länge $l$ von 25 Fuß eine Last $P = 100000$ Pfund zu tragen vermag?

Nehmen wir an, daß der Durchmesser $d_1$ der Höhlung gleich drei Fünftel des äußeren Durchmessers ($d$) der Säule sei, so können wir in der theoretischen Formel:

$$P = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4}{l^2} E \text{ (§. 266) statt}$$

$$r^4 = \frac{d^4 - d_1^4}{16} = \frac{d^4}{16} [1 - (^3/_5)^4[ = 0,0544\, d^4 \text{ setzen, so daß nun}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 P l^2}{0,0544\, \pi^3 E}} \text{ folgt.}$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $P = 100000$, $l^2 = (25 \cdot 12)^2 = 90000$, $\pi^3 = 31$, und statt $E$ nur

$$\frac{E}{10} = \frac{13'680000}{10} = 1'368000 \text{ Pfund}$$

ein, so erhalten wir die gesuchte äußere Stärke der Säule:

$$d = \sqrt[4]{\frac{400000 \cdot 90}{0,0544 \cdot 31 \cdot 1368}} = \sqrt[4]{\frac{1000000}{1,6864 \cdot 38}} = 11,17 \text{ Zoll.}$$

Nehmen wir $d = 11,25$ Zoll an, so erhalten wir $d_1 = 0,6 \cdot 11,25 = 6,75$ Zoll.

Unsere letzte Formel giebt, wenn wir

$$\frac{l}{d} = \frac{25}{1} = 25$$

annehmen, den gesuchten Querschnitt der Säule:

$$F = \left[1{,}45 + 0{,}00337\left(\frac{l}{d}\right)^2\right]\frac{P}{T} = \frac{3{,}556\,.\,100000}{T} = \frac{355600}{T},$$

und setzen wir nun noch nach §. 212,

$$T = \frac{18000}{3} = 6000 \text{ Pfund},$$

so erhalten wir

$$F = \frac{355600}{6000} = 59{,}3 \text{ und hiernach, da auch}$$

$$F = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2) = [1 - (3/5)^2]\,\frac{\pi d^2}{4} = 0{,}16\,\pi\,d^2$$

ist, die gesuchte äußere Stärke der Säule:

$$d = \sqrt{\frac{F}{0{,}16\,\pi}} = \sqrt{\frac{59{,}3}{0{,}16\,\pi}} = 10{,}86 \text{ Zoll}.$$

Nimmt man $d = 11$ Zoll an, so erhält man:

$$d_1 = 0{,}6\,d = 0{,}6\,.\,11 = 6{,}6 \text{ Zoll}.$$

## Fünftes Capitel.

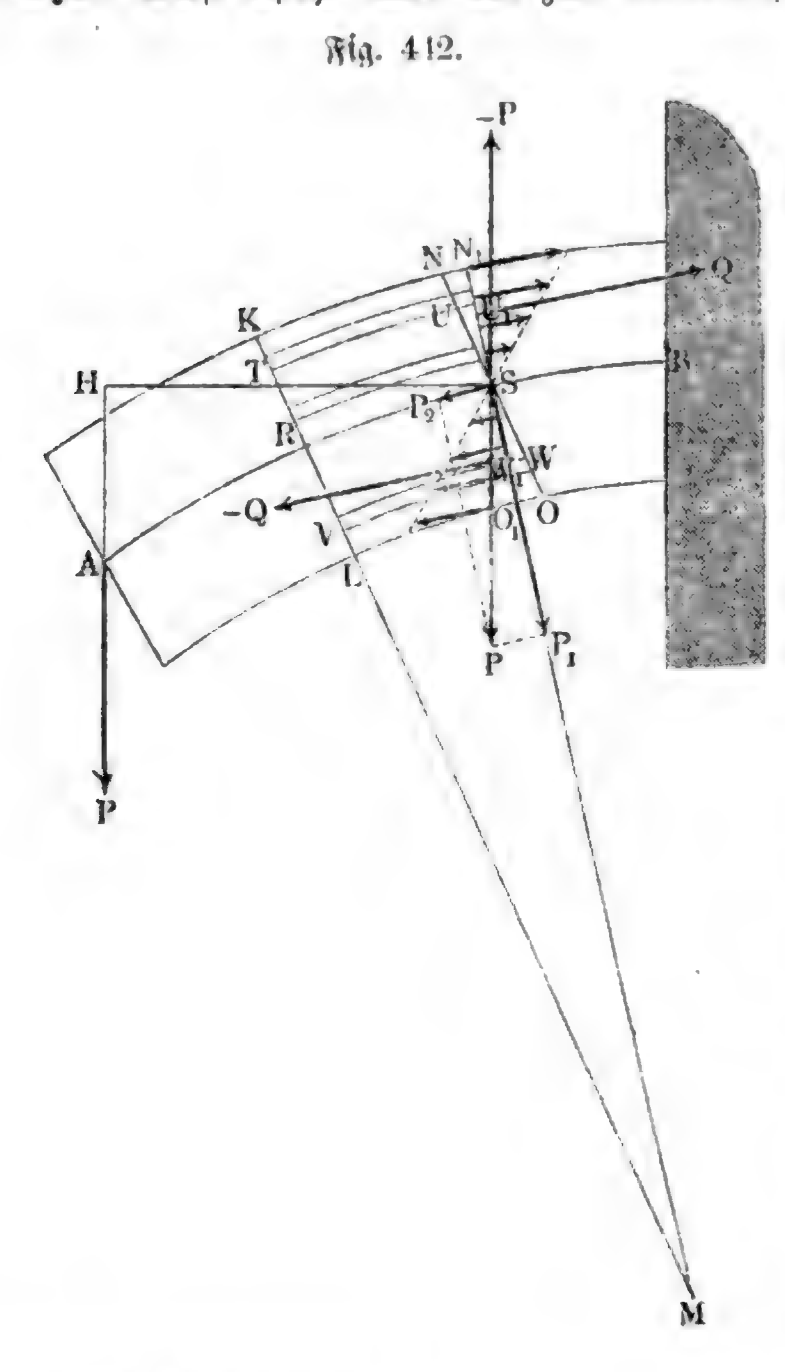
## Die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.

§. 270 **Zusammengesetzte Festigkeit.** Nicht selten wird ein Körper von zwei Kräften, z. B. von einer Zug- und einer Biegungskraft u. s. w., zugleich ergriffen, wodurch er natürlich auch zweierlei Formveränderungen, z. B. eine Ausdehnung und eine Biegung, zugleich erleidet. Wir haben die Kraft, mit welcher der Körper dieser zweifachen Gestaltsveränderung widersteht, die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit genannt, und werden in der Folge die vorzüglichsten Fälle dieser Art näher untersuchen.

Streng genommen hatten wir es schon in dem bei der Biegung eines Körpers $AKBO$, Fig. 442 (a. f. S.), zu Grunde gelegten Falle (§. 214) mit der zusammengesetzten Festigkeit zu thun, da sich eine am Ende $A$ dieses Körpers angreifende Kraft $\overline{AP} = P$ auf ein Kräftepaar $(P, -P)$ und auf eine Kraft $\overline{SP} = P$ zurückführen läßt, wovon das erstere, welches wir zeither nur in Betracht gezogen haben, das Körperstück $AS$ biegt, und die andere

ein Abreißen dieses Stückes von dem übrigen Theile $SB$ zu bewirken sucht. Die letztere Kraft besteht wieder aus zwei Seitenkräften:

Fig. 412.




$P_1 = P \cos. \alpha$ und $P_2 = P \sin. \alpha$ (§. 215), wovon die eine winkelrecht gegen die Fasern und die andere in der Axenrichtung der Fasern wirkt. Die letztere vereinigt sich mit den Spannungen der Fasern in Folge der Biegung, vergrößert folglich die Ausdehnungen auf der Zugseite der neutralen Axe und vermindert dagegen die Zusammendrückungen auf der Druckseite. Die Größe der Ausdehnung, welche jede Faser

$RS = KN$

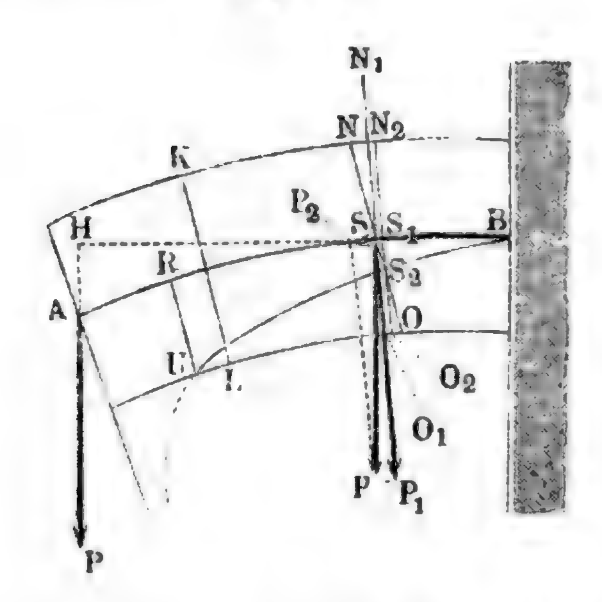
u. s. w. von der Länge = Eins durch die Zugkraft $P \sin. \alpha$ erleidet, ist (nach §. 204)

$$\sigma_1 = \frac{P \sin. \alpha}{F E},$$

wenn $F$ den Querschnitt $NO$ des Körpers bezeichnet. Ziehen wir in diesem Abstande mit der Linie $N_1 O_1$, Fig. 443, welche die Enden der durch die Biegung ausgedehnten Fasern $KN_1$, $RS_1$, $LO_1$ bestimmt, eine Parallele $N_2 O_2$, so deutet dieselbe die Begrenzung der beiden Längenveränderungen unterworfenen Fasern an, und schneidet die ursprüngliche Begrenzung in einem Punkte $S_2$, welcher dem Ende der unausgedehnten Faser entspricht, und folglich die neue oder wahre Lage der neutralen Axe angiebt. Der Abstand $SS_2 = e_1$ dieser neutralen Axe von der ursprünglichen neutralen

Axe, welche nur dem Biegungsmomente entspricht, bestimmt sich durch die Proportion:

Fig. 443.




$$\frac{SS_2}{SS_1} = \frac{SN}{NN_1}, \text{ d. i. } \frac{e_1}{e} = \frac{\sigma_1}{\sigma},$$

wonach also $e_1 = \frac{e}{\sigma} \sigma_1$ folgt.

Nun ist aber noch $\frac{\sigma}{e} = \frac{1}{r}$ (§. 235) daher ergiebt sich einfach:

$$e_1 = r \sigma_1 = \frac{P r \sin. \alpha}{F E}.$$

Um diese Größe ($e_1$) ist auch der Krümmungshalbmesser $r_1$ der auf diese Weise schärfer bestimmten neutralen Axe größer als der Krümmungshalbmesser der seither in Betracht gezogenen neutralen Axe; es ist also:

$$r_1 = r + e_1 = r(1 + \sigma_1) = r\left(1 + \frac{P \sin. \alpha}{F E}\right).$$

Anlangend den Winkel $\alpha$, um welchen der veränderliche Querschnitt $N_1 O_1$ oder $N_2 O_2$ von der Richtung der Kraft $P$ abweicht, so ist dieser auch gleich dem (in §. 216) bestimmten Tangentenwinkel $\alpha$; es ist also wegen der gewöhnlichen Kleinheit dieses Winkels:

$$\sin. \alpha = \alpha = \frac{P(l^2 - x^2)}{2 W E}$$

zu setzen, und da nun $r = \frac{W E}{P x}$ (§. 215) ist, so folgt:

$$r \sin. \alpha = r \alpha = \frac{l^2 - x^2}{2 x}, \text{ und daher:}$$

$$e_1 = \frac{P(l^2 - x^2)}{2 F E x}.$$

Hiernach fällt also z. B. im Anfangspunkte $B$, wo $x = l$ ist, $e_1 = 0$ aus, und am Endpunkte $A$, wo $x = 0$ ist, $e_1 = \frac{P l^2}{0} = \infty$; dagegen ist für $x = \frac{P(l^2 - x^2)}{2 F E e}$, $e_1 = e$; es fällt folglich die neutrale Axe in $B$ mit der ersten zusammen, entfernt sich, von $B$ nach $A$ fortschreitend, immer mehr und mehr von derselben, erreicht später die concave Seite des Körpers, und ist endlich, wenn man sie auch außerhalb des Körpers fortsetzend annimmt, am Ende $A$ unendlich von dieser Axe entfernt.

Da die größte Ausdehnung in Folge der Biegung,

$$\sigma = \frac{P e x}{W E},$$

und die in Folge der Zugkraft $P \sin.\alpha$,

$$\sigma_1 = \frac{P \sin.\alpha}{F E}$$

ist, so folgt die Gesammtdehnung:

$$N N_2 = N N_1 + N_1 N_2 = \frac{P}{E}\left(\frac{e x}{W} + \frac{\sin.\alpha}{F}\right),$$

und wenn dieselbe die Elasticitätsgrenze $\frac{T}{E}$ erreicht, so können wir

$$P\left(\frac{e x}{W} + \frac{\sin.\alpha}{F}\right) = T,$$

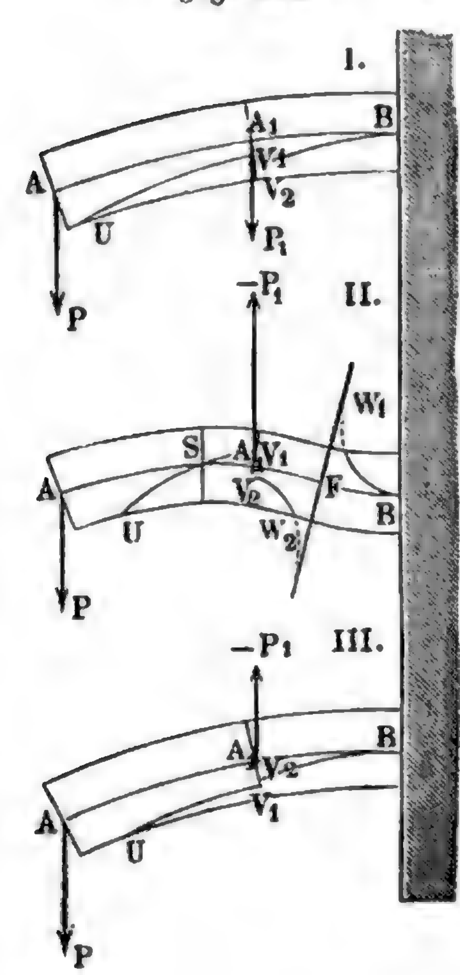
und daher die Tragkraft

$$P = \frac{W T}{e x + \frac{W}{F}\sin.\alpha} = \frac{W T}{e x + \frac{P(l^2 - x^2)}{2 F E}} \text{ setzen.}$$

Bei den mäßigen Biegungen, welchen die Balken gewöhnlich ausgesetzt sind, ist dieser Werth ein Minimum für $x = l$, und zwar, wie wir schon oben gefunden haben:

$$P = \frac{W T}{e l}.$$

Fig. 444.




Anmerkung. Wird der Balken, wie z. B. $A A_1 B$, Fig. 444 I., II. und III., von zwei Kräften ergriffen, so kommen zwei- und nach Befinden dreifache Verrückungen der neutralen Axe aus dem Schwerpunkte vor. Wirken die beiden Kräfte $P$ und $P_1$ in derselben Richtung, wie Fig. 444, I., speciell vor Augen führt, so ist diese Verrückung auf der einen Seite vom Querschnitt $A_1$ durch die Formel

$$e_1 = \frac{P r \sin.\alpha}{F E},$$

und dagegen die auf der anderen Seite durch die Formel

$$e_2 = \frac{(P + P_1)\, r \sin.\alpha}{F E}$$

bestimmt. An der Aufhängestelle $A_1$ ändert sich diese Verrückung

$$\overline{A_1 V_1} = e_1 = \frac{P r \sin.\alpha}{F E} \text{ in}$$

$$\overline{A_1 V_2} = e_2 = \left(\frac{P + P_1}{P}\right) e_1$$

um, wenn man von der einen Seite auf die

andere übergeht, wogegen im festen Punkte $B$, wo $\alpha = 0$ ist, wieder $e_2 =$ Null ausfällt.

Wenn die beiden Kräfte einander entgegengesetzt wirken, und hierbei das Moment

$$P_1 \cdot \overline{A_1 B} = P_1 l_1$$

der negativen Kraft größer ist als das Moment

$$P \cdot \overline{AB} = P (l_1 + l)$$

der positiven Kraft, wobei der Balken zwei entgegengesetzte Biegungen annimmt, welche in einem Wendepunkte $F$ an einander anstoßen, so besteht die neutrale Axe aus drei discontinuirlichen Zweigen $U V_1$, $V_2 W_2$ und $W_1 B$ (wie Fig. 444, II.), wovon die beiden letzteren die Normale durch den Wendepunkt $F$ zu Asymptoten haben; denn es ist hier $r = \infty$ und folglich auch

$$e_1 = \frac{P r \sin. \alpha}{F E} = \infty.$$

Sind zwar die Kräfte einander entgegengesetzt, ist aber $P (l + l_1) > P_1 l_1$, wie Fig. 444, III. vor Augen führt, so ist einerseits von $A_1$ die Verrückung der neutralen Axe

$$\overline{A_1 V_1} = e_1 = \frac{P r \sin. \alpha}{F E}$$

und andererseits

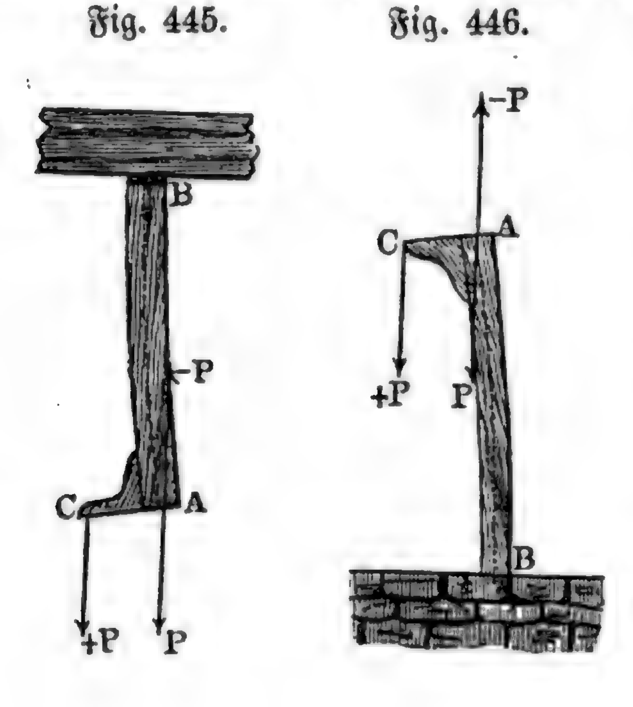
$$\overline{A_1 V_2} = e_2 = \frac{(P - P_1) \, r \sin. \alpha}{F E},$$

und es bilden daher die beiden Zweige $U V_1$ und $V_2 B$ der neutralen Axe im Querschnitte durch $A_1$ einen Sprung von der Größe

$$\overline{V_1 V_2} = \frac{P_1 r \sin. \alpha}{F E}.$$

§. 271 **Excentrischer Zug und Druck.** Wenn ein Balken oder eine Säule $AB$, Fig. 445 und Fig. 446, von einer Zug- oder Druckkraft ergriffen wird, welche zwar parallel zur Axe dieses Körpers, nicht aber in dieser Axe selbst wirkt, so wird ebenfalls die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit in Anspruch genommen. Diese excentrische Kraft $P$ läßt sich, wie bekannt, in eine Axenkraft $P$, und in ein Kräftepaar $(P, -P)$ zerlegen, dessen Armlänge $c$ der Abstand $CA$ des Angriffspunktes $C$ der Kraft $P$ von der Axe des Körpers, und dessen Moment folglich $= Pc$ zu setzen ist. Die resultirende Axenkraft $\overline{AP} = P$ spannt alle Fasern mit der constanten Kraft $S_1 = \frac{P}{F}$, wenn $F$ den Querschnitt des Körpers bezeichnet; das Kräftepaar hingegen biegt den Körper nach

Fig. 445. Fig. 446.



einem Halbmesser, welcher sich aus der bekannten Grundformel $Pxr = WE$ (§. 215) bestimmt, wenn man darin für das Kraftmoment $Px$ das Moment $Pc$ des Paares einführt. Es ist folglich $r = \frac{WE}{Pc}$, constant bei constantem $W$ oder Querschnitt $F$, und daher die von der neutralen Axe des Körpers gebildete Curve ein **Kreisbogen**.

Ist wieder $e$ der größte Abstand der Fasern von der durch den Querschnitt des Körpers gehenden neutralen Axe, so hat man die Maximalspannung, welche durch das Kräftepaar hervorgebracht wird:

$$S_2 = \frac{Pce}{W},$$

daher die Gesammtspannung:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{P}{F} + \frac{Pce}{W},$$

und folglich, wenn man dieselbe dem Tragmodul $T$ gleichsetzt, also einen bis zur Elasticitätsgrenze der äußersten Fasern gehenden Zug annimmt:

$$T = \frac{P}{F} + \frac{Pce}{W} = \left(1 + \frac{Fce}{W}\right)\frac{P}{F}.$$

Es ist also hiernach die **Tragkraft** der Säule:

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{Fce}{W}},$$

z. B. für einen **rectangulären** Querschnitt mit den Dimensionen $b$ und $h$:

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{6c}{h}},$$

und für einen **kreisrunden** Querschnitt mit dem Halbmesser $r$:

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{4c}{r}}.$$

Es läßt sich hiernach ermessen, daß durch den excentrischen Angriff einer Zug- oder Druckkraft die Festigkeit des Körpers weit mehr in Anspruch genommen wird als durch eine gleiche Kraft in der Axe des Körpers.

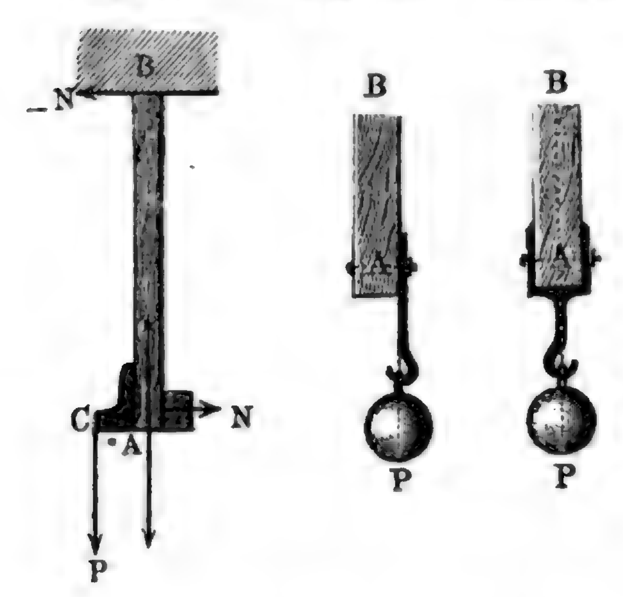
Wird die Biegung der Säule durch eine Stütze zur Seite verhindert, wie z. B. $BAC$, Fig. 447, darstellt, so bleibt natürlich $P = FT$.

Wirkt die Kraft am Umfange einer parallelepipedischen Säule $AB$, Fig. 448, und zwar im Abstande $c = \frac{h}{2}$ von der Axe, so hat man:

$$P = \frac{FT}{1+3} = {}^1/_4\, FT;$$

es ist also dann die Tragkraft nur ein Viertel von der Tragkraft beim centrischen Angriff (Fig. 449).

Fig. 447. Fig. 448. Fig. 449.




Für eine cylindrische Säule mit einer am Umfang angreifenden Kraft ist $c = r$, und daher:

$$P = \frac{FT}{1+4} = {}^1/_5\, FT,$$

d. i. ein Fünftel von der Tragkraft, welche ihren Angriffspunkt in der Axe des Körpers hat.

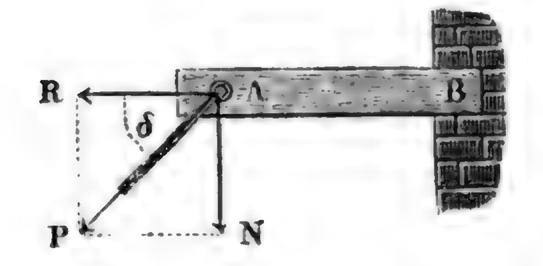
Diese Formeln lassen sich auch auf das Zerreißen, Zerdrücken und Abbrechen der Körper anwenden; es ist jedoch dann nöthig für jede Art der Zertheilung einen besonderen Festigkeitscoefficienten einzuführen, also statt

$$P = \frac{FK}{1 + \frac{Fce}{W}},\; = \frac{F}{\frac{1}{K_1} + \frac{Fce}{WK_2}}$$

zu setzen, wobei $K_1$ den Festigkeitscoefficienten für das Zerreißen (oder Zerdrücken) und $K_2$ den für das Zerbrechen bezeichnet.

**Schiefe Zug- und Druckkraft.** Die Theorie der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit kommt vorzüglich auch dann zur Anwendung, wenn eine Kraft $P$ unter einem schiefen Winkel $RAP = \delta$ gegen die Axe eines Balkens $AB$, Fig. 450 wirkt. Von den beiden Componenten $R = P\cos.\delta$ und $N = P\sin.\delta$ wirkt der eine ziehend und der andere biegend auf den Körper, und es vereinigt sich auch hier die durch die erstere Seitenkraft bewirkte Spannung über den ganzen Querschnitt $F$: §. 272


Fig. 450.




$$S_1 = \frac{P\cos.\delta}{F}$$

mit der durch das Moment $Pl\sin.\delta$ des zweiten Componenten bewirkten Spannung:

$$S_2 = \frac{P\sin.\delta\,.\,le}{W}$$

der äußersten Fasern, so daß sich auch wieder

$$T = S = S_1 + S_2 = \frac{P\, cos.\, \delta}{F} + \frac{P\, l\, e\, sin.\, \delta}{W},$$

oder vereinfacht,

$$T = P\left(\frac{cos.\, \delta}{F} + \frac{l\, e\, sin.\, \delta}{W}\right) \text{ setzen läßt.}$$

Hiernach ist das gesuchte Tragvermögen:

$$P = \frac{F\, T}{cos.\, \delta + \frac{F\, l\, e}{W}\, sin.\, \delta},$$

und umgekehrt, der entsprechende Querschnitt:

$$F = \frac{P}{T}\left(cos.\, \delta + \frac{F\, l\, e}{W}\, sin.\, \delta\right),$$

oder wenn man für die Biegung einen anderen Tragmodul $T_1$ einführt als für den einfachen Zug ($T$):

$$F = P\left(\frac{cos.\, \delta}{T} + \frac{F\, l\, e}{W\, T_1}\, sin.\, \delta\right).$$

Für einen parallelepipedischen Balken ist

$$\frac{F\, e}{W} = \frac{6}{h}, \text{ und folglich:}$$

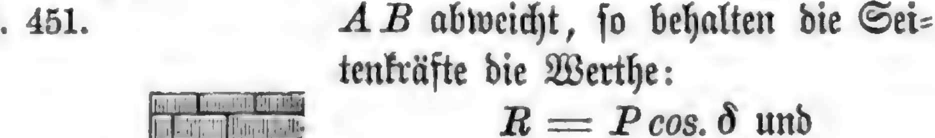
$$F = P\left(\frac{cos.\, \delta}{T} + \frac{6\, l}{h\, T_1}\, sin.\, \delta\right),$$

und für einen cylindrischen Balken hat man

$$\frac{F\, e}{W} = \frac{4}{r}, \text{ daher:}$$

$$F = P\left(\frac{cos.\, \delta}{T} + \frac{4\, l}{r\, T_1}\, sin.\, \delta\right).$$

Dieselben Formeln gelten auch für den in Fig. 451 abgebildeten Fall, wo der erste Component $R$ durch Druck auf den Balken wirkt. Ist hier wieder $\delta$ der Winkel $PAR$, um welchen die Kraft $P$ von der Balkenaxe $AB$ abweicht, so behalten die Seitenkräfte die Werthe:



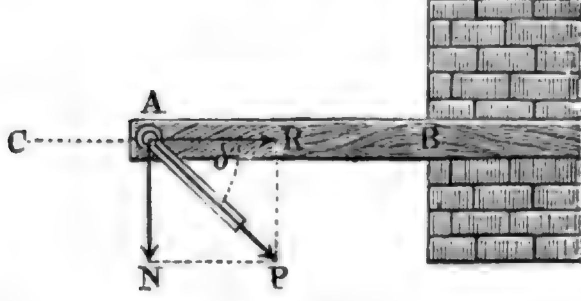
$$R = P\, cos.\, \delta \text{ und}$$
$$N = P\, sin.\, \delta.$$

Um die Tragkraft des Balkens zu finden, hat man natürlich hier die Spannung durch $R$:

$$S_1 = \frac{P\, cos.\, \delta}{F}$$



Fig. 451.




mit der größten Spannung

$$S_2 = \frac{P\, l\, e \sin. \delta}{W}$$

durch Biegung zu vereinigen, und daher in der oben gefundenen Formel:

$$T = P\left(\frac{\cos. \delta}{F} + \frac{l\, e \sin. \delta}{W}\right) \text{ oder:}$$

$$F = \frac{P}{T}\left(\cos. \delta + \frac{F\, l\, e}{W} \sin. \delta\right)$$

für $T$ nicht den Tragmodul des Zerreißens, sondern den des Zerdrückens zu substituiren.

In jedem der im Vorstehenden behandelten Fälle wird natürlich die neutrale Fasernschicht aus dem Schwerpunkte verrückt, und zwar um die Größe:

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} e = \frac{S_1}{S_2} e = \frac{W \operatorname{cotg.} \delta}{F\, e\, x},$$

z. B. für den parallelepipedischen Balken um

$$e_1 = \frac{h \operatorname{cotg.} \delta}{6\, x}.$$

Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß aus der Vereinigung der durch die Biegung bewirkten größten Ausdehnung und Compression mit der über den ganzen Querschnitt des Körpers gleichmäßig verbreiteten Ausdehnung oder Compression der Fasern, die Ausdehnung oder Compression

$$\sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{S_1 \pm S_2}{E} = \frac{P}{E}\left(\frac{\cos. \delta}{F} \pm \frac{l\, e \sin. \delta}{W}\right)$$

hervorgeht.

Durch Einführung der Tragmodeln erhalten wir, wenn wir noch der Sicherheit wegen, bei Holz und Gußeisen nur $\frac{T}{3}$ in Rechnung bringen,

1) für **Holz in beiden Fällen**:

$$P = \frac{750\, F}{\cos. \delta + \frac{6\, l}{h} \sin. \delta} = \frac{750\, F}{\cos. \delta + \frac{4\, l}{r} \sin. \delta},$$

2) für **Gußeisen**, im ersten Falle (Fig. 450):

$$P = \frac{3500\, F}{\cos. \delta + \frac{6\, l}{h} \sin. \delta} = \frac{3500\, F}{\cos. \delta + \frac{4\, l}{r} \sin. \delta},$$

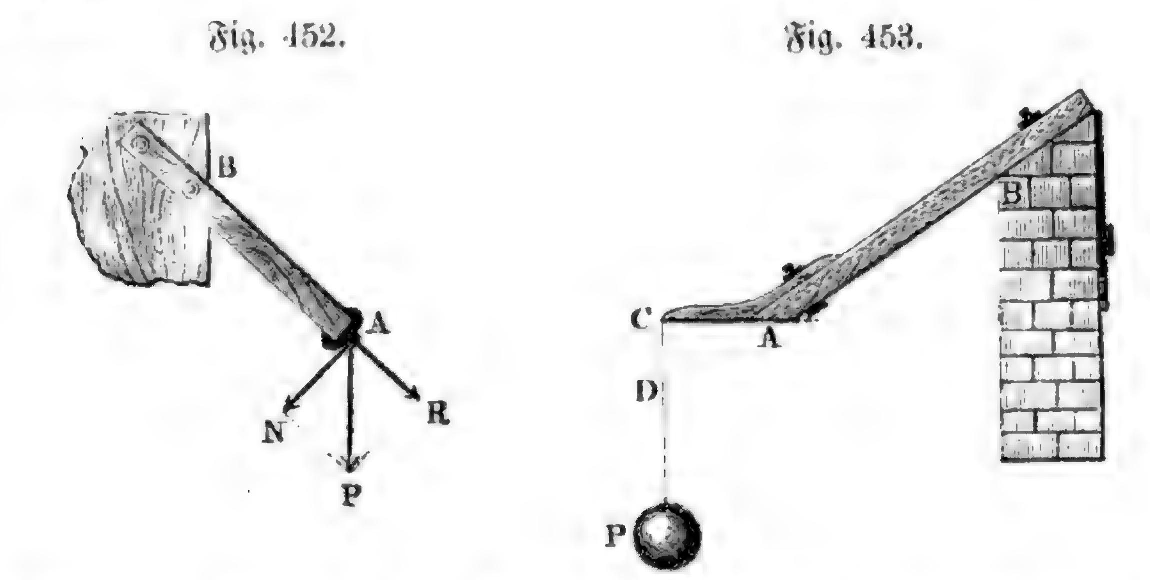
und in dem zweiten Falle (Fig. 451):

$$P = \frac{9000\, F}{\cos. \delta + \frac{6\, l}{h} \sin. \delta} = \frac{9000\, F}{\cos. \delta + \frac{4\, l}{r} \sin. \delta}.$$

§. 273 Der im Vorstehenden behandelte Fall kommt in vielen Fällen der Anwendung vor. Hängt z. B. ein Gewicht $P$ an einer gegen den Horizont geneigten Säule $AB$, Fig. 452, so ist, wenn deren Axe um den Winkel $PAR = \delta$ von der Verticalen abweicht, die Zugkraft $R = P \cos. \delta$, und die Biegungskraft $N = P \sin. \delta$, und daher

$$P = \frac{FT}{\cos.\delta + \frac{6l}{h}\sin.\delta}$$

zu setzen.




Wenn, wie Fig. 453 vor Augen führt, bei der schiefen Wirkung der Kraft $P$ auch noch der Angriffspunkt $C$ derselben excentrisch liegt, so muß man zur Beurtheilung der Tragkraft desselben diesen Angriffspunkt erst nach $D$ in die Verlängerung der Axe $AB$ des Balkens legen, also statt der Länge $BA = l$, die Länge $BD = BA + AD = l + \frac{c}{\sin.\delta}$ in Rechnung bringen, wobei vorausgesetzt wird, daß der Horizontalabstand $CA$ durch $c$ und die Abweichung $CDA$ der Balkenaxe von der Verticalen durch $\delta$ bezeichnet wird.

Ebenso ist für die schiefe Säule $AB$, Fig. 454, wenn dieselbe um den Winkel $\delta$ von der Verticalen abweicht, die mit Sicherheit zu tragende Last:

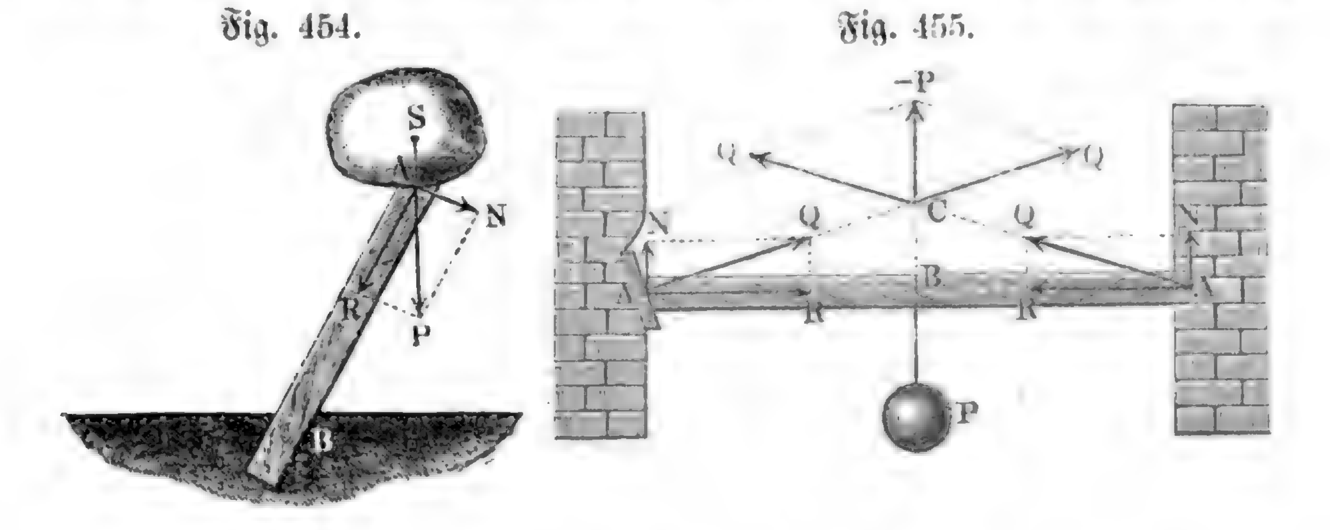
$$P = \frac{FT}{\cos.\delta + \frac{6l}{h}\sin.\delta} = \frac{FT}{\cos.\delta + \frac{4l}{r}\sin.\delta},$$

worin für $T$ der Modul für die Compression einzusetzen ist, während in den ersten Fällen der für die Ausdehnung zu nehmen war.

Wenn ein belasteter Balken $AA$, Fig. 455, nicht frei aufliegt, sondern zwischen zwei Wänden eingezwängt ist, so kommt ebenfalls eine Kraftzerlegung vor, aus welcher eine Compression und eine Biegung desselben hervorgeht. Weichen die Endflächen $A$, $A$ dieses Balkens um den Winkel $\delta$ von dem

Querschnitt desselben ab, und wirkt die Last $P$ in der Mitte $B$ des Balkens, so reagiren die Seitenwände mit zwei Kräften $Q$ und $Q$ auf die Enden des

Fig. 454. Fig. 455.




Balkens, welche unter dem Winkel $\delta$ gegen den Horizont geneigt sind und eine Mittelkraft $\overline{CP} = -P$ geben, wodurch die Kraft $P$ aufgehoben wird.

Es ist hiernach:

$$P = 2\,Q \cos. S\,C\,P = 2\,Q \sin. \delta,$$

folglich umgekehrt:

$$Q = \frac{P}{2 \sin. \delta}.$$

Ferner resultirt aus der Reaction $S$ die Axen- oder Druckkraft:

$$R = Q \cos. \delta = \frac{P}{2} \frac{\cos. \delta}{\sin. \delta} = \tfrac{1}{2} P \operatorname{cotg.} \delta,$$

und die Normal- oder Biegungskraft:

$$N = Q \sin. \delta = \frac{P}{2},$$

und es ist folglich:

$$T = S = S_1 + S_2 = \frac{R}{F} + \frac{N \,.\, \tfrac{1}{2}\, l\, e}{W},$$

d. i.:

$$T = \frac{P \operatorname{cotg.} \delta}{2\,F} + \frac{P\,l\,e}{4\,W},$$

und daher die Tragkraft:

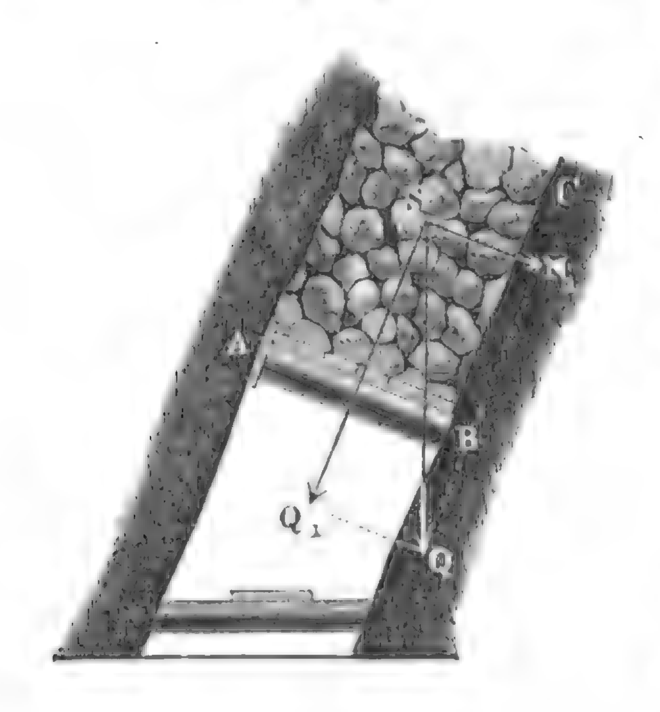
$$P = \frac{2\,F\,T}{\operatorname{cotg.} \delta + \tfrac{1}{2} \dfrac{F\,l\,e}{W}}$$

zu setzen.

Derselbe Fall tritt auch ein, wenn ein geneigt liegender Stempel $A\,B$, Fig. 456 (a. f. S.), eine über ihm aufgeschüttete Last $Q$ trägt. Nur ist hier $Q$ erst in eine Normalkraft $Q_1$ rechtwinkelig zur Axe des Stempels und

in eine Seitenkraft $N_1$ rechtwinkelig gegen die Seitenwand (in der bergmännischen Sprache: das Liegende) zu zerlegen. Sehen wir der Sicherheit wegen von der Reibung der lockeren Masse (Gesteinsstücke) auf dem Liegenden ab; bezeichnen die Abweichung der Endfläche des Stempels von dem Querschnitte desselben durch $\delta$, und die Neigung des Liegenden $BC$ gegen den Horizont durch $\beta$, so erhalten wir:

Fig. 456.




$$Q_1 = Q\, sin.\beta \text{ und}$$

$$= \frac{2FT}{cotg.\,\delta + \frac{1}{4}\frac{Fle}{W}}$$

(s. §. 240), und daher:

$$Q = \frac{2FT}{\left(cotg.\,\delta + \frac{1}{4}\frac{Fle}{W}\right) sin.\beta}.$$

Beispiele. 1) Welche Querdimensionen muß man einem schiefliegenden Balken $AB$, Fig. 452, aus Fichtenholz geben, welcher eine Länge von 9 Fuß, eine Neigung von 60 Grad gegen den Horizont hat und am Ende $A$ eine Last $P = 6000$ Pfund trägt? Die Formel

$$P = \frac{FT}{cos.\,\delta + \frac{6l}{h} sin.\,\delta}$$

giebt, wenn man $P = 6000$, $T = 750$ Pfund, $\delta = 90^0 - 60^0 = 30^0$, $l = 9 \,.\, 12 = 108$ Zoll einführt, und $\frac{b}{h} = \frac{5}{7}$ annimmt:

$$F = bh = \frac{5}{7}h^2 = \frac{6000}{750}\left(cos.30^0 + \frac{6\,.\,108}{h}\, sin.\,30^0\right), \text{ d. i.:}$$

$$h^2 = 11{,}2\,.\left(0{,}866 + \frac{648\,.\,0{,}500}{h}\right) = 9{,}70 + \frac{3629}{h}.$$

Es ist annähernd:

$$h = \sqrt[3]{3629} = 15{,}37,$$

hiernach schärfer:

$$h = \sqrt[3]{3629 + 9{,}70\,.\,15{,}37} = \sqrt[3]{3778} = 15{,}6 \text{ Zoll}$$

und folglich

$$b = \frac{5}{7}h = 11{,}1 \text{ Zoll.}$$

2) In welcher Entfernung von einander sind die 12 Zoll starken Tragstempel $AB$ eines sogenannten Förstenbaues $ABC$, Fig. 456, zu legen, wenn derselbe 4 Fuß weit ist und sich 60 Fuß hoch auf einem 70 Grad fallenden Gange in die Höhe zieht, und vorausgesetzt wird, daß das Gewicht eines Cubikfußes Berge (Gesteinsstücken) 65 Pfund beträgt? Wird die gesuchte Entfernung mit $x$ bezeichnet, so hat man das auf je einem Stempel ruhende Gewicht:

$$Q = 4 \,.\, 60 \,.\, 65\, x = 15600\, x,$$

und folglich den Druck auf den Stempel:

$$Q_1 = Q \sin. 70^0 = 15600\, x \sin. 70^0 = 15600 \,.\, 0{,}9397\, x = 14659\, x \text{ Pfd.}$$

Sind die Endflächen $A\,A$ eines Stempels unter einem Winkel von $\delta = 20$ Grad abgeschrägt, so hat man:

$$14659\, x = \frac{2\,F\,T}{cotg.\, 20^0 + \frac{2\,l}{d}} = \frac{2 \,.\, 113{,}1 \,.\, 750}{2{,}747 + \frac{2 \,.\, 48}{12}} = \frac{169650}{10{,}747},$$

und daher:

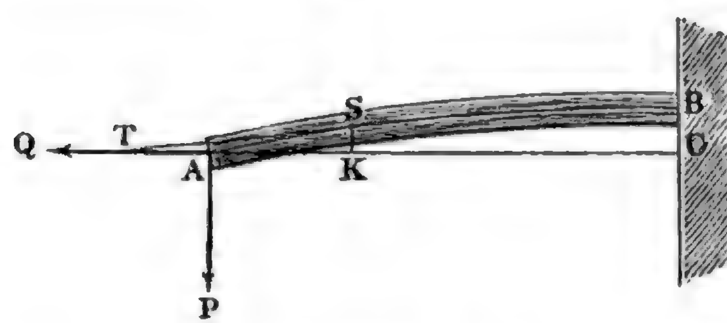
$$x = \frac{169650}{10{,}747 \,.\, 14659} = 1{,}077 \text{ Fuß} = 12{,}9 \text{ Zoll};$$

also der nöthige Zwischenraum zwischen je zwei Stempeln:

$$x - d = 0{,}9 \text{ Zoll}.$$

**Biegung der gespannten Balken.** Die normale Tragkraft $P$ (§. 274) eines Balkens $A\,B$, Fig. 457, wird nur bei einem kurzen Balken und durch Hinzutritt einer kleinen Axenkraft $Q$ vermindert; wenn hingegen die Länge des Balkens und die Zugkraft eine gewisse Grenze überschreiten, so wirkt die letztere durch ihr Moment dem Momente der Normalkraft in dem Maße entgegen, daß dadurch die Biegung des Körpers herabgezogen und das Tragvermögen des Balkens vergrößert wird.






Setzen wir wieder die Coordinaten der von der neutralen Axe des Balkens gebildeten elastischen Linie $A\,S\,B$, Fig. 457, $A\,K = x$ und $K\,S = y$, so haben wir das Moment der Kräfte in Hinsicht auf einen Punkt $S$ in dieser Axe:

$$P\,x - Q\,y,$$

und können daher (nach §. 215)

$$(P\,x - Q\,y)\, r = W\,E$$

setzen.

Führen wir wieder

$$r = - \frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

ein, wo $\alpha$ den Tangentenwinkel $S\,T\,K$ bedeutet, und bezeichnen wir noch, zur Vereinfachung,

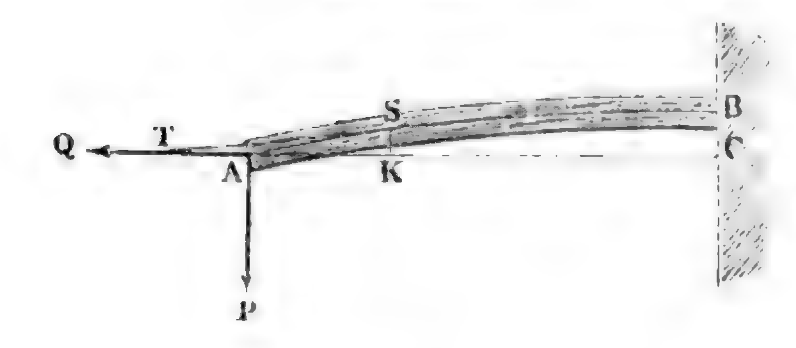
$\sqrt{\frac{P}{W\,E}}$ durch $p$, sowie $\sqrt{\frac{Q}{W\,E}}$ durch $q$, so erhalten wir die Gleichung:

$$\partial \alpha = - \frac{\partial x}{r} = - \frac{(P\,x - Q\,y)\, \partial x}{W\,E} = - (p^2\, x - q^2\, y)\, \partial x.$$

Setzen wir nun

$$1)\ y = \frac{p^2 x}{q^2} - (m\,\varepsilon^{qx} + n\,\varepsilon^{-qx}),$$

Fig. 458.




worin $m$ und $n$ noch zu bestimmende Constanten und $\varepsilon$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (s. analyt. Hülfslehren, Art. 19) bezeichnen, so erhalten wir:

$$2)\ \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p^2}{q^2} - (m\,\varepsilon^{qx} - n\,\varepsilon^{-qx})\,q,$$

und da nun das Differenzial des letzten Ausdruckes, nämlich:

$$\partial \alpha = -(m\,\varepsilon^{qx} + n\,\varepsilon^{-qx})\,q^2\,\partial x,$$

durch Substitution der Gleichung 1) wieder auf die obige Grundformel:

$$\partial \alpha = \left(y - \frac{p^2 x}{q^2}\right) q^2\,\partial x = -(p^2 x - q^2 y)\,\partial x$$

führt, so ist auch hiermit die Richtigkeit des Ausdruckes unter 1) für $y$ dargethan.

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so erhalten wir durch Substitution dieser Werthe in 1) folgende Gleichung:

$$0 = 0 - (m\,\varepsilon^0 + n\,\varepsilon^0), \text{ d. i.}$$

$$m + n = 0,$$

und da für $x = l$, $\alpha = 0$ ist, so ergiebt sich durch Substitution dieser Werthe in 2) die Gleichung:

$$0 = \frac{p^2}{q^2} - (m\,\varepsilon^{ql} - n\,\varepsilon^{-ql})\,q,$$

oder, wenn man aus der vorigen Gleichung $n = -m$ einsetzt:

$$0 = \frac{p^2}{q^2} - m\,q\,(\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}),$$

so daß sich nun:

$$m = -n = \frac{p^2}{q^3\,(\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql})}$$

bestimmt, und das Kraftmoment:

$$Px - Qy = Q\,m\,(\varepsilon^{qx} - \varepsilon^{-qx})$$

$$= \frac{P}{q}\left(\frac{\varepsilon^{qx} - \varepsilon^{-qx}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}\right) \text{ ausfällt.}$$

Jedenfalls ist das letztere ein Maximum für den festen Punkt $B$ des Körpers, welcher sich durch $x = AC = l$ und $y = BC = a$ bestimmt, und zwar:

$$Pl - Qa = \frac{P}{q}\left(\frac{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}\right).$$

Ist die Axenkraft $ql$ ein ächter Bruch, hat man es also mit einem kurzen Balken und mit einer kleinen Axenkraft $Q$ zu thun, so läßt sich

$$\varepsilon^{ql} = 1 + ql + \frac{q^2 l^2}{2} + \frac{q^3 l^3}{6} + \cdots$$

sowie

$$\varepsilon^{-ql} = 1 - ql + \frac{q^2 l^2}{2} - \frac{q^3 l^3}{6} + \cdots,$$

und hiernach das Kraftmoment:

$$Pl - Qa = \frac{Pl(1 + {}^1/_6\, q^2 l^2)}{1 + {}^1/_2\, q^2 l^2} = Pl\,(1 + {}^1/_6\, q^2 l^2)(1 - {}^1/_2\, q^2 l^2)$$

$$= Pl\,(1 - {}^1/_3\, q^2 l^2) = Pl\left(1 - \frac{Ql^2}{3\,WE}\right)$$

setzen.

Ist dagegen die Axenkraft $Q$ so groß, daß $ql$ mindestens die Zahl 2 erreicht, so läßt sich

$$\varepsilon^{-ql} = \frac{1}{\varepsilon^{ql}}$$

gegen $\varepsilon^{ql}$ vernachlässigen, daher:

$$\frac{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}} = \frac{\varepsilon^{ql}}{\varepsilon^{ql}} = 1$$

setzen, so daß dann einfach das Kraftmoment:

$$Pl - Qa = \frac{P}{q} = P\sqrt{\frac{WE}{Q}}$$

ausfällt.

**Tragkraft eines gespannten Balkens.** (§. 275) Mit Hülfe des im vorstehenden Paragraphen gefundenen Momentes der äußeren Kräfte $P$ und $Q$ läßt sich nun die Tragkraft des Balkens auf dem in dem Obigen mehrfach betretenen Wege wie folgt bestimmen.

Die Kraft $Q$ zieht den Körper in seiner Axenrichtung mit der Kraft

$$S_1 = \frac{Q}{F}$$

pr. Flächeneinheit, und durch das Moment $Pl - Qa$ beider Kräfte $P$ und $Q$ erleidet die Faser im größten Abstande $e_1$ von der neutralen Axe die Spannung

$$S_2 = \frac{(Pl - Qa)\,e}{W},$$

und es ist folglich die ganze Spannung

$$S = S_1 + S_2 = \frac{Q}{F} + \frac{(Pl - Qa)\,e}{W}.$$

Wenn dieselbe die Elasticitätsgrenze erreicht, so ist natürlich $S = T$, daher läßt sich

$$T = \frac{Q}{F} + \frac{(Pl - Qa)\,e}{W} \text{ setzen.}$$

Uebrigens ist auch noch dann, wenn der Tragmodul $T_1$ der Druckelasticität von dem Tragmodul $T$ der Zugelasticität abweicht,

$$T_1 = -\frac{Q}{F} + \frac{(Pl - Qa)\,e}{W}$$

zu setzen, wobei aber $e$ den größten Abstand der zusammengedrückten Fasern von der neutralen Axe bezeichnet. In beiden Fällen hat man statt

$$Pl - Qa = \frac{P}{q}\left(\frac{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}\right)$$

einzuführen, so daß sich nun die gesuchte Tragkraft entweder:

$$P = \left(\frac{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}\right)\left(1 - \frac{Q}{FT}\right)\frac{WTq}{e},$$

oder:

$$P = \left(\frac{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}\right)\left(1 + \frac{Q}{FT_1}\right)\frac{WT_1q}{e} \text{ ergiebt.}$$

Da für eine kleine Spannkraft $Q$:

$$Pl - Qa = Pl\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right)$$

gesetzt werden kann, so hat man hier, wenn man nur die Ausdehnung in Betracht zieht,

$$P = \frac{(FT - Q)\,W}{\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right)Fle} = \left(1 + \frac{Ql^2}{3WE}\right)\left(1 - \frac{Q}{FT}\right)\frac{WT}{le}.$$

Ohne die Spannung $Q$ wäre die Tragkraft:

$$P_1 = \frac{WT}{le},$$

es ist daher das Verhältniß:

$$\frac{P}{P_1} = \left(1 + \frac{Ql^2}{3WE}\right)\left(1 - \frac{Q}{FT}\right),$$

und hiernach leicht zu ermessen, daß dieselbe durch $Q$ entweder vermindert oder vergrößert wird, je nachdem $\frac{Q}{FT}$ größer oder kleiner als $\frac{Ql^2}{3WE}$, d. i. je nachdem $\frac{3W}{Fl^2}$ größer oder kleiner als $\frac{T}{E}$ ist.

Für eine große Spannkraft, wo sich

$$Pl - Qa = P\sqrt{\frac{WE}{Q}}$$

setzen läßt, hat man dagegen die Tragkraft:

$$P = \left(1 - \frac{Q}{FT}\right)\sqrt{\frac{QW}{E}} \cdot \frac{T}{e}.$$

Dieser Ausdruck wird mit $\sqrt{Q} - \frac{\sqrt{Q^3}}{FT}$ zum Maximum, und zwar, wie sich durch einfaches Differenziiren und Nullsetzen des erhaltenen Differenzialquotienten leicht ergiebt, für

$$Q = \frac{FT}{3}.$$

Es ist die Größe dieses Maximalwerthes:

$$P = {}^2/_3\sqrt{\frac{FWT}{3E}} \cdot \frac{T}{e},$$

und das Verhältniß desselben zur Tragkraft $P_1$ des ungespannten Balkens:

$$\frac{P}{P_1} = {}^2/_3\, l\sqrt{\frac{FT}{3WE}} = {}^2/_3\, l\sqrt{\frac{\sigma F}{3W}}.$$

Für einen parallelepipedischen Balken von der Breite $b$ und der Höhe $h$ hat man $F = bh$, $W = \frac{bh^3}{12}$ und $e = {}^1/_2\, h$, daher:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{4l}{3h}\sqrt{\frac{T}{E}} = \frac{4l}{3h}\sqrt{\sigma}.$$

Besteht dieser Balken aus Holz, so ist

$$\sigma = \frac{T}{E} = \frac{1}{600},$$

und daher:

$$\frac{P}{P_1} = {}^4/_3\sqrt{\frac{1}{600}} \cdot \frac{l}{h} = 0{,}0544\,\frac{l}{h},$$

z. B. für $\frac{l}{h} = 30$, $P = 1{,}632\, P_1$;

es trägt also dann der Balken fast um zwei Drittel mehr, als wenn er nicht gespannt ist.

Für $\frac{l}{h} = \frac{10000}{544} = 18{,}4$ ist $P_1 = P$, und für Werthe von $\frac{l}{h}$, welche kleiner als 18,4 sind, fällt sogar $P_1$ kleiner als $P$ aus, wird also die Tragkraft $P$ des Balkens durch die Spannung $Q$ vermindert.

§. 276 **Torsion in Verbindung mit Zug- oder Druckkraft.** Wird eine Säule $AB$, Fig. 459, von einer Axenkraft $Q$ und einem Umdrehungskräftepaare $(P, -P)$ zugleich ergriffen, so findet eine Zusammensetzung von Torsions- und Zug- oder Druck-Elasticität statt, deren Resultat sich wie folgt beurtheilen läßt. Ist $S_1 = \frac{Q}{F}$ die von der Kraft $Q$ hervorgebrachte Axenspannung pro Einheit der Querschnittsfläche, und $S_2 = \frac{Pae}{W}$ die dem Torsionsmomente entsprechende Spannung pro Flächeneinheit, im

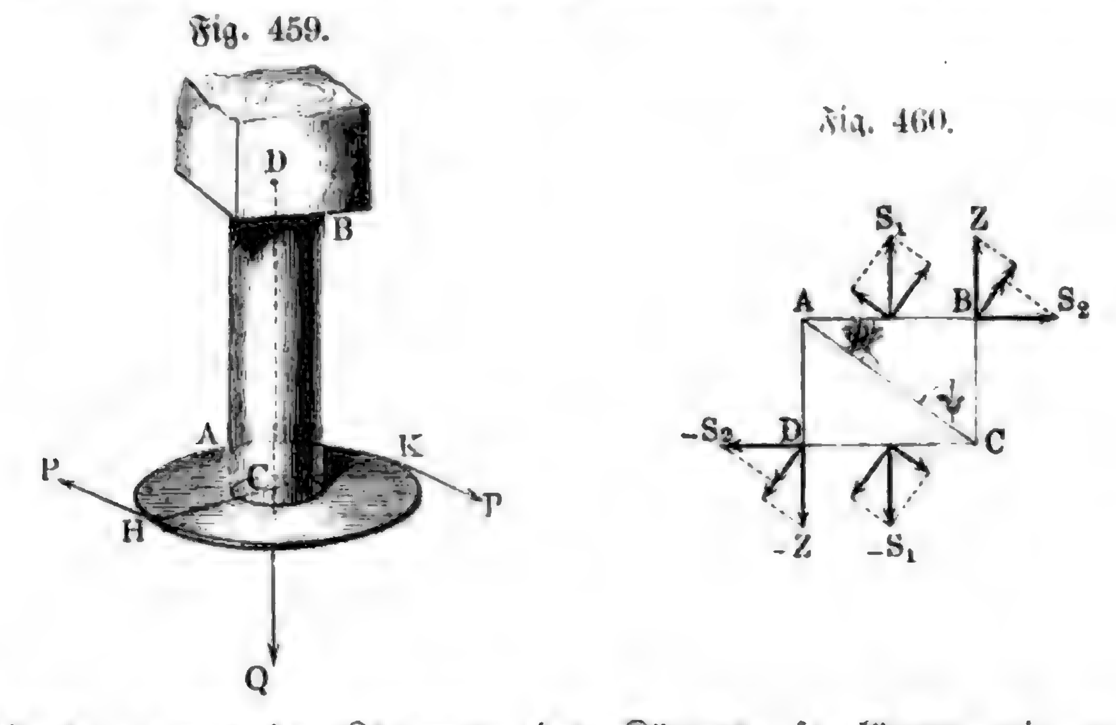



Fig. 459. Fig. 460.

Abstande $e$ von der Längenaxe des Körpers, so können wir annehmen, daß ein parallelepipedisches Körperelement $ABCD$, Fig. 460, von den Normalkräften $\overline{AB}\,.\,S_1$ und $-\overline{CD}\,.\,S_1$ auf $AB$ und $CD$, sowie von dem Kräftepaare $(\overline{AB}\,.\,S_2, -\overline{CD}\,.\,S_2)$ längs $AB$ und $CD$, und von dem Gegenkräftepaare $(\overline{BC}\,.\,Z, -\overline{AD}\,.\,Z)$ längs $BC$ und $AD$ ergriffen wird. Wenn nun die Diagonalebene $AC$ den Winkel $\psi$ mit der Axe des Körpers oder der Richtung der Kraft $S_1$ einschließt, so sind die Componenten der Kräfte $S_1$, $S_2$ und $Z$ auf der einen Seite von $AC$,

$$\overline{AB}\,.\,S_1 \sin.\psi,\ \overline{AB}\,.\,S_2 \cos.\psi \text{ und } \overline{BC}\,.\,Z \sin.\psi,$$

und es folgt daher die ganze Normalkraft auf $AC$:

$$\overline{AC}\,.\,S = \overline{AB}\,.\,S_1 \sin.\psi + \overline{AB}\,.\,S_2 \cos.\psi + \overline{BC}\,.\,Z \sin.\psi.$$

oder da das Moment von $(\overline{BC}\,.\,Z, -\overline{AD}\,.\,Z)$ gleich ist dem Momente von $(\overline{AB}\,.\,S_2, -\overline{CD}\,.\,S_2)$, d. i.:

$$AB\,.\,BC\,.\,Z = BC\,.\,AB\,.\,S_2, \text{ also } Z = S_2 \text{ ist,}$$

$$\overline{AC}\,.\,S = \overline{AB}\,.\,S_1 \sin.\psi + (\overline{AB} \cos.\psi + \overline{BC} \sin.\psi)\, S_2,$$

so daß schließlich die Normalspannung $AC$ pro Flächeneinheit:

$$S = \frac{AB}{AC} \cdot S_1 \sin. \psi + \left(\frac{AB}{AC} \cos. \psi + \frac{BC}{AC} \sin. \psi\right) S_2 \text{ folgt.}$$

Nun ist aber $\frac{AB}{AC} = \sin. \psi$ und $\frac{BC}{AC} = \cos. \psi$, daher folgt:

$$S = S_1 (\sin. \psi)^2 + 2 S_2 \sin. \psi \cos. \psi = S_1 (\sin. \psi)^2 + S_2 \sin. 2\psi$$
$$= S_1 \left(\frac{1 - \cos. 2\psi}{2}\right) + S_2 \sin. 2\psi. \quad \text{(Vergl. §. 259).}$$

Dieser Werth ist ein Maximum von $S$ für $tang. 2\psi = -\frac{2 S_2}{S_1}$ oder

$\sin. 2\psi = \frac{2 S_2}{\sqrt{S_1^2 + (2 S_2)^2}}$ und $\cos. 2\psi = -\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + (2 S_2)^2}}$, und zwar

$$S_m = \frac{S_1}{2}\left(1 + \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + (2 S_2)^2}}\right) + \frac{2 S_2^2}{\sqrt{S_1^2 + (2 S_2)^2}}$$
$$= \frac{S_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{S_1}{2}\right)^2 + S_2^2}.$$

Setzen wir die obigen Werthe von $S_1$ und $S_2$ hier ein, so erhalten wir die gesuchte Maximalspannung

$$S_m = \frac{Q}{2F} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2F}\right)^2 + \left(\frac{Pae}{W}\right)^2},$$

und damit der Körper den Wirkungen dieser Kräfte $P$ und $Q$ mit Sicherheit widerstehe, ist $S_m$ dem Tragmodul $T$, also

$$\frac{Q}{2F} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2F}\right)^2 + \left(\frac{Pae}{W}\right)^2} = T$$

zu setzen, woraus die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{Pae}{W}\right)^2 = T^2 - \frac{QT}{F} \text{ folgt.}$$

Es ist daher das zulässige Torsionsmoment

1) $Pa = \frac{W}{e}\sqrt{T^2 - \frac{QT}{F}}$, sowie die zulässige Axenkraft

2) $Q = FT - \frac{F}{T}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2.$

Um die gegebenen Kräften $P$ und $Q$ entsprechenden Querschnittsdimensionen zu finden, setzen wir, je nachdem die Torsions- oder die Axenkraft überwiegend ist, entweder

$$\frac{W}{e} = \frac{Pa}{\sqrt{T^2 - \frac{QT}{F}}}, \text{ oder}$$

$$F = \frac{Q}{T - \frac{1}{T}\left(\frac{P a e}{W}\right)^2}.$$

Für eine parallelepipedische Säule mit den Querdimensionen $b$ und $h$ ist

$$F = b h,\ W = (b^2 + h^2)\frac{b h}{12} \text{ und } e = {}^1/_2 \sqrt{b^2 + h^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{b h}{6}\sqrt{b^2 + h^2} = \frac{P a}{\sqrt{T^2 - \frac{Q T}{b h}}} = \frac{P a}{T}\left(1 - \frac{Q}{b h T}\right)^{-1/2}, \text{ sowie}$$

$$F = b h = \frac{Q}{T - \frac{36}{(b^2 + h^2) T}\left(\frac{P a}{b h}\right)^2} = \frac{Q}{T}\left[1 - \left(\frac{6 P a}{\sqrt{b^2 + h^2}.b h T}\right)^2\right]^{-1}.$$

Kennt man noch das Dimensionsverhältniß $v = \frac{b}{h}$, so kann man mittels dieser Formeln die Dimensionen $b$ und $h$ selbst berechnen.

Für eine Säule mit quadratischer Basis ist $b = h$, daher

$$\frac{h^3\sqrt{2}}{6} = \frac{P a}{T}\left(1 - \frac{Q}{h^2 T}\right)^{-1/2}, \text{ und}$$

$$h = b = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{{}^1/_2} P a}{T}}\left(1 - \frac{Q}{h^2 T}\right)^{-1/6}, \text{ sowie}$$

$$h^2 = \frac{Q}{T}\left[1 - {}^1/_2\left(\frac{6 P a}{h^3 T}\right)^2\right]^{-1}, \text{ und}$$

$$h = b = \sqrt{\frac{Q}{T}}\left[1 - {}^1/_2\left(\frac{6 P a}{h^3 T}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Für eine cylindrische Säule oder Welle hat man:

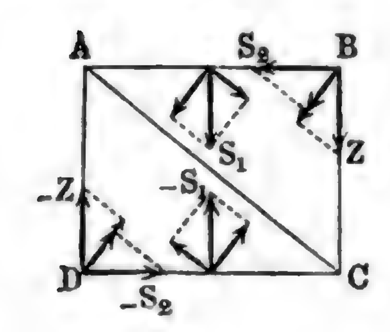
$$F = \pi r^2,\ W = \frac{\pi r^4}{2}, \text{ und } e = r, \text{ daher}$$

$$\frac{\pi r^3}{2} = \frac{P a}{\sqrt{T^2 - \frac{Q T}{\pi r^2}}} \text{ und } r = \sqrt[3]{\frac{2 P a}{\pi T}}\left(1 - \frac{Q}{\pi r^2 T}\right)^{-1/6}, \text{ sowie}$$

$$\pi r^2 = \frac{Q}{T - \frac{1}{T}\left(\frac{2 P a}{\pi r^2}\right)^2}, \text{ und } r = \sqrt{\frac{Q}{\pi T}}\left[1 - \left(\frac{2 P a}{\pi r^2 T}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Wirkt die Axenkraft $Q$ zusammendrückend, so behalten die im Vorstehenden gefundenen Formeln ihre Anwendung, da hier nicht bloß die Richtung der Kraft $S_1$ (Fig. 461) die entgegengesetzte wird, sondern auch die Kräfte $S_2$ und $Z$ entgegengesetzt angenommen werden können, wenn es darauf ankommt, eine möglichst große Mittelkraft $S_m$ zu erhalten.

Fig. 461.




Beispiel. Wenn eine stehende Holzwelle von 10000 Pfund Gewicht das Umdrehungsmoment $Pa = 72000$ Zollpfund aufzunehmen hat, so ist bei dem Tragmodul $T = 400$ Pfund, der erforderliche Halbmesser derselben:

$$r = \sqrt[3]{\frac{2\,P\,a}{\pi\,T}}\left(1 - \frac{Q}{\pi\,r^2\,T}\right)^{-1/6} = \sqrt[3]{\frac{0{,}6366\,.\,72000}{400}}\left(1 - \frac{10000}{400\,\pi\,r^2}\right)^{-1/6}$$

$$= \sqrt[3]{0{,}6366\,.\,180}\left(1 - \frac{7{,}958}{r^2}\right)^{-1/6}.$$

Annähernd ist

$$r = \sqrt[3]{114{,}6} = 4{,}85, \text{ daher}$$

$$\frac{7{,}958}{r^2} = \frac{7{,}958}{23{,}52} = 0{,}3383,$$

und

$$\left(1 - \frac{7{,}958}{r^2}\right)^{-1/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{0{,}6617}} = 1{,}071,$$

so daß nun schärfer der gesuchte Wellenhalbmesser

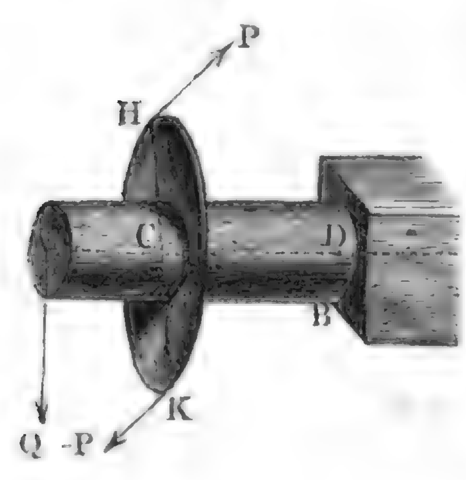
$$r = 4{,}85\,.\,1{,}071 = 5{,}194 \text{ Zoll},$$

und folglich der Durchmesser der Welle,

$$d = 10{,}39 \text{ Zoll folgt.}$$

**Torsion in Verbindung mit Biegung.** Nicht selten kommen auch §. 277 Fälle vor, daß ein Balken oder eine Welle von einer Torsions- und einer Biegungskraft zugleich ergriffen wird, namentlich sind die liegenden Radwellen in der Regel einer Torsion und Biegung zugleich ausgesetzt. Denken wir uns, um die Verhältnisse des Zusammenwirkens dieser zwei Kräfte zu erforschen, wieder einen prismatischen Körper $ABCD$, Fig. 462, welcher an einem Ende $BD$ festgehalten und am anderen Ende $A$ von einer Normal- oder Biegungskraft $Q$, zugleich aber noch an einer Stelle $C$ von einem Umdrehungs-Kräftepaare $(P, -P)$ ergriffen wird. Ist $l_1$ die Länge $AC$ der Welle, $W_1$ das Maß des Biegungsmomentes derselben und $e_1$ die größte Entfernung


Fig. 462.



eines Querschnittselementes von der neutralen Axe, so hat man die von der Kraft $Q$ erzeugte größte Axenspannung

$$S_1 = \frac{Q l_1 e_1}{W_1} \text{ (vergl. §. 235);}$$

bezeichnet dagegegen $a$ die Armlänge $HK$ des Kräftepaares $(P, -P)$, $W$ das Maß des Torsionsmomentes, und $e$ den größten Abstand eines Querschnittselementes von der Axe $CD$ dieses Körpers, so läßt sich die von dem Paare $(P, -P)$ erzeugte größte Schubspannung

$$S_2 = \frac{P a e}{W} \text{ setzen.}$$

Nun vertritt aber, wie leicht zu ermessen ist, die Spannung $S_1 = \frac{Q l_1 e_1}{W_1}$ die Stelle der absoluten Spannung $S_1 = \frac{Q}{F}$ im vorigen Paragraphen, daher läßt sich auch hier die Maximalspannung im ganzen Körper $ABCD$, Fig. 462,

$$S_m = \frac{S_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{S_1}{2}\right)^2 + S_2^2}, \text{ oder}$$

$$T = \frac{Q_1 l_1 e_1}{2 W_1} + \sqrt{\left(\frac{Q_1 l_1 e_1}{2 W_1}\right)^2 + \left(\frac{P a e}{W}\right)^2}$$

setzen, woraus dann die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{P a e}{W}\right)^2 = T^2 - \frac{Q l_1 e_1 T}{W_1} \text{ folgt.}$$

Es ist daher das zulässige Torsionsmoment

$$1) \quad P a = \frac{W}{e} \sqrt{T^2 - \frac{Q l_1 e_1 T}{W_1}} = \frac{W T}{e} \sqrt{1 - \frac{Q l_1 e_1}{W_1 T}},$$

sowie die Axenkraft

$$2) \quad Q = \frac{W_1}{l_1 e_1 T} \left[T^2 - \left(\frac{P a e}{W}\right)^2\right], \text{ wonach entweder}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{P a}{\sqrt{T^2 - \frac{Q l_1 e_1 T}{W_1}}}, \text{ oder}$$

$$\frac{W_1}{e_1} = \frac{Q l_1}{T - \frac{1}{T}\left(\frac{P a e}{W}\right)^2} \text{ zu setzen ist.}$$

Für den quadratischen Schaft ist

$$\frac{W}{e} = \frac{h^3 \sqrt{2}}{6} \text{ und } \frac{W_1}{e_1} = \frac{h^3}{6}, \text{ daher}$$

$$h^3 = \frac{6\sqrt{1/_2}\,P a}{T}\left(1 - \frac{6\,Q l_1}{h^3\,T}\right)^{-1/_2}, \text{ und}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{1/_2}\,P a}{T}}\left(1 - \frac{6\,Q l_1}{h^3\,T}\right)^{-1/_6}, \text{ sowie}$$

$$h^3 = \frac{6\,Q l_1}{T}\left[1 - \left(\frac{6\sqrt{1/_2}\,P a}{h^3\,T}\right)^2\right]^{-1} \text{ und}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\,Q l_1}{T}}\left[1 - 1/_2\left(\frac{6\,P a}{h^3\,T}\right)^2\right]^{-1/_3};$$

wogegen für die cylindrische Welle

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi r^3}{2} \text{ und } \frac{W_1}{e_1} = \frac{\pi r^3}{4}, \text{ folglich}$$

$$r^3 = \frac{2}{\pi}\,\frac{P a}{T}\left(1 - \frac{4\,Q l_1}{\pi r^3\,T}\right)^{-1/_2}, \text{ und}$$

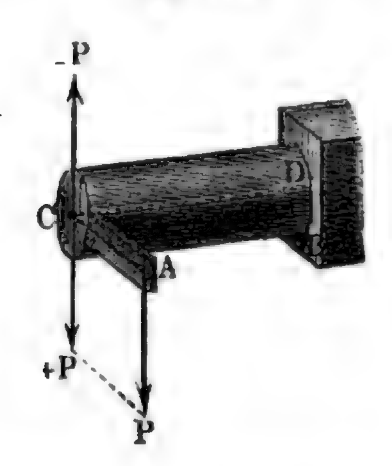
$$r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\,\frac{P a}{T}}\left(1 - \frac{4\,Q l_1}{\pi r^3\,T}\right)^{-1/_6}, \text{ sowie}$$

$$r^3 = \frac{4}{\pi}\,\frac{Q l_1}{T}\left[1 - \left(\frac{2\,P a}{\pi r^3\,T}\right)^2\right]^{-1}, \text{ und}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}\,\frac{Q l_1}{T}}\left[1 - \left(\frac{2\,P a}{\pi r^3\,T}\right)^2\right]^{-1/_3} \text{zu setzen ist.}$$

Sehr gewöhnlich ist es nicht ein Kräftepaar ($P, - P$), sondern eine excentrisch wirkende Kraft $P$, welche die Torsion eines Körpers $B\,C\,D$, Fig. 463, hervorbringt. Da sich eine solche Kraft in eine gleiche Centralkraft $\overline{CP} = + P$, und in ein Kräftepaar ($P, - P$) zerlegen läßt, dessen Armlänge $a$ der Normalabstand $C\,A$ zwischen der Axe $C\,D$ des Körpers und der Angriffslinie der Kraft $P$ ist, so hat man es in diesem Falle, selbst ohne Hinzutritt einer anderen Kraft $Q$, mit der zusammengesetzten Festigkeit zu thun, indem sich die aus ($P, - P$) hervorgehende Torsion mit der durch die Axenkraft $+ P$ bewirkten Biegung vereinigt. Es finden daher bei Bestimmung der Stärke eines solchen Körpers die letzten Formeln ihre unmittelbare Anwendung, wenn man darin $P l = Q l_1$ setzt.

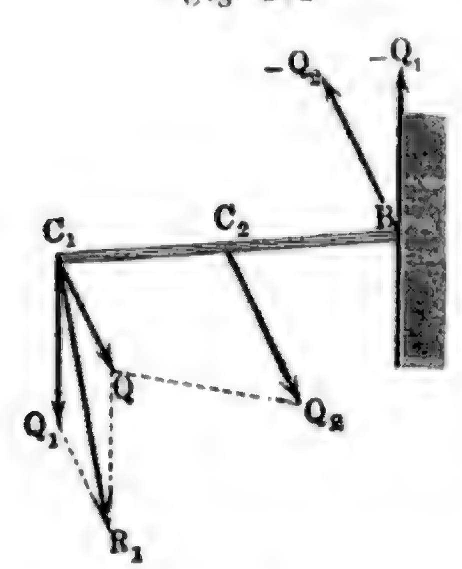
Fig. 463.




Tritt zu der excentrischen Kraft $P$ noch eine besondere Biegungskraft $Q$ mit dem Momente $Q l_1$ hinzu, so muß man natürlich in den letzten Formeln $P l + Q l_1$ statt $P l$ setzen.

§. 278 **Biegungskräfte in verschiedenen Ebenen.** Wenn ein Balken oder eine Welle $BC$, Fig. 464, von zwei Biegungskräften $Q_1$ und $Q_2$ ergriffen wird, deren Richtungen $C_1 Q_1$ und $C_2 Q_2$ zwar rechtwinkelig auf der Axe $C_1 B$ des Körpers stehen, aber unter sich selbst nicht parallel sind, so wird das Stück $C_2 B$ desselben von zwei Kräftepaaren $(Q_1, - Q_1)$ und $(Q_2, - Q_2)$ gebogen, welche daher zu einem einzigen Kräftepaare zu vereinigen sind, um die Art und Größe der Biegung beurtheilen zu können. Bezeichnen $l_1$ und $l_2$ die Hebelarme der Kräfte $Q_1$ und $Q_2$ in Hinsicht auf den festen Punkt $B$, sind also $Q_1 l_1$ und $Q_2 l_2$ die Momente derselben, und ist $\alpha$ der Winkel, welchen die Kraftrichtungen zwischen sich einschließen, wenn man sie durch einen einzigen Punkt legt, so hat man nach §. 95 das Moment des resultirenden Kräftepaares:

Fig. 464.




$$Rc = \sqrt{(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2\,(Q_1 l_1)\,(Q_2 l_2)\,cos.\,\alpha},$$

und es ist für den Winkel $\beta$, welchen die Ebene dieses Kräftepaares mit der des Paares $(Q_1, - Q_1)$ einschließt,

$$sin.\,\beta = \frac{Q_2 l_2}{Rc}.$$

Um die Größe dieses Kräftepaares $(R, - R)$ und die Ebene desselben zu finden, kann man die Kraft $Q_2$ von $C_2$ nach $C_1$ reduciren und die reducirte Kraft $Q = \frac{Q_2 l_2}{l_1}$ mit der Kraft $Q_1$ durch das Kräfteparallelogramm zu einer Mittelkraft $R_1$ vereinigen; das Product $R_1 l_1 = Rc$ ist dann die Größe des resultirenden Kräftepaares, und der Winkel $Q_1 C_1 R_1$, der Winkel $\beta$, welchen die Ebene dieses Paares mit der des Paares $(Q_1, - Q_1)$ einschließt. Diese Ebene ist natürlich auch diejenige, nach welcher der Körper gebogen wird, auch ergiebt sich mit Hülfe des gefundenen Momentes $Rc = R_1 l_1$ die größte Spannung des Körpers:

$$S = \frac{Rce}{W},$$

also wenn man diese dem Tragmodul $T$ gleichsetzt:

$$\frac{TW}{e} = \sqrt{(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2\,(Q_1 l_1)\,(Q_2 l_2)\,cos.\,\alpha}.$$

Wirkt nun auf diesen Körper $AB$ noch ein Umdrehungskräftepaar $(P, - P)$ mit dem Momente $Pa$, so ist die Maximalspannung

$$S_m = T = \frac{R c e_1}{2 W_1} + \sqrt{\frac{R c e_1}{2 W_1} + \left(\frac{P a e}{W}\right)^2}$$

zu setzen, wobei natürlich $W_1$ das Maß des Biegungsmomentes, $W$ das des Drehungsmomentes, und $e_1$ den größten Abstand des Körperumfanges von der neutralen Axe, dagegen $e$ den von der Längenaxe des Körpers in $D$ bezeichnet.

Hiernach ist

$$\left(\frac{P a e}{W}\right)^2 = T^2 - \frac{R c e_1 T}{W_1}$$
$$= T^2 - [(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2 (Q_1 l_1)(Q_2 l_2) \cos. \alpha] \frac{e_1 T}{W_1}.$$

Mit Hülfe der Formeln des vorigen Paragraphen lassen sich auch die erforderlichen Querschnittsdimensionen des Körpers finden, wenn man in denselben statt $Q l_1$ die Summe $Q_1 l_1 + Q_2 l_2$ einsetzt.

Wenn nur eine Biegungskraft $Q_1$ auf den Körper wirkt, und derselbe anstatt des Kräftepaares $(P, - P)$ von einer einzigen Umdrehungskraft $P$ ergriffen wird, welche sich in eine Axenkraft $P$ und in ein Umdrehungskräftepaar $(P, - P)$ zerlegen läßt, so hat man statt $Q_2 l_2$ das Moment $P l$ in den letzten Formeln einzusetzen.

Schlußanmerkung. Obgleich über keinen Gegenstand der Mechanik bis jetzt so viele Versuche angestellt worden sind, als über die Elasticität und Festigkeit der Körper, so bleibt doch noch vieles zu untersuchen und manche Unsicherheit zu beseitigen übrig. Wir haben Versuche hierüber von Ardant, Banks, Barlow, Bevan, Brix, Buffon, Burg, Duleau, Ebbels, Eytelwein, Finchan, Gerstner, Girard, Gauthey, Fairbairn und Hodgkinson, Lagerjhelm, Musschenbroek, Morveau, Navier, Rennie, Rondelet, Tredgold, Wertheim u. s. w. Die älteren Versuche werden sehr ausführlich abgehandelt in Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Bd. II., nächstdem in von Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. I. Eine umfänglichere Abhandlung über diesen Gegenstand liefert auch v. Burg im 19ten und 20sten Bande der Jahrbücher des polytechn. Instituts zu Wien. Man findet in diesen Schriften zum Theil auch abweichende Theorien abgehandelt. Der Versuche von Brix und Lagerjhelm ist schon oben (S. 360) gedacht worden. Neue und sehr umfängliche Versuche über die rückwirkende Festigkeit der Steinarten, von Brix, rapportirt der 32ste Jahrgang (1853) der Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen. Eine einfache Theorie der Biegung von Brix findet man in der Abhandlung „elementare Berechnung des Widerstandes prismatischer Körper gegen die Biegung", welche aus den Verhandlungen des preußischen Gewerbevereins besonders abgedruckt ist. Die neuesten Untersuchungen über die Elasticität von Wertheim sind ebenfalls schon oben (S. 362) besprochen worden. Ueber Hodgkinson's Versuche findet man einen Auszug in Moseley's Mechanical Principles of Engineering and Architecture. Das Hauptwerk von Hodgkinson ist unter dem Titel „Experimental Researches on the strength and other properties of cast iron etc., bei

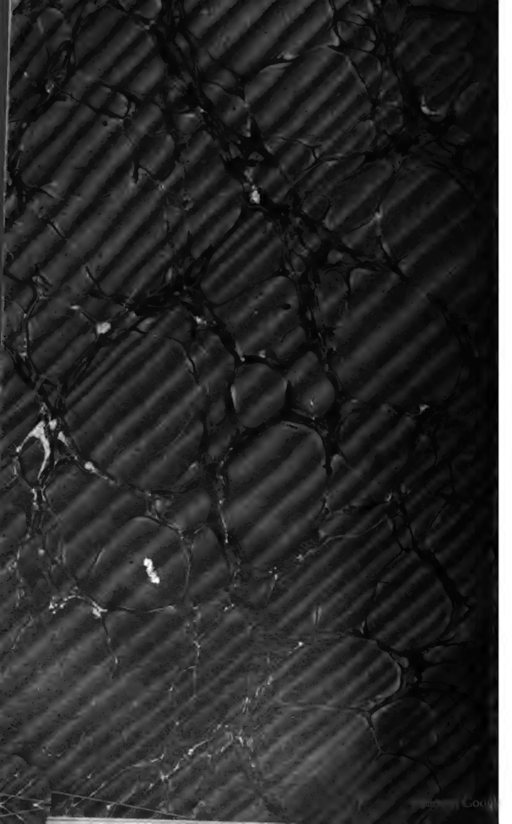
John Weale, 1846, erschienen. Eine französische Uebersetzung von Pirel enthält Tome IX, 1855, der Annales des ponts et chaussées, auch wird hiervon in einem Aufsatze von Couche, Tome XX, 1855, der Annales des Mines gehandelt. Tredgold handelt in einer besondern Abhandlung „über die Stärke des Gußeisens und anderer Metalle", welche in Leipzig 1826 auch deutsch erschienen ist. Uebrigens ist zum Studium zu empfehlen: Poncelet's Introduction à la Mécanique industrielle, ferner Navier's Résumé des leçons sur l'application de la Mécanique, Part. I., deutsch von Westphal, unter dem Titel „Mechanik der Baukunst", zu welcher Schrift Poncelet in seiner Theorie von dem Widerstande fester Körper (s. dessen Lehrbuch der Anwendung der Mechanik, Band II., deutsch von Schnuse) Ergänzungen liefert. Vorzüglich und auch im vorliegenden Werke mehrfach benutzt ist: Résistance des matériaux (Leçons de Mécanique pratique) par A. Morin, ferner Theorie der Holz- und Eisenconstructionen mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen von Georg Rebhan. Wien 1856. Auch ist zu empfehlen: die schon oben (S. 425) citirte Schrift, die Festigkeit der Materialien, von Moll und Reuleaur, ferner Mémoire sur la Résistance du Fer et de la Fonte etc. par G. H. Love, Paris 1852; sowie Tate, die Festigkeit eiserner Balken und Träger, nach dem Englischen von von Weber, Dresden 1851. Die Theorie der zusammengesetzten Festigkeit ist zuerst von dem Verfasser in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann u. s. w. Bd. I. abgehandelt worden. In dem ersten Bande der neuen Folge dieser Zeitschrift („Civilingenieur" 1854) wird vom Herrn Kunstmeister Bornemann die graphische Darstellung der relativen Festigkeit abgehandelt; auch werden in demselben die Ergebnisse der Biegungsversuche von Bornemann sowie von Lamarle mitgetheilt.

Weitere Ausführungen der Lehre von der Elasticität und Festigkeit kommen in der Folge bei der Theorie der Schwingungen und der des Stoßes vor.

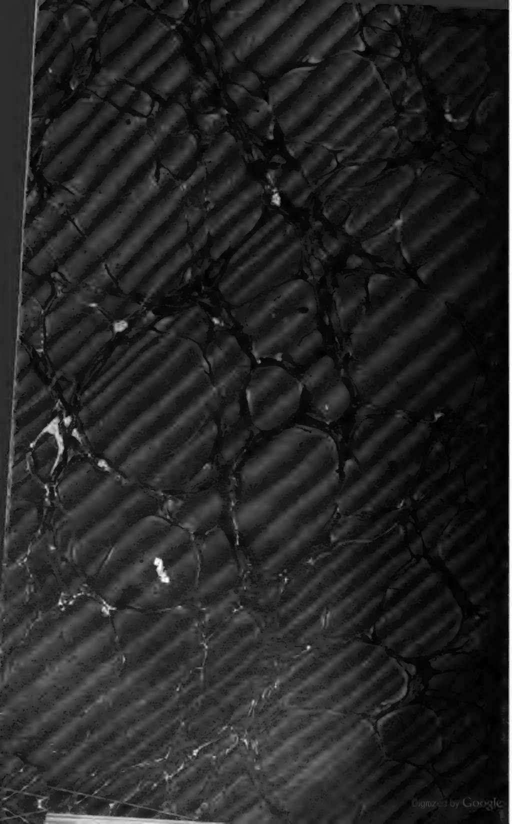
W. Fairbairn's Useful Information for Engineers I. and II. Series, berichten mehrfache Versuche über die Festigkeit des Schmiedeeisens in verschiedenen Formen, sowie auch über die von Steinen, Glas u. s. w. In theoretischer Beziehung ist vorzüglich zu empfehlen: Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides par Lamé, sowie A Manual of applied Mechanics by W. J. M. Rankine, nächstdem auch Cours de Mécanique appliquée, I., Partie, par Bresse, sowie Théorie de la Résistance et de la flexion plane des solides par Belanger. Die Schrift von Laissle und Schübler: „Ueber den Bau der Brückenträger" ist dem dermaligen Stand der Wissenschaft entsprechend bearbeitet, und daher sehr zu empfehlen; auch enthalten Rühlmann's Grundzüge der Mechanik, 3. Auflage (1860), einen lesenswerthen Abriß der Festigkeitslehre.

Der Civilingenieur und die Zeitschrift des deutschen Ingenieurvereins enthalten mehrere werthvolle Abhandlungen über Elasticitäts- und Festigkeitslehre, namentlich von Grashof, Schwedler, Winkler u. s. w, sowie auch mehrere gute Uebersetzungen von französischen und englischen Abhandlungen von Barlow, Bouniceau, Fairbairn, Love u. s. w.; auch findet man in diesen Zeitschriften die Ergebnisse vielfacher Versuche über die Festigkeit, z. B. von Fairbairn, Karmarsch, Schönemann, Völkers u. s. w.





















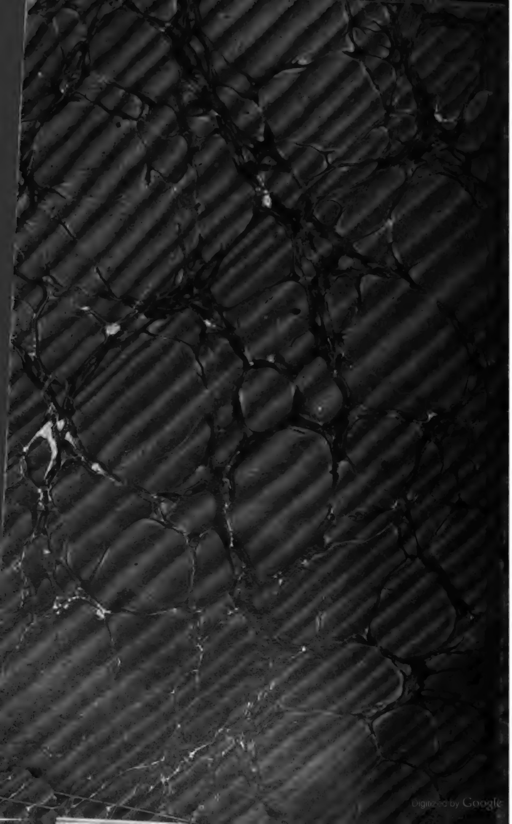




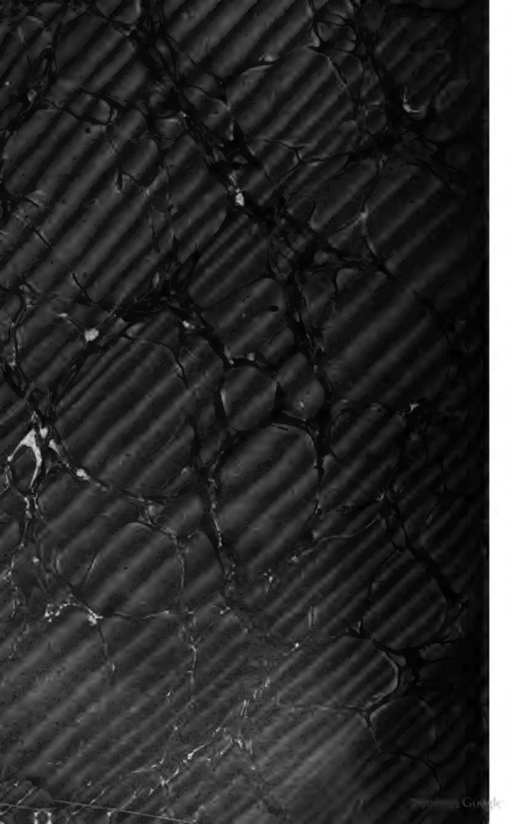




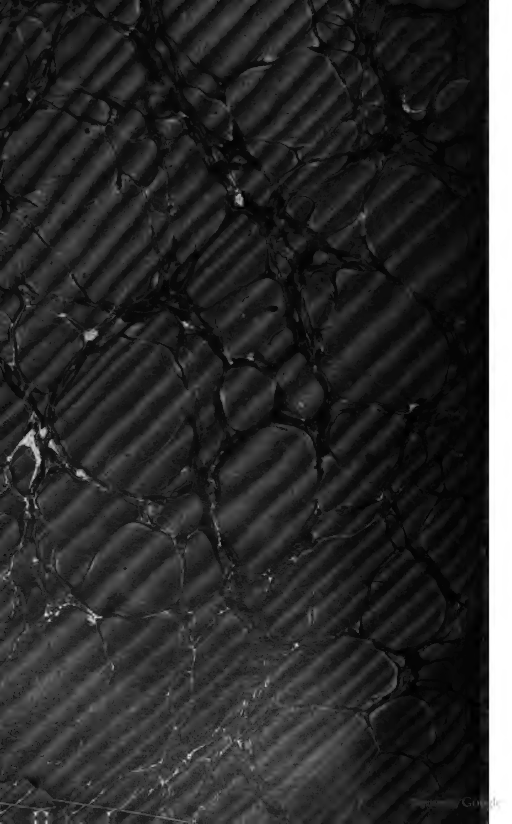


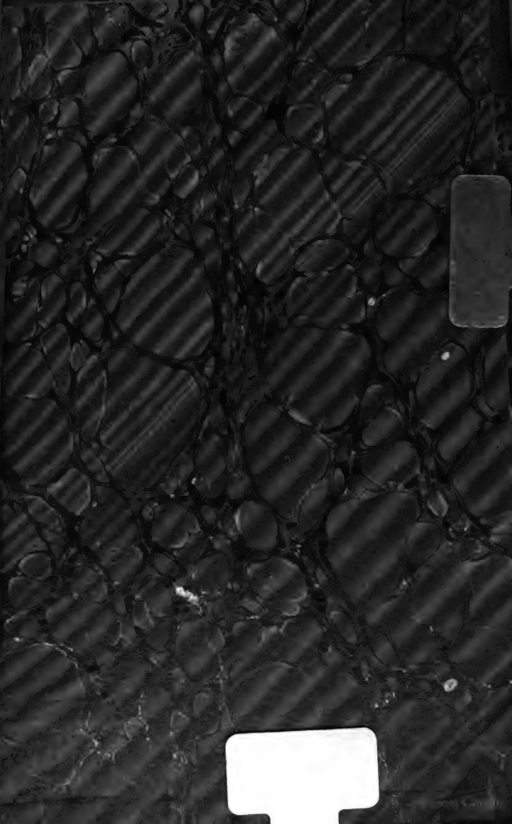


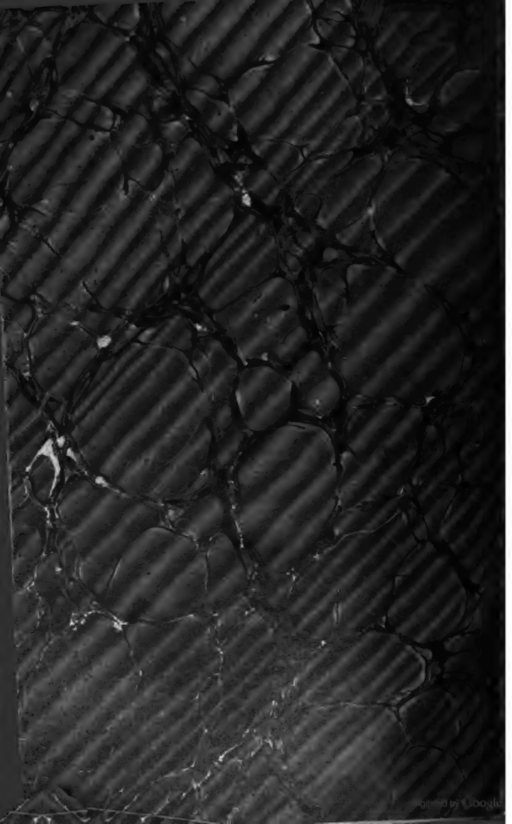



















Digitized by Google

